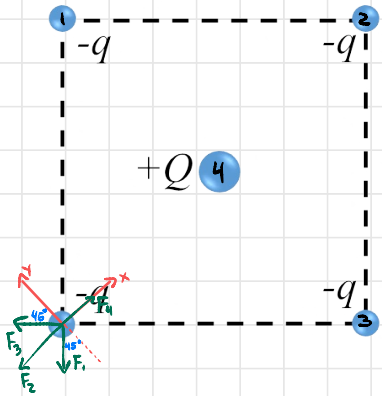
P11

Analizamos Fuerza en 1 vértice debido a la simetría.



Notar que en el vértice hay 3 fuerzas de repulsión y 1 de atracción ... ¿Parece que fuerzas en y se anulan?

Además, F_1 y F_3 tienen componentes tanto en x como y

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_4 - F_2 - F_3 \operatorname{Sen}45° - F_1 \operatorname{Sen}45° = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_3 \operatorname{Cos}45° - F_1 \operatorname{Cos}45° = 0$$ } componentes en y se anulan

Analizando en x :

$$F_4 = F_2 + F_3\frac{\sqrt{2}}{2} + F_1\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{qQk}{\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{q^2k}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{q^2k}{2a^2}\sqrt{2} + \frac{q^2k}{2a^2}\sqrt{2}$$

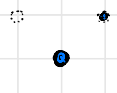
$$\Rightarrow \frac{2Q}{a^2} = \frac{q}{a^2 2} + \frac{q}{a^2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Q = q\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Para el W_T debemos seguir el siguiente algoritmo

1. Si tomo Q en el ∞ y la llevo al centro no hago trabajo, ya que no hay ninguna carga que produzca un $\vec{E}$.

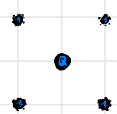
2. Ahora, -q **sí** siente una fuerza debido al $\vec{E}$ de Q, $\therefore$ hay W.

③ 

Ahora, la carga que llegó siente la fuerza de Q y $-q$, así que $W_T = W_Q + W_{-q}$

④ 

La que llegó, siente $\vec{F}$ de las otras 3. $\therefore W_T = W_a + W_q + W_{-q}$

⑤ 

La última, siente $\vec{F}$ de las otras 4. $\therefore W_T = W_a + W_q + W_q + W_q$

Entonces, El W para ahora el sistema de cargas es la suma de los W de ①, ②, ③, ④.

↳ recordar que $W = Vq$

---

① $W_1 = 0$; ② $W_2 = \frac{-q\frac{QK}{(a\sqrt{2}/2)}}{}$; ③ $W_3 = \frac{-qQK}{(a\sqrt{2}/2)} + \frac{q^2K}{a}$; ④ $W_4 = \frac{-qQK}{(a\sqrt{2}/2)} + \frac{q^2K}{a} + \frac{q^2K}{a\sqrt{2}}$

⑤ $W_5 = \frac{-qQK}{(a\sqrt{2}/2)} + \frac{q^2K}{a} + \frac{q^2K}{a\sqrt{2}} + \frac{q^2K}{a}$

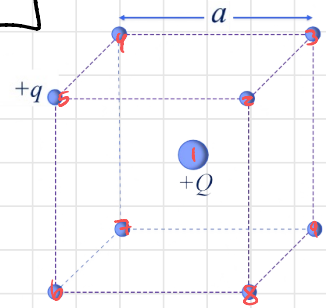
$\Rightarrow W_2 = \frac{-qQK\sqrt{2}}{a}$; $W_3 = \frac{-qQK\sqrt{2}}{a} + \frac{q^2K}{a}$; $W_4 = \frac{-qQK\sqrt{2}}{a} + \frac{2q^2K + q^2K\sqrt{2}}{2a}$

$W_5 = \frac{-qQK\sqrt{2}}{a} + \frac{4q^2K + q^2K\sqrt{2}}{2a}$

$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = \frac{Kq}{a}\left((4+\sqrt{2})q - 4\sqrt{2}Q\right)$, pero $Q = q\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow W_T = \frac{Kq}{a}\left((4+\sqrt{2})q - 4\sqrt{2}\,q\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \Rightarrow \boxed{W_T = 0}$

P2



Lo mismo de Antes Pero + Intenso.

Formula General : $W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}^{N} K\frac{q_j q_k}{r_{jk}}$

↳ el 1/2 es Porque Contamos Doble, Pero Podemos Evitarlo Si no Duplicamos la cuenta

$$\Rightarrow W = \sum_{j=1}^{9}\sum_{k\neq j}^{9} K\frac{q_j q_k}{r_{jk}}$$

$$\Rightarrow W = \frac{q_1 q_2 K}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3 K}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3 K}{r_{23}} + \frac{q_4 q_1 K}{r_{41}} + \frac{q_4 q_3 K}{r_{43}} + \frac{q_4 q_2 K}{r_{42}} + \frac{q_5 q_1 K}{r_{51}} + \frac{2 q_5 q_4 K}{r_{54}} + \frac{q_5 q_3 K}{r_{53}}$$

$$+ \frac{q_6 q_1 K}{r_{61}} + \frac{q_6 q_5 K}{r_{65}} + \frac{2 q_6 q_4 K}{r_{64}} + \frac{q_6 q_3 K}{r_{63}} + \frac{q_7 q_1 K}{r_{71}} + \frac{2 q_7 q_6 K}{r_{67}} + \frac{q_5 q_7 K}{r_{57}} + \frac{2 q_7 q_2 K}{r_{72}}$$

$$+ \frac{q_7 q_3 K}{r_{73}} + \frac{q_8 q_1 K}{r_{81}} + \frac{2 q_8 q_6}{r_{86}} + \frac{q_7 q_8 K}{r_{78}} + \frac{2 q_8 q_3 K}{r_{83}} + \frac{q_4 q_8 K}{r_{84}} + \frac{q_5 q_8 K}{r_{85}}$$

$$+ \frac{q_9 q_1 K}{r_{91}} + \frac{3 q_9 q_7 K}{r_{97}} + \frac{3 q_9 q_4 K}{r_{94}} + \frac{q_9 q_5 K}{r_{95}}$$

Horrible, Hecho Por Fuerza Bruta

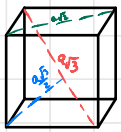
Se Puede mejorar un Poco el Calculo Teniendo en cuenta lo Siguiente:

- Hay 4 distancias importantes: Vertice-Centro = r_1, Arista = r_2, Diagonal Cara = r_3 y Diagonal Cubo = r_4
- En Vertice-Centro, Por cada Vertice Solo Hay una "Conexión" con el Centro, así que el total es: 8
- En Arista, Cada Vertice Tiene "Conexión" con 3 Vertices y Además Son 12 Aristas, así que el total es: 12·3
- En Diagonal Cara, // // // // // // Diagonales // // // // Diagonales, así que el total es: 12·3
- En Diagonal cubo, es directo que solo hay 4 diagonales.

$$\therefore W_T = \frac{8 \cdot qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{12 \cdot 3q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{12 \cdot 3q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_3} + \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_4}$$

Con geometría sacamos r_1, r_2, r_3 y r_4

$$r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad r_2 = a \quad ; \quad r_3 = a\sqrt{2} \quad ; \quad r_4 = a\sqrt{3}$$



Ahora, en el ∞, TODA la energía del sistema se transforma en energía cinética.

$$W = K$$

$$\Rightarrow \frac{8 \cdot qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{12 \cdot 3q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{12 \cdot 3q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_3} + \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_4} = 8\left(\frac{1}{2}mV^2\right)$$

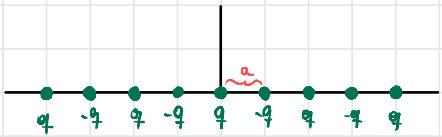
$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\frac{Q}{r_1}q + 3\cdot\frac{3q^2}{r_2} + 3\cdot\frac{3q^2}{r_3} + \frac{q^2}{4}}{4\pi\varepsilon_0 m}} \qquad \Rightarrow V = \sqrt{\frac{q\left[\frac{4\sqrt{3}}{3a}Q + q\left(\frac{q}{a} + \frac{9\sqrt{2}}{2a} + \frac{\sqrt{3}}{3a}\right)\right]}{4\pi\varepsilon_0 m}}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{q\left[(54 + 27\sqrt{2} + 2\sqrt{3})q + 8\sqrt{3}Q\right]}{24a\pi m\varepsilon_0}}$$

//

P3)

La situación es la siguiente



Trabajo Hecho = qV, Con V = Potencial en el punto central debido a las otras cargas por parte

$$W_T = W_{12} + W_{13} + W_{14} + \cdots$$

$$\Rightarrow W_T = \frac{q(-q)}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{qq}{4\pi\varepsilon_0 2a} + \frac{q(-q)}{4\pi\varepsilon_0 4a} + \cdots$$

$$W_T = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

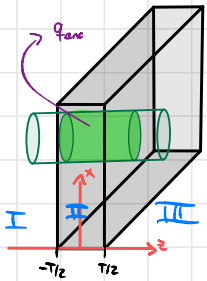
¿Qué es esto?

↳ Una expansión en Serie de Potencias de $f(x) = \ln(x+1)$ con $x = 1$.

Sabemos que $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, si $x = 1 \Rightarrow \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

$\therefore W_T = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln(2)$

P4



Como vimos en ejemplos con planos ∞, la ley de Gauss entrega que:

$$E\,2A_{TAPA} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{enc}}{2\varepsilon_0 A_{TAPA}}$$

Notar que hay 3 regiones: I (la de la $|z|$), II (Centro), III (Derecha)

Para q_{en} (completa) (I y III): $q_{en} = \iiint \beta |z| \, dV$

$$\Rightarrow q_{en} = 2\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{T/2} \beta z \, r \, dz \, d\theta \, dr$$

$$\Rightarrow q_{en} = 2\beta \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi \left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{T/2}$$

$$\Rightarrow q_{en} = 2\beta \cdot \underbrace{a^2\pi}_{A_{TAPA}} \frac{T^2}{8}$$

$$\Rightarrow q_{en} = \beta \frac{T^2}{4} \cdot A_{TAPA}$$

Para q_{en} (Parcial Interior) (II): $q_{en} = \iiint \beta |z| \, r \, dr \, d\theta \, dz$

$$q_{en} = 2\beta \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{z} z \, r \, dr \, d\theta \, dz$$

Como es Causa Interior, z es Variable. Si crece z hay más Causa encerrada.

$$q_{en} = 2\beta \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi \frac{z^2}{2}$$

$$q_{en} = \beta \underbrace{a^2\pi}_{A_{TAPA}} z^2$$

$$q_{en} = \beta A_{TAPA} z^2$$

Entonces, para $|z| > T/2$ (fuera del plano): $E = \frac{B\frac{T}{4}^2 A}{2\varepsilon_0 A} \Rightarrow E = \frac{BT^2}{8\varepsilon_0}(\pm\hat{z})$

Causa encerrada por cilindro gaussiano

Para $z<0$ va a la $|z|$ y para $z>0$ va para el otro.

Para $|z| < T/2$ (dentro): $E = \frac{BAz^2}{2\varepsilon_0 A} \Rightarrow E = \frac{Bz^2}{2\varepsilon_0}(\pm\hat{z})$

∴ $\vec{E}_I = -\frac{BT^2}{8\varepsilon_0}\hat{z}$; $\vec{E}_{II} = \frac{Bz^2}{2\varepsilon_0}(\pm\hat{z})$; $\vec{E}_{III} = \frac{BT^2}{8\varepsilon_0}\hat{z}$

Depende si estoy en $z>0$ o $z<0$.

¡Siempre dentro del bloque!