Solución Ayudantía 15

07 de Octubre 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

1 Circuitos RC

1.1 Circuitos RC - Resultados de Aprendizaje

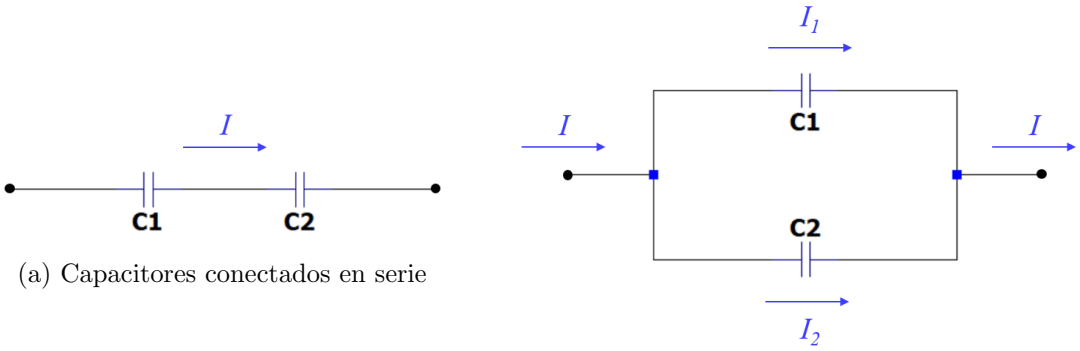
Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Aplicar las Leyes de Kirchoff para corrientes (KCL) y voltajes (KVL) en diversos circuitos RC.
- ☑ Resolver EDOs de carácter separable en el contexto de circuitos RC.
- ☑ Determinar y aplicar las condiciones iniciales necesarias para la EDO según el contexto.
- ☑ Determinar el voltaje en un capacitor según el contexto en diversos circuitos RC.
- ☑ Determinar la intensidad de corriente que circula por un capacitor según el contexto en diversos circuitos RC.
- ☑ Calcular la carga y energía almacenada en un capacitor en el contexto de circuitos RC.
- ☑ Interpretar y determinar la constante de tiempo capacitiva en diversos circuitos RC.
- ☐ Identificar capacitores conectados en serie y paralelo en diversas configuraciones.
- ☐ Determinar la capacitancia equivalente de una configuración mediante el método de conexiones.
- ☑ Utilizar límites matemáticos y técnicas relacionadas, tales como la regla de L'hopital.
- ☑ Utilizar derivadas y técnicas relacionadas, tales como la regla del producto y cuociente.

1.2 Circuitos RC - Condensadores

Un conjunto de "N" capacitores puede conectarse de distintas formas:

Conexión	Capacitancia Equivalente	Efectos Eléctricos
Serie	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i^N \frac{1}{C_i}$	Misma Corriente en cada C_i
Paralelo	$C_{eq} = \sum_i^N C_i$	Mismo Voltaje en cada C_i



(a) Capacitores conectados en serie

(b) Capacitores conectados en paralelo

Figura 1. Diagramas sobre las configuraciones de capacitores.

1.3 Circuitos RC - Cómo Utilizarlo Correctamente

Los llamados circuitos RC contienen tanto capacitores como resistores. Una guía para resolver este tipo de ejercicios se presenta a continuación:

1. En general, resulta más fácil utilizar el método de mallas, aunque el circuito puede ser resuelto mediante cualquier método:

$$\sum_{\text{malla}} V_k = 0$$

   Al llegar al capacitor se deberá sumar o restar su voltaje, dependiendo si la corriente ingresa por el terminal positivo o negativo asignado previamente.

2. Automáticamente, los voltajes provenientes de resistores deberán ser reemplazados mediante la Ley de Ohm.

3. Luego, deberán expresar la intensidad que circula por el capacitor en función de la(s) intensidad(es) de la(s) malla(s), de forma de armar la EDO respectiva:

$$I_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} \tag{1}$$

Recordemos que la energía almacenada por el capacitor cambia a medida que este se carga o descarga. Además, la ecuación anterior proviene de la definición de intensidad y de carga en el capacitor "$Q = CV$": al momento de reemplazar, solo el voltaje se verá afectado por el diferencial, puesto que la capacitancia se considera como una constante.

4. En general, la EDO será de tipo separable y se recomienda resolverla para el voltaje del capacitor, por lo que se dejará a un lado de la ecuación solo variables dependientes de "V_C" y al otro solo variables dependientes del tiempo y/o constantes:

$$\alpha(V_C) \cdot dV_C = \beta(t) \cdot dt$$

Luego, quedará integrar a ambos lados y despejar "V_C":

$$\int_{V_0}^{V_C} \alpha(V_C) \cdot dV_C = \int_{t_0}^{t} \beta(t) \cdot dt$$

Donde "α" y "β" son variables que dependen de "V_C" y "t", respectivamente. Por otra parte, "V_0" es la condición inicial de voltaje para el capacitor y "t_0" el tiempo inicial o desde donde se considera la carga/descarga del mismo.

5. ¿Cómo determinar las condiciones iniciales del capacitor? Se debe leer bien el enunciado:

   a) En ocasiones se dirá explícitamente que el condensador se encontraba descargado (i.e $Q = 0$), por lo que su diferencia de potencial también será nula.

   b) En otros casos, se dirá implícitamente que el capacitor se ha cargado completamente, puesto que el circuito se ha estado alimentando "durante mucho tiempo" con una entrada de voltaje. Al alcanzar su carga máxima, el condensador se comporta como circuito abierto, puesto que ya no hay cambios en su voltaje con respecto al tiempo:

$$I_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} = 0$$

6. Por último, les debería quedar una solución de la siguiente forma:

$$V_C(t) = V_C(\infty) + (V_0 - V_C(\infty))e^{-t/\tau} \tag{2}$$

Donde "τ" es la constante de tiempo, la cual indica qué tan lento o rápido se carga el capacitor. Por otra parte, "$V_C(\infty)$" se refiere a cómo se comporta el voltaje del capacitor en el infinito. Para circuitos de primer orden, se cumple que:

$$\tau = C \cdot R_{Th} \tag{3}$$

Donde "R_{Th}" es la resistencia de Thèvenin.

7. Si es que piden determinar la intensidad que circula por el capacitor o la carga de este a través del tiempo, se puede ingresar la solución obtenida en las expresiones anteriores:

$$I_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$Q(t) = CV_C(t)$$

Si es que se requiere otra variable (i.e la intensidad/voltaje en alguna resistencia), siempre se puede utilizar KCL, KVL, Ley de Ohm, entre otros. Si se requiere analizar variables en el infinito, se debe utilizar la herramienta de límite matemático.

1.3.1 "Ejercicios Teoría Electromagnética ", 11.5.5, Fabián Cádiz

Inicialmente, el circuito de la figura ha estado abierto durante mucho tiempo.

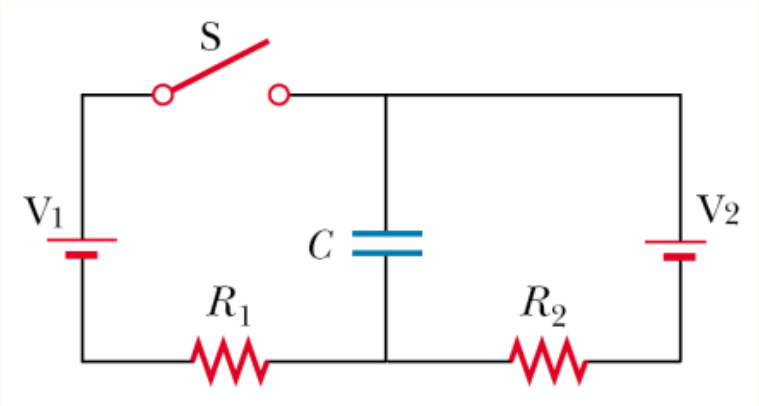
a) Calcule la carga que el condensador alcanza con el interruptor abierto.

b) Calcule la energía que el condensador alcanza con el interruptor abierto.

c) Determine el voltaje, la intensidad de corriente y carga que circula por el condensador en función del tiempo luego de que el interruptor es cerrado.

d) ¿Cuál es la constante de tiempo capacitiva luego de que el interruptor es cerrado?

e) Si el interruptor se cierra y transcurre mucho tiempo, encuentre la nueva carga del condensador.



Solución a)

Paso Único: Condiciones Iniciales

Se pide determinar la carga en el condensador con el interruptor abierto. Si este ha estado abierto durante mucho tiempo, la fuente de voltaje V_2 entregará una constante alimentación al capacitor y, eventualmente, alcanzará su carga máxima. En este punto su carga ya no puede variar, por lo que se comportará como circuito abierto:

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = 0$$

Es posible observar que se produce un circuito abierto tanto por el interruptor en la parte izquierda como por el capacitor en la parte central del circuito. La corriente eléctrica no puede circular por tales ramas, por lo que el circuito queda como:

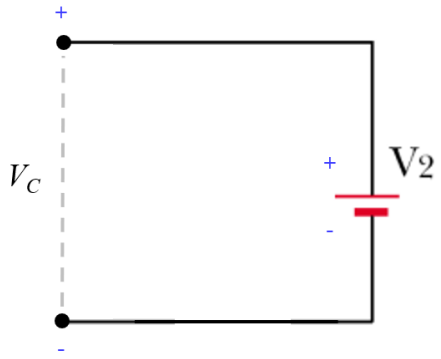


Figura 2. Esquema sobre las condiciones iniciales del circuito.

Luego, el voltaje entre los terminales del capacitor estará dado por:

$$V_C(0) = V_2$$

Finalmente, se utiliza la expresión que relaciona carga almacenada con capacitancia:

$$\begin{aligned} Q(0) &= CV_C(0) \\ &= CV_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Solución b)

Paso Único: Energía Almacenada

Se pide determinar la energía almacenada en t = 0, por lo que se debe utilizar la siguiente expresión:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Es importante notar que todas son equivalentes e igual de válidas.
No obstante, por conveniencia se utilizará la que relaciona "C" y "V", pues son datos que ya se tienen:

$$\begin{aligned} U(0) &= \frac{1}{2}CV_C(0)^2 \\ &= \frac{CV_2^2}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Solución c), d) y e)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el voltaje, la intensidad de corriente y la carga que circula por el condensador en función del tiempo, luego de que el interruptor es cerrado. Luego, se deberá resolver el circuito mediante algún método, de forma de armar la EDO respectiva:

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C}{dt}$$

Además, se deben aplicar las condiciones iniciales en relación al capacitor.

Paso 1: Preparación KVL

Como se presentan pocas mallas, se preferirá realizar este ejercicio mediante ese método:

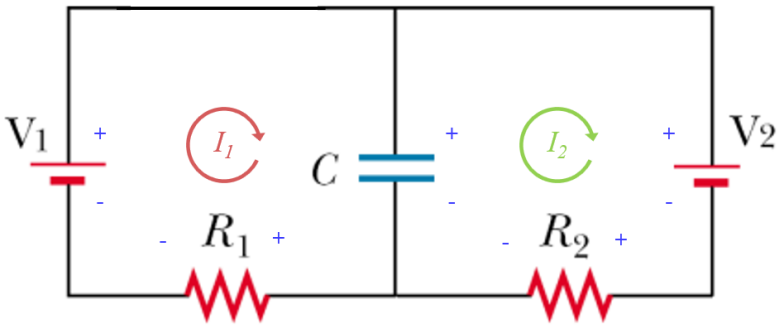


Figura 3. Esquema KVL del circuito (interruptor cerrado).

Por simplicidad, se asignarán arbitrariamente corrientes que circulan en un mismo sentido. Además, los polos de las fuentes de voltaje están predefinidos por el tamaño de las placas.

Paso 2: Resolución KVL - I_1 e I_2

Para armar las ecuaciones de KVL debemos observar una malla y recorrerla en el sentido otorgado. Al pasar por un elemento circuital, se sumará su voltaje si se entra de + a − (en caso contrario se resta):

Malla	Ecuación KVL
1	$-V_1 + V_C + V_{R_1} = 0$
2	$-V_C + V_2 + V_{R_2} = 0$

Luego, los voltajes provenientes de resistores son reemplazados mediante Ley de Ohm:

Malla	Ecuación KVL
1	$-V_1 + V_C + I_1 R_1 = 0$
2	$-V_C + V_2 + I_2 R_2 = 0$

Para obtener la EDO, se aplicará la expresión $I_C = I_1 - I_2 = C\frac{dV_C}{dt}$:

Malla	Ecuación KVL
1	$-V_1 + V_C + (I_2 + C\frac{dV_C}{dt})R_1 = 0$
2	$I_2 = \frac{V_C - V_2}{R_2}$

Combinando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} -V_1 + V_C + (\frac{V_C - V_2}{R_2} + C\frac{dV_C}{dt})R_1 = 0 \\ -V_1 - \frac{R_1 V_2}{R_2} + V_C(1 + \frac{R_1}{R_2}) + CR_1\frac{dV_C}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Por simplicidad, se reescribirá $\alpha = -V_1 - \frac{R_1 V_2}{R_2}$ y $\beta = 1 + \frac{R_1}{R_2}$:

$$\alpha + \beta V_C + CR_1\frac{dV_C}{dt} = 0 \tag{7}$$

Paso 3: Resolución EDO - $V_C(t)$

La EDO se puede tratar mediante el método de separación de variables, por lo que se dejará a un lado de la ecuación solo variables dependientes de "V_C" y al otro solo variables dependientes del tiempo y/o constantes:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta V_C + CR_1\frac{dV_C}{dt} &= 0 \\ -\frac{dt}{CR_1} &= \frac{dV_C}{\alpha + \beta V_C} \end{aligned}$$

Integrando con condiciones iniciales generales:

$$\int_{t_0}^{t} -\frac{dt}{CR_1} = \int_{V_C(0)}^{V_C} \frac{dV_C}{\alpha + \beta V_C}$$

Arbitrariamente, diremos que el interruptor se cierra en $t = 0$ (i.e $t \in [0, \infty[$).
Asimismo, el condensador estará sometido a cierta diferencia de potencial inicial $V_C(0) = V_2$:

$$\begin{aligned} \int_{0}^{t} -\frac{dt}{CR_1} &= \int_{V_2}^{V_C} \frac{dV_C}{\alpha + \beta V_C} \\ -\frac{t}{CR_1} &= \int_{\alpha+\beta V_2}^{\alpha+\beta V_C} \frac{du}{\beta u} \\ -\frac{\beta t}{CR_1} &= \ln(\frac{\alpha + \beta V_C}{\alpha + \beta V_2}) \end{aligned}$$

Notar que se realizó un cambio de variable $u = \alpha + \beta V_C \ \rightarrow \ du = \beta \ dV_C$.
Por último, despejamos V_C aplicando exponencial:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\beta t}{CR_1}} &= \frac{\alpha + \beta V_C}{\alpha + \beta V_2} \\ V_C(t) &= -\frac{\alpha}{\beta} + (\frac{\alpha}{\beta} + V_2)e^{-\frac{\beta t}{CR_1}} \end{aligned} \tag{8}$$

Paso 4: Constante de Tiempo Capacitiva - τ

Observando y comparando lo obtenido, la constante de tiempo capacitiva vendrá dada por:

$$-\frac{t}{\tau} = -\frac{\beta t}{CR_1}$$
$$\tau = \frac{CR_1}{\beta}$$

Reescribiendo se obtiene que:

$$\tau = \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{9}$$

Paso 5: Intensidad Corriente Capacitor - $I_C(t)$

Utilizando la expresión que relaciona la intensidad de corriente con el voltaje en el capacitor:

$$\begin{aligned} I_C(t) &= C\frac{dV_C(t)}{dt} \\ &= C\frac{d}{dt}(-\frac{\alpha}{\beta} + (\frac{\alpha}{\beta} + V_2)e^{-\frac{\beta t}{CR_1}}) \\ &= C(\frac{\alpha}{\beta} + V_2)e^{-\frac{\beta t}{CR_1}} \cdot -\frac{\beta}{CR_1} \\ &= -\frac{\beta}{R_1}(\frac{\alpha}{\beta} + V_2)e^{-\frac{\beta t}{CR_1}} \end{aligned} \tag{10}$$

Paso 6: Carga Capacitor - $Q(t)$ y $Q(\infty)$

Por último, se ocupa la expresión que relaciona carga almacenada con capacitancia:

$$\begin{aligned} Q(t) &= CV_C(t) \\ &= -\frac{C\alpha}{\beta} + C(\frac{\alpha}{\beta} + V_2)e^{-\frac{\beta t}{CR_1}} \end{aligned}$$

Además, y si transcurre mucho tiempo luego de que el interruptor se cierra (i.e $t \to \infty$), la carga en el capacitor será:

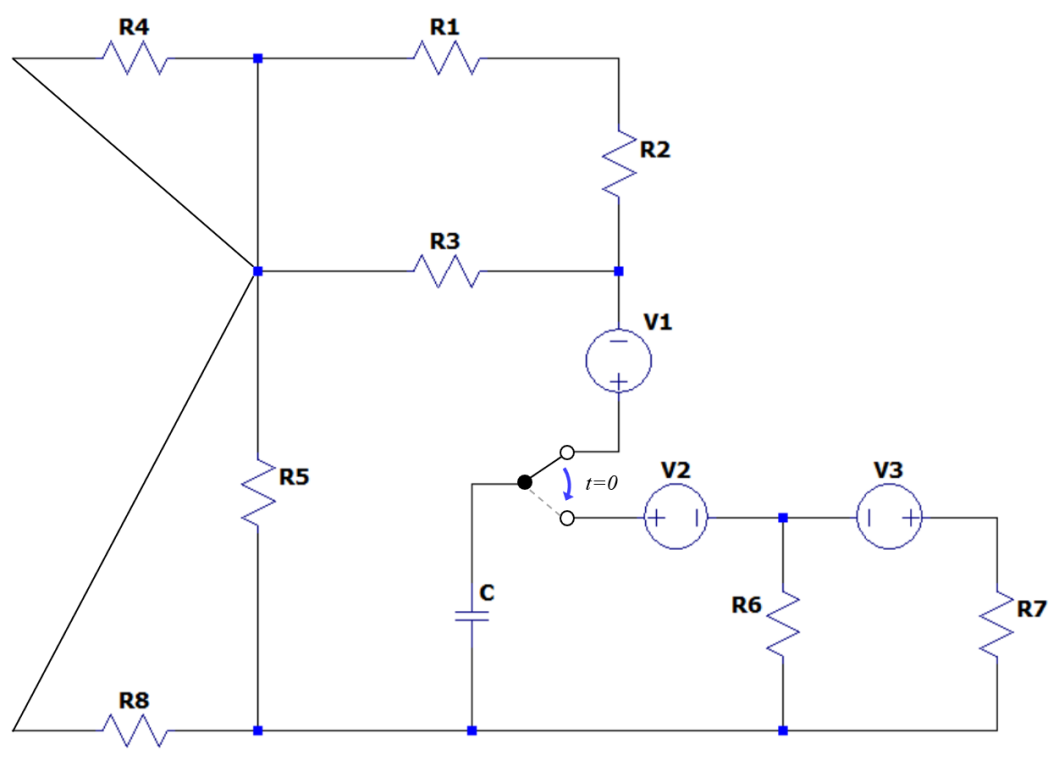
$$\begin{aligned} Q(\infty) &= \lim_{t\to\infty} Q(t) \\ &= \lim_{t\to\infty} -\frac{C\alpha}{\beta} + C(\frac{\alpha}{\beta} + V_2)e^{-\frac{\beta t}{CR_1}} \\ &= -\frac{C\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Reescribiendo se obtiene que:

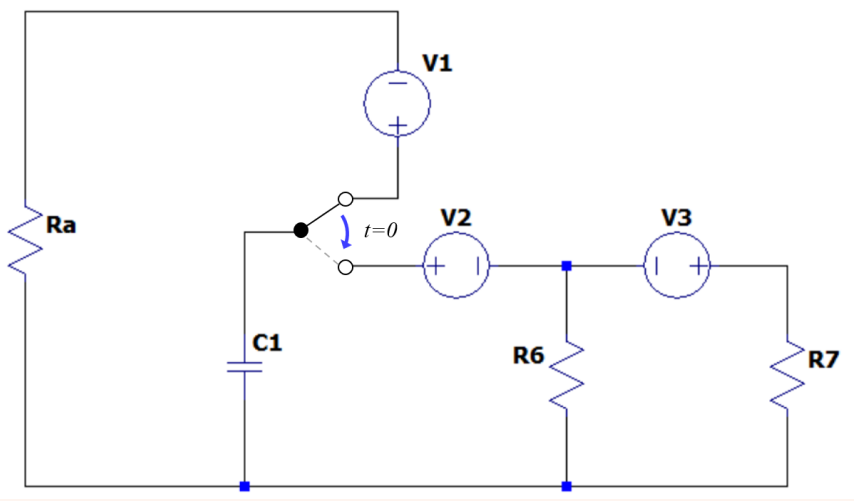
$$\begin{aligned} Q(\infty) &= -\frac{C\alpha}{\beta} \\ &= \frac{C(V_1 + \frac{R_1V_2}{R_2})}{1 + R_1/R_2} \\ &= C(\frac{R_1V_2 + R_2V_1}{R_1 + R_2}) \end{aligned} \tag{11}$$

1.3.2 "Análisis de Circuitos Eléctricos", 6.4, Berríos F. & Sáez C.

El circuito de la figura ha estado operando por mucho tiempo, hasta que en $t = 0$ un interruptor cambia su topología.



a) Reduzca el circuito de manera que quede de la siguiente forma:



b) Calcule la carga almacenada por el capacitor en $t = 0$.

c) Determine el voltaje, la carga y la intensidad de corriente que circula por el capacitor para $t > 0$.

d) ¿Cuál es la constante de tiempo capacitiva luego de que el interruptor es cerrado?

e) Encuentre la nueva carga del condensador, luego de que ha transcurrido mucho tiempo con el interruptor cerrado.

Solución a)

Paso Único: Resistencia Equivalente

Se pide reducir el circuito hasta obtener la forma deseada. Es posible observar que se produce un cortocircuito en la parte superior del circuito, puesto que una rama sin ningún componente circuital está conectada en paralelo con otras ramas. La corriente preferirá circular por aquel camino que menos se le oponga, por lo que el circuito queda como:

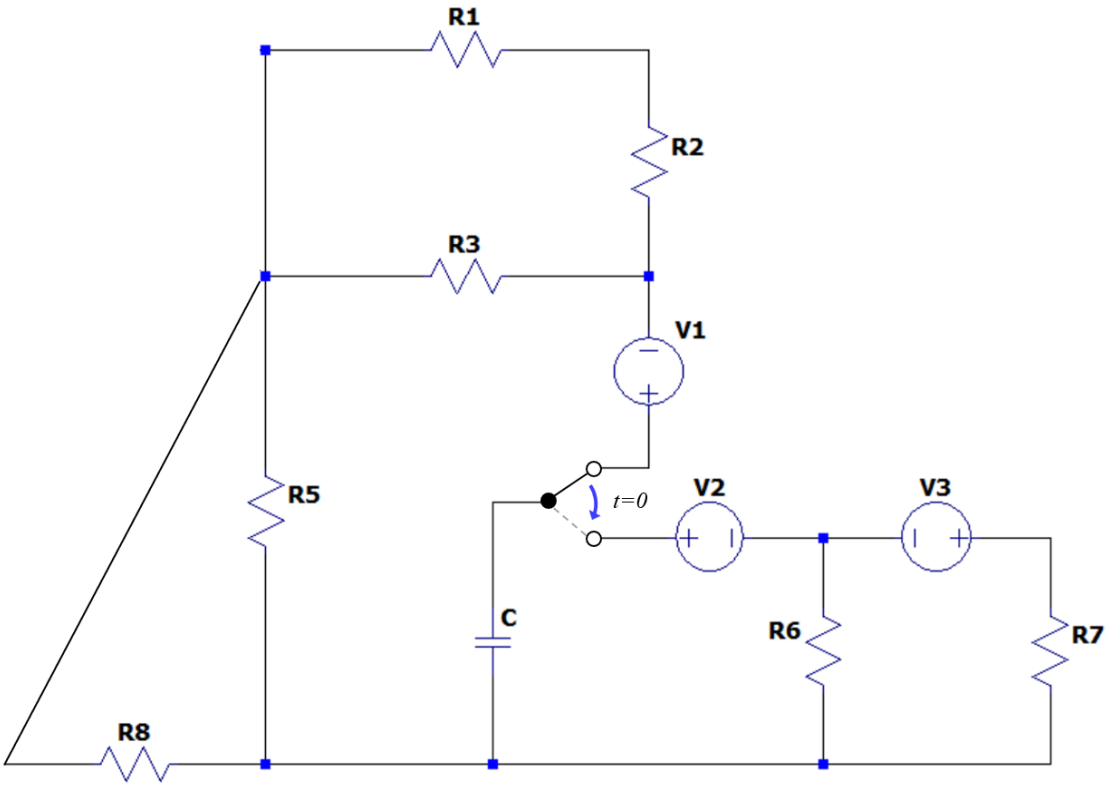


Figura 4. Esquema sobre la reducción de resistencias del circuito.

Del esquema, se nota que R_1 está conectada en serie con R_2:

$$R_{eq,1} = R_1 + R_2$$

Asimismo, se nota que $R_1 + R_2$ está conectada en paralelo con R_3 y que R_5 está conectada en paralelo con R_8:

$$R_{eq,2} = (R_1 + R_2) /\!/ R_3$$

$$R_{eq,3} = R_5 /\!/ R_8$$

Finalmente, se nota que $(R_1 + R_2) /\!/ R_3$ está conectada en serie con $R_5 /\!/ R_8$:

$$R_a = [(R_1 + R_2) /\!/ R_3] + R_5 /\!/ R_8 \tag{12}$$

Solución b)

Paso Único: Condiciones Iniciales

Se pide determinar la carga almacenada por el capacitor en $t = 0$. Si el circuito ha estado operando en este estado durante mucho tiempo, la fuente de voltaje V_1 entregará una constante alimentación al capacitor y, eventualmente, alcanzará su carga máxima. En este punto su carga ya no puede variar, por lo que se comportará como circuito abierto:

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = 0$$

Es posible observar que se produce un circuito abierto tanto por el interruptor como por el capacitor en la parte central del circuito. La corriente eléctrica no puede circular por tales ramas, por lo que el circuito queda como:

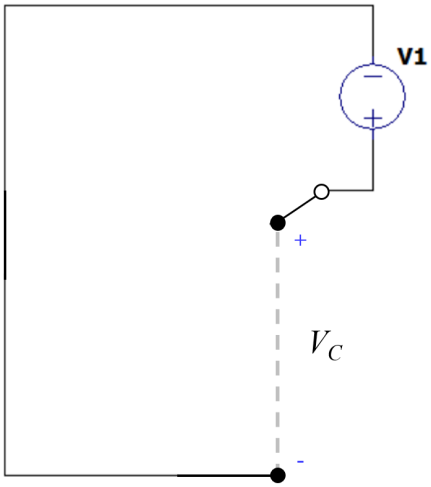


Figura 5. Esquema sobre las condiciones iniciales del circuito.

Luego, el voltaje entre los terminales del capacitor estará dado por:

$$V_C(0) = V_1$$

Finalmente, se utiliza la expresión que relaciona carga almacenada con capacitancia:

$$\begin{aligned} Q(0) &= CV_C(0) \\ &= CV_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Solución c), d) y e)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el voltaje, la intensidad de corriente y la carga que circula por el capacitor para $t > 0$, o sea, al cambiar la topología. Luego, se deberá resolver el circuito mediante algún método, de forma de armar la EDO respectiva:

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C}{dt}$$

Además, se deben aplicar las condiciones iniciales en relación al capacitor.

Paso 1: Preparación KVL

Para $t > 0$, el circuito queda como:

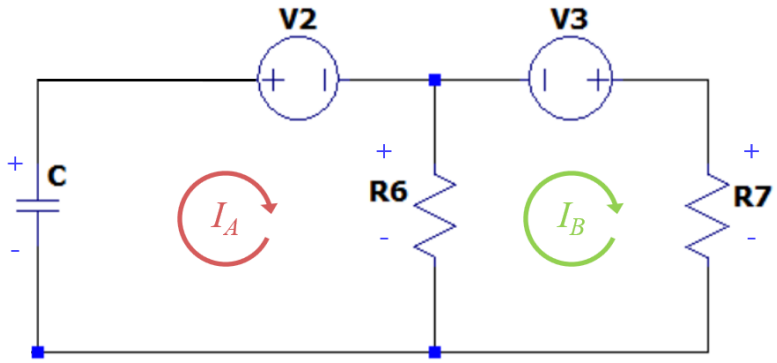


Figura 6. Esquema KVL del circuito (interruptor cerrado).

Como se presentan pocas mallas, se preferirá realizar este ejercicio mediante ese método. Por simplicidad, se asignarán arbitrariamente corrientes que circulan en un mismo sentido.

Paso 2: Resolución KVL - I_A e I_B

Para armar las ecuaciones de KVL debemos observar una malla y recorrerla en el sentido otorgado. Al pasar por un elemento circuital, se sumará su voltaje si se entra de $+$ a $-$ (en caso contrario se resta):

Malla	Ecuación KVL
A	$-V_C + V_2 + V_{R_6} = 0$
B	$-V_{R_6} - V_3 + V_{R_7} = 0$

Luego, los voltajes provenientes de resistores son reemplazados mediante Ley de Ohm:

Malla	Ecuación KVL
A	$-V_C + V_2 + (I_A - I_B)R_6 = 0$
B	$-(I_A - I_B)R_6 - V_3 + I_B R_7 = 0$

Para obtener la EDO:

Malla	Ecuación KVL
A	$-V_C + V_2 + (I_A - I_B)R_6 = 0$
B	$I_B = \frac{I_A R_6 + V_3}{R_6 + R_7}$

Combinando ambas ecuaciones y aplicando la expresión $I_C = -I_A = C\frac{dV_C}{dt}$:

$$-V_C + V_2 + (I_A - \frac{I_A R_6 + V_3}{R_6 + R_7})R_6 = 0$$
$$-V_C + V_2 + I_A R_6(1 - \frac{R_6}{R_6 + R_7}) - \frac{V_3 R_6}{R_6 + R_7} = 0$$
$$-V_C + -C\frac{dV_C}{dt}\frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} - \frac{V_3 R_6}{R_6 + R_7} + V_2 = 0$$

Por simplicidad, se reescribirá $\alpha = -\frac{V_3 R_6}{R_6 + R_7} + V_2$ y $\beta = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7}$:

$$-V_C - \beta C\frac{dV_C}{dt} + \alpha = 0 \tag{14}$$

Paso 3: Resolución EDO - $V_C(t)$

La EDO se puede tratar mediante el método de separación de variables, por lo que se dejará a un lado de la ecuación solo variables dependientes de "V_C" y al otro solo variables dependientes del tiempo y/o constantes:

$$-V_C - \beta C\frac{dV_C}{dt} + \alpha = 0$$
$$\frac{dt}{\beta C} = \frac{dV_C}{\alpha - V_C}$$

Integrando con condiciones iniciales generales:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\beta C} = \int_{V_C(0)}^{V_C} \frac{dV_C}{\alpha - V_C}$$

El interruptor cambia de posición en $t = 0$ (i.e $t \in [0, \infty[$).
Asimismo, el condensador estará sometido a cierta diferencia de potencial inicial $V_C(0) = V_1$:

$$\int_0^t \frac{dt}{\beta C} = \int_{V_1}^{V_C} \frac{dV_C}{\alpha - V_C}$$
$$-\frac{t}{\beta C} = \int_{\alpha - V_1}^{\alpha - V_C} \frac{du}{u}$$
$$-\frac{t}{\beta C} = \ln\left(\frac{\alpha - V_C}{\alpha - V_1}\right)$$

Notar que se realizó un cambio de variable $u = \alpha - V_C \;\rightarrow\; du = -dV_C$.
Por último, despejamos V_C aplicando exponencial:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{\beta C}} &= \frac{\alpha - V_C}{\alpha - V_1} \\ V_C(t) &= \alpha + (V_1 - \alpha)e^{-\frac{t}{\beta C}} \end{aligned} \tag{15}$$

Paso 4: Constante de Tiempo Capacitiva - τ

Observando y comparando lo obtenido, la constante de tiempo capacitiva vendrá dada por:

$$-\frac{t}{\tau} = -\frac{t}{\beta C}$$
$$\tau = \beta C$$

Reescribiendo se obtiene que:

$$\tau = \frac{C R_6 R_7}{R_6 + R_7} \tag{16}$$

Paso 5: Intensidad Corriente Capacitor - $I_C(t)$

Utilizando la expresión que relaciona la intensidad de corriente con el voltaje en el capacitor:

$$\begin{aligned} I_C(t) &= C\frac{dV_C(t)}{dt} \\ &= C\frac{d}{dt}(\alpha + (V_1 - \alpha)e^{-\frac{t}{\beta C}}) \\ &= C(V_1 - \alpha)e^{-\frac{t}{\beta C}} \cdot -\frac{1}{\beta C} \\ &= -\frac{1}{\beta}(V_1 - \alpha)e^{-\frac{t}{\beta C}} \end{aligned} \tag{17}$$

Paso 6: Carga Capacitor - $Q(t)$ y $Q(\infty)$

Por último, se utiliza la expresión que relaciona carga almacenada con capacitancia:

$$\begin{aligned} Q(t) &= CV_C(t) \\ &= C\alpha + C(V_1 - \alpha)e^{-\frac{t}{\beta C}} \end{aligned}$$

Además, y si transcurre mucho tiempo luego de que el interruptor se cierra (i.e $t \to \infty$), la carga en el capacitor será:

$$\begin{aligned} Q(\infty) &= \lim_{t\to\infty} Q(t) \\ &= \lim_{t\to\infty} C\alpha + C(V_1 - \alpha)e^{-\frac{t}{\beta C}} \\ &= C\alpha \end{aligned}$$

Reescribiendo se obtiene que:

$$Q(\infty) = C(-\frac{V_3 R_6}{R_6 + R_7} + V_2) \tag{18}$$