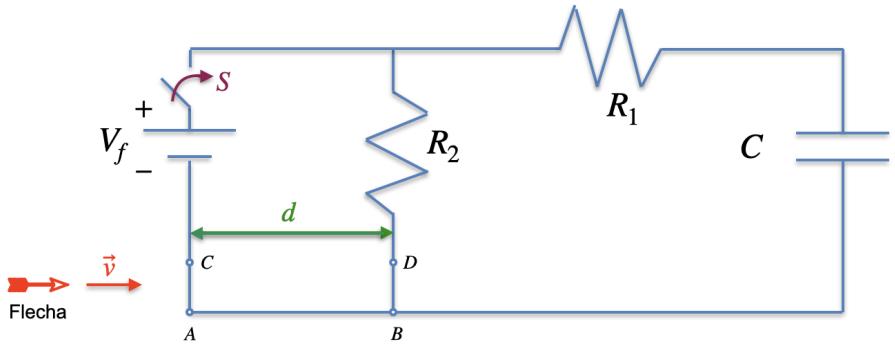
Interrogación 2

Fecha: 09 de junio del 2025

1. El circuito de la figura se usa para medir la rapidez de la flecha. En la práctica $V_f = 24\,V$, $C = 20\,pF$, $R_1 = 2\,M\Omega$, $R_2 = 3\,M\Omega$, y $d = 69\,cm$. En todos los cálculos numéricos mantenga 3 cifras significativas.



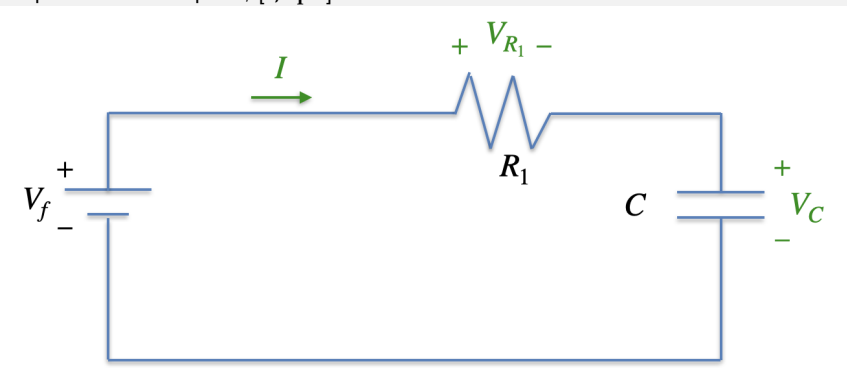
a) (2 pts.) Cuando se cierra el interruptor S el condensador esta totalmente descargado y la flecha se encuentra a la izquierda del circuito. Explique lo que sucede con el condensador. ¿Cuanto tiempo debe transcurrir para que el condensador quede a 0,1 % de su carga máxima? Entregue primero una fórmula algebráica para el tiempo, y luego evalúe con los valores indicados antes. Considere la aproximación $\ln 1000 \approx 6,9$.

b) (2 pts.) En el instante $t = 0$ la flecha corta el circuito en la sección AC (asuma que el condensador tiene en ese momento su carga máxima). Explique lo que sucede con el condensador. Calcule su voltaje en función del tiempo.

c) (2 pts.) En un instante posterior $t > 0$ la flecha corta la sección BD. Explique lo que sucede con el condensador. Si el voltaje final del condensador es V_C^{fin} (voltaje en el momento del corte) encuentre la rapidez de la flecha. Entregue primero una fórmula algebráica para la rapidez, y luego evalúe con los valores indicados antes. Suponga que $V_C^{fin} = V_C^{max}/2$ (donde V_C^{max} es el voltaje máximo del condensador), y use que $\ln 2 \approx 0,69$.

Solución:

a) Cuando se cierra el interruptor S el condensador comienza a cargarse. La fuente le entrega la carga necesaria a través de la resistencia R_1 **[0,4 pts]**. La resistencia R_2 es irrelevante y podemos ignorarla. Si lo hacemos, la parte del circuito que nos interesa queda, **[0,2 pts]**



La regla de Kirchhoff de voltaje nos dice que,

$$V_{R_1} + V_C = V_f \qquad [\mathbf{0,2pts}] \tag{1}$$

■

La regla de Kirchhoff de corrientes es trivial porque no hay nodos. Hay una sola corriente I que es igual a la corriente de la resistencia y es igual a la corriente del condensador.
Las relaciones básicas para una resistencia y un condensador son,

$$V_{R_1} = R_1 I \qquad [\mathbf{0,1pt}] \tag{2}$$

$$Q_C = C V_C \quad \Rightarrow \quad I = C\frac{dV_C}{dt} \qquad [\mathbf{0,1pt}] \tag{3}$$

Reemplazando en la ecuación (1),

$$R_1 C\frac{dV_C}{dt} + V_C = V_f \qquad [\mathbf{0,1pt}] \tag{4}$$

cuya solución es el voltaje de un condensador cargándose,

$$V_C = V_f(1 - e^{-t/(R_1 C)}) \qquad [\mathbf{0,2pts}] \tag{5}$$

El voltaje máximo que el condensador puede adquirir es el mismo voltaje de la fuente, V_f, pero se demora tiempo infinito en hacerlo. El voltaje en el condensador quedará a $0,1\,\%$ de V_f después de un tiempo T tal que el primer paréntesis redondo es igual a 0,999. Es decir,

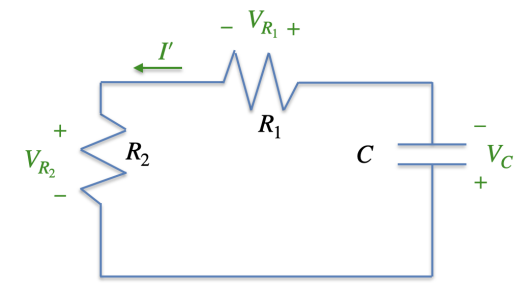
$$T = R_1 C \ln 1000 \qquad [\mathbf{0,2pts}] \tag{6}$$

Evaluando numéricamente resulta,

$$T \approx (2\times 10^6\,\Omega)\cdot(20\times 10^{-12}\,F)\cdot 6,9 \approx 2,76\times 10^{-4}\,s \qquad [\mathbf{0,5pts}] \tag{7}$$

Lo que nos indica que debemos esperar mucho menos de un segundo para que el condensador quede a 0,1 % de su voltaje máximo.

b) Cuando la flecha corta la sección AC la fuente queda desconectada del circuito. Con la fuente desconectada el circuito queda **[0,3 pts]**,



La sección BD aún no ha sido cortada por la flecha. El condensador, que se encuentra totalmente cargado, comienza a descargarse a través de las resistencias R_1 y R_2 en serie **[0,5 pts]**. La regla de voltaje de Kirchhoff dice,

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_C = 0 \qquad [\mathbf{0,2pts}] \tag{8}$$

La regla de corrientes de Kirchhoff es nuevamente irrelevante pues hay solamente una corriente I'. Las relaciones básicas para las resistencias y el condensador son,

$$V_{R_1} = R_1 I' \qquad [\mathbf{0,1pt}] \tag{9}$$

$$V_{R_2} = R_2 I' \qquad [\mathbf{0,1pt}] \tag{10}$$

$$Q_C = C V_C \quad \Rightarrow \quad I' = C\frac{dV_C}{dt} \qquad [\mathbf{0,2pt}] \tag{11}$$

Reemplazando en la ecuación (8),

$$(R_1 + R_2)C\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \qquad [\mathbf{0,2pts}] \tag{12}$$

cuya solución es el voltaje de un condensador descargándose,

$$V_C = V_f e^{-t/(R_1+R_2)C} \qquad [\mathbf{0,4pts}] \tag{13}$$

c) Cuando la flecha corta la sección BD, el condensador deja de descargarse y su voltaje se congela en el valor que tenía **[0,5 pts]**. El tiempo de vuelo de la flecha entre ambos cortes, t_v, queda dado por el voltaje final del condensador de acuerdo a,

$$t_v = (R_1 + R_2)C \ln\frac{V_C^{max}}{V_C^{fin}} = (R_1 + R_2)C \ln\frac{V_f}{V_C^{fin}} \qquad [\mathbf{0,5pts}] \tag{14}$$

La rapidez de la flecha es entonces,

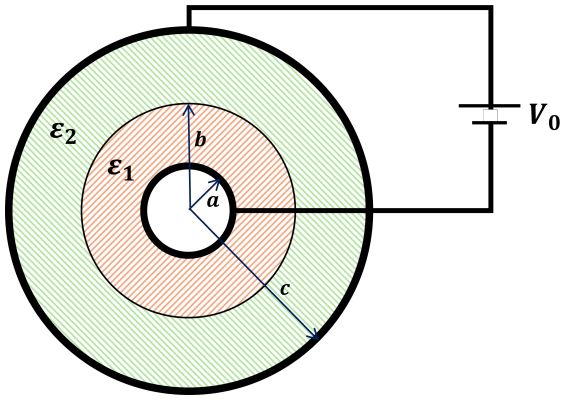
$$v_{flecha} = \frac{d}{(R_1 + R_2)C \ln \frac{V_f}{V_C^{fin}}} \qquad [\mathbf{0,5pts}] \tag{15}$$

Evaluando numéricamente,

$$v_{flecha} = \frac{0,69\,m}{(5 \times 10^6\,\Omega) \cdot (20 \times 10^{-12}\,F) \ln 2} \approx 10^4\,\frac{m}{s} \qquad [\mathbf{0,5pts}] \tag{16}$$

■

2. Considere un cable coaxial compuesto por dos materiales dieléctricos lineales e isotrópicos, con permitividades ε_1 y ε_2, entre dos conductores de espesor despreciable, sobre los cuales se aplica una diferencia de potencial V_0, como se muestra en la figura.



Determine:

a) (2 pts.) El vector desplazamiento en todo el espacio.

b) (1 pts.) El campo eléctrico en todo el espacio.

c) (2 pts.) El vector de polarización en todo el espacio.

d) (1 pts.) Las densidades de carga superficiales en cada interfaz, teniendo en cuenta que:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Solución:
Nota: Aqui estamos evaluando el caldulo de $\vec{D}$ y la relación entre V_0 y Q.
a) Tenemos un cable coaxial compuesto por dos dieléctricos: El primero con permeabilidad ε_1 en la región $r \in [a, b]$ y el segundo con permeabilidad ε_2 en la región $r \in [b, c]$. Y dos conductores (al centro y el exterior del cable) conectados a una diferencia de potencial V_0. Usando la forma integral de la ley de Gauss en medios materiales:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{libre}} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Y recordando que,

$$\vec{D}(r) = \varepsilon \vec{E}(r)$$

En coordenadas cilíndricas, se considera una superficie gaussiana de forma cilíndrica de radio r y longitud L, donde el campo eléctrico (y por tanto $\vec{D}$) es radial y depende solo de r: (0.3 pts.) por la definición de la superficie Gaussiana

$$\vec{D}(r) = D_r(r)\,\hat{r}$$

El diferencial de área sobre la superficie lateral del cilindro es:

$$d\vec{A} = \hat{r}\, r\, d\phi\, dz$$

Entonces, la integral de superficie se convierte en:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} D_r(r)\, r\, d\phi\, dz \\ &= D_r(r) r \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \\ &= D_r(r) r (2\pi) L \end{aligned}$$

■

Igualando con la carga libre encerrada:

$$D_r(r) \cdot 2\pi r L = Q_{\text{libre}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_r(r) = \frac{Q_{\text{libre}}}{2\pi r L}}$$

Y por tanto, el vector desplazamiento eléctrico es:

$$\boxed{\vec{D}(r) = \frac{Q_{\text{libre}}}{2\pi r L}\,\hat{r}} \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

Por la aplicación de la ley de Gauss
Así, para las distintas regiones:

- Para $r < a$:

$$Q_{\text{libre}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0 = 0 \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

- Para $r \in [a, b]$:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow D(r) \cdot 2\pi r L = Q \Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{Q}{2\pi r L}\,\hat{r}} \quad \text{para } a < r < b$$

$$\vec{D}_1 = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 r L}\hat{r}$$

- Para $r \in [b, c]$:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow D(r) \cdot 2\pi r L = Q \Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{Q}{2\pi r L}\,\hat{r}} \quad \text{para } b < r < c$$

$$\vec{D}_2 = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 r L}\hat{r}$$

- Para $r > c$:

$$Q_{\text{libre}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0 = 0 \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Para expresar la carga libre Q en función de la diferencia de potencial V_0, integramos el campo eléctrico a lo largo del eje radial, desde el conductor interior (a potencial cero) hasta el conductor exterior (a potencial V_0):

$$\Delta V = V_0 = -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\left(\int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}\right) \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Como el campo eléctrico es radial y su magnitud depende sólo de r, sustituimos las expresiones obtenidas anteriormente para cada región:

$$V_0 = -\left(\int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L r}\,dr + \int_b^c \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 L r}\,dr\right) = -\frac{Q}{2\pi L}\left(\frac{\ln(b/a)}{\varepsilon_1} + \frac{\ln(c/b)}{\varepsilon_2}\right)$$

Finalmente, despejamos Q en función de V_0:

$$\boxed{Q = -\frac{2\pi L V_0 \varepsilon_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)}} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Entonces el vector desplazamiento electrico está dado por:

$$\boxed{\vec{D}(r) = \frac{V_0 \varepsilon_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{r}\,\hat{r} \quad \text{para } a < r < c} \qquad \text{(0.4pts.)}$$

Nota: Si el estudiante expresa $(\vec{D}, \vec{E}, \vec{P})$ en función de la carga libre en lugar de la diferencia de potencial, no se deben descontar puntos, ya que el calculo de la relación entre V_0 y Q ya tiene puntaje asignado ■

b) Usando la relación:

$$\vec{D}(r) = \varepsilon \vec{E}(r) \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Y reescribiendo el campo eléctrico en función de V_0:

- Para $r < a$:

$$\boxed{\vec{E}_0 = 0} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

- Para $a < r < b$ (Dieléctrico ε_1):

$$\boxed{\vec{E}_1(r) = -\frac{V_0 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \cdot \frac{1}{r}\hat{r}} \quad \text{para } a < r < b \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

- Para $b < r < c$ (Dieléctrico ε_2):

$$\boxed{\vec{E}_2(r) = -\frac{V_0 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \cdot \frac{1}{r}\hat{r}} \quad \text{para } b < r < c \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

- Para $r > c$:

$$\boxed{\vec{E}_0 = 0} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

■

c) En dieléctricos lineales e isotrópicos, el vector de polarización se relaciona con el campo eléctrico mediante:

$$\vec{P}(r) = \vec{D}(r) - \varepsilon_0 \vec{E}(r) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \vec{E}(r) \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

Por tanto, en cada región:

- Para $r < a$: En esta región se encuentra el conductor interior. Como se trata de un conductor ideal en equilibrio electrostático:

$$\vec{E}(r) = 0, \quad \vec{D}(r) = 0$$

Por lo tanto, el vector de polarización también se anula:

$$\boxed{\vec{P}(r) = 0} \quad \text{para } r < a \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

- Para $a < r < b$: Sabemos que:

$$\vec{E}_1(r) = -\frac{V_0 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{r}\hat{r}$$

y la permitividad en esta región es ε_1, por lo tanto:

$$\vec{P}_1(r) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\, \vec{E}_1(r) \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

$$\boxed{\vec{P}_1(r) = -\frac{V_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{r}\hat{r}} \quad \text{para } a < r < b \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

- Para $b < r < c$:
El campo eléctrico en esta región es:

$$\vec{E}_2(r) = -\frac{V_0 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{r}\hat{r}$$

y la permitividad local es ε_2, por lo que:

$$\vec{P}_2(r) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\, \vec{E}_2(r) \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

$$\boxed{\vec{P}_2(r) = -\frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{r}\hat{r}} \quad \text{para } b < r < c \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

- Para $r > c$: No hay dieléctrico en esta región, por lo tanto,

$$\boxed{\vec{P}(r) = 0} \quad \text{para } r > c \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

■

d) La densidad de carga superficial de polarización en una interfaz se define como el salto de la componente normal del vector polarización a través de la superficie:

$$\sigma_p = \left[\vec{P}\cdot\hat{n}\right] = \vec{P}_{\text{afuera}}\cdot\hat{n}\Big|_{\text{interfaz}} - \vec{P}_{\text{adentro}}\cdot\hat{n}\Big|_{\text{interfaz}}$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal unitario orientado hacia afuera de la superficie. Esta expresión se aplica a cada una de las interfaces del sistema para calcular las densidades de carga superficial inducida por la polarización en:

- $r = a$: interfaz entre el conductor interior y el dieléctrico 1,
- $r = b$: interfaz entre los dos dieléctricos,
- $r = c$: interfaz entre el dieléctrico 2 y el conductor exterior.
- En $r = a$: interfaz entre conductor interno y dieléctrico ε_1
  Aplicamos la definición general de densidad superficial de polarización como el salto del vector $\vec{P}$:

$$\sigma_{p,a} = (\vec{P}_{\text{afuera}} - \vec{P}_{\text{adentro}})\cdot\hat{n}\Big|_{r=a}$$

  Como el conductor interior está dentro de $r < a$, y en los conductores no hay polarización, se tiene:

$$\vec{P}_{\text{adentro}} = 0$$

$$\vec{P}_{\text{afuera}} = \vec{P}_1(a) = -\frac{V_0(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\frac{1}{a}\hat{r}$$

  Luego:

$$\sigma_{p,a} = \vec{P}_1(a)\cdot\hat{r} = -\frac{V_0(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\frac{1}{a}$$

  Finalmente, expresamos el resultado como:

$$\boxed{\sigma_{p,a} = -\frac{V_0(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\frac{1}{a}} \qquad (0.3 \text{ pts.})$$

- $r = b$: interfaz entre los dos dieléctricos,
  La densidad de carga superficial de polarización se calcula como el salto de la componente normal del vector polarización en la interfaz:

$$\sigma_{p,b} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\hat{r}\Big|_{r=b}$$

  Evaluamos explícitamente ambas expresiones en $r = b$:

$$\vec{P}_1(b) = -\frac{V_0(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\frac{1}{b}\hat{r}$$

$$\vec{P}_2(b) = -\frac{V_0(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\varepsilon_1}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\frac{1}{b}\hat{r}$$

  Luego, el salto es:

$$\sigma_{p,b} = \vec{P}_2(b)\cdot\hat{r} - \vec{P}_1(b)\cdot\hat{r} = \frac{V_0}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\frac{1}{b}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\varepsilon_2 - (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\varepsilon_1\right]$$

  Desarrollando el numerador:

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\varepsilon_2 - (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_0\varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

  Entonces, el resultado final es:

$$\boxed{\sigma_{p,b} = \frac{V_0\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\frac{1}{b}} \qquad (0.4\text{pts.})$$

■

- $r = c$: interfaz entre el dieléctrico 2 y el conductor exterior.
  Usamos nuevamente la definición de densidad superficial de polarización:

$$\sigma_{p,c} = (\vec{P}_{\text{afuera}} - \vec{P}_{\text{adentro}}) \cdot \hat{n}\Big|_{r=c}$$

  Aquí, el dieléctrico está en $r < c$, y el conductor exterior está en $r > c$, por lo tanto:

$$\vec{P}_{\text{adentro}} = \vec{P}_2(c) = -\frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{c}\hat{r} \quad , \quad \vec{P}_{\text{afuera}} = 0$$

  Luego:

$$\sigma_{p,c} = \left(0 - \vec{P}_2(c)\right) \cdot \hat{r} = \frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{c}$$

  Finalmente, el resultado es:

$$\boxed{\sigma_{p,c} = \frac{V_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)} \frac{1}{c}} \qquad (0.3 \text{ pts.})$$

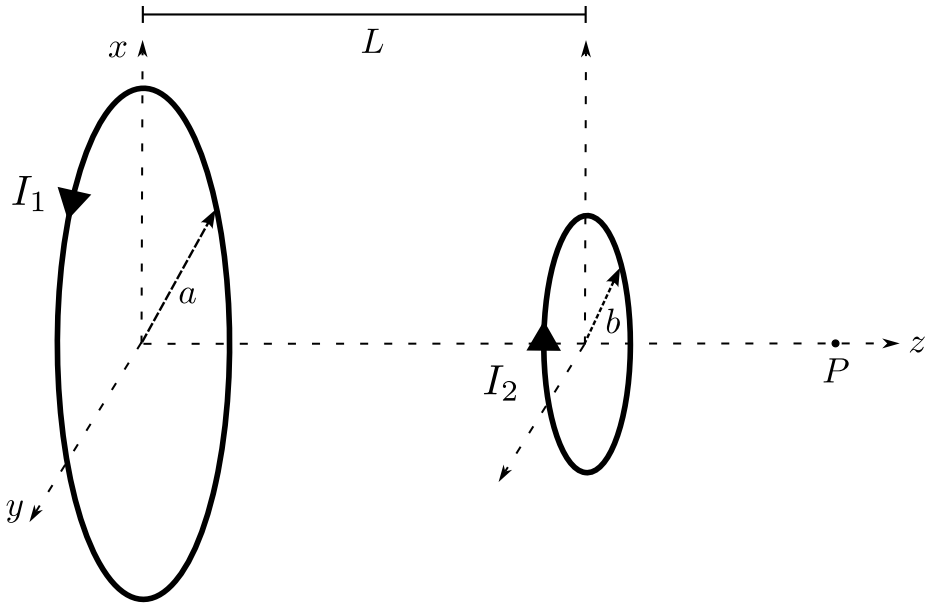
Nota: Si el estudiante no expresa $\sigma_p = (\vec{P}_{\text{afuera}} - \vec{P}_{\text{adentro}}) \cdot \hat{n}\Big|_{r=interfaz}$, pero sí calcula correctamente σ_p en ambos lados de la interfaz y entrega las dos densidades superficiales con sus signos adecuados, entonces no corresponde descontar puntaje. Sino se evalúa en la interfaz, descontar 0.1pts. ■

3. Dos espiras de radios a y b respectivamente, con $b < a$, están colocadas en forma perpendicular a un eje común z. Las espiras portan corrientes estables I_1 e I_2 en distintos sentidos sobre cada espira, y sus centros están separados una distancia L , tal como se muestra en la figura.

   a) (3 pts.) Encuentre una expresión para el campo magnético generado por una espira de radio R a lo largo del eje z (punto P).

   b) (2 pts.) Encuentre una expresión para el campo magnético resultante de ambas espiras a lo largo del eje z (punto P).

   c) (1 pts.) Suponga que es posible regular la corriente I_2 en la espira de radio b. Encuentre el valor de I_2 para que el campo en $z = L/2$ sea igual a cero.



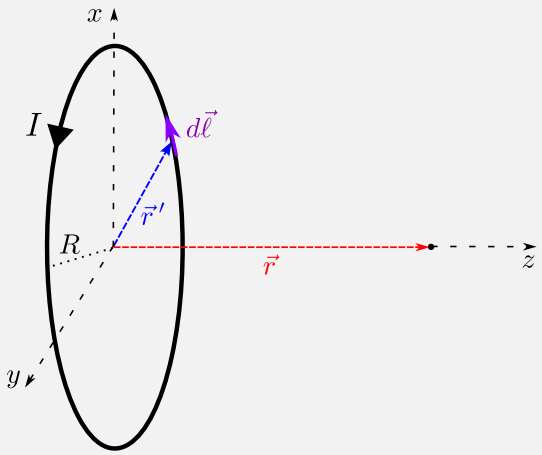
Solución:

a) Primero calcularemos el campo generado por una espira de radio R a una distancia z sobre el eje que pasa por su centro. Usando Biot-Savart, de acuerdo a la figura, tenemos

$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

$$\vec{r}\,' = R\hat{\rho} = R(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})\,, \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

$$d\vec{\ell} = Rd\theta\,\hat{\theta} = Rd\theta(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})\,. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$



■

Luego, el campo vendrá dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{IRd\theta\hat{\theta}\times(z\hat{k}-R\hat{\rho})}{(z^2+R^2)^{3/2}} \quad \text{(0.4 pts.)}$$

Usando las relaciones

$$\hat{\theta}\times\hat{k} = \hat{\rho}\,, \quad \text{(0.3 pts.)}$$

$$\hat{\theta}\times\hat{\rho} = -\hat{k}\,. \quad \text{(0.3 pts.)}$$

Tenemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\left[\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\hat{\rho}d\theta + \frac{R}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta\,\hat{k}\right]. \quad \text{(0.4 pts.)}$$

Acá, vemos que

$$\int_0^{2\pi}\hat{\rho}d\theta = \int_0^{2\pi}(\cos\theta\,\hat{\imath}+\sin\theta\,\hat{\jmath})d\theta = 0\,. \quad \text{(0.4 pts.)}$$

Entonces, el campo producido por el anillo será,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{k}\,. \quad \text{(0.6 pts.)}$$

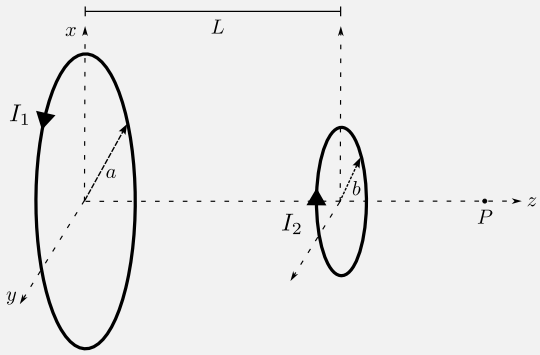
Este campo apunta en la dirección de z positivo, incluso cuando $z<0$. ■

b) Ahora calculamos el campo resultante de la superposición de ambas espiras de radios a y b, con corrientes I_1 e I_2, respectivamente (0.2 pts.). Estas corrientes circulan en sentidos contrarios. Ubicamos el origen en la primera espira (derecha), con $R=a$, por lo que

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{k}\,. \quad \text{(0.2 pts.)}$$

Para la segunda espira, tenemos $R=b$ y la corriente en el otro sentido, por lo que el campo apuntará en $-\hat{k}$. Además, su origen está desplazado en L (0.2 pts.), por lo tanto

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2 b^2}{2[(z-L)^2+b^2]^{3/2}}\,\hat{k}\,. \quad \text{(0.8 pts.)}$$



Luego, el campo total en el punto P sobre el eje z será,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_1 a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{[(z-L)^2+b^2]^{3/2}}\right)\hat{k} \quad \text{(0.6 pts.)}$$

■

c) Buscamos el valor de I_2 tal que $B(z=L/2)=0$ (0.2 pts.), así

$$0 = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_1 a^2}{[(L/2)^2+a^2]^{3/2}} - \frac{I_2 b^2}{[(L/2)^2+b^2]^{3/2}}\right) \quad \text{(0.2 pts.)}$$

Despejando I_2,

$$I_2 = I_1\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[\frac{L^2+4b^2}{L^2+4a^2}\right]^{3/2} \quad \text{(0.6 pts.)}$$

■