Solución Taller I1

23 de Septiembre 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

0.0.1 "I1 2021-2", Problema 2, Facultad de Física

El alambre de la figura es infinito y tiene una densidad de carga lineal constante λ. Encuentre el campo eléctrico en el punto O.

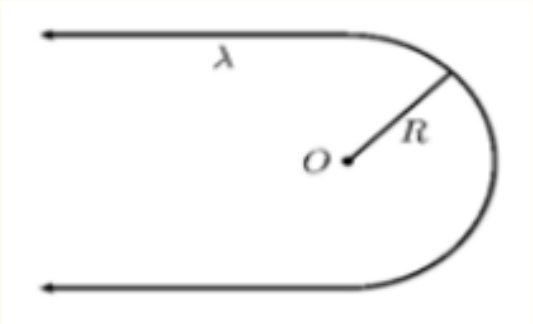


Figura 1. Esquema sobre el alambre.

Solución

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el campo eléctrico en el punto O, el cual puede ser expresado como la suma de los campos generados por los 3 segmentos mediante principio de superposición. Como la figura no posee ninguna simetría apta para la Ley de Gauss, se aplicará la definición de campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'|^3}\,\lambda(\mathbf{x}\,')\,dl'$$

Se nota que se usa la integral simple en virtud de la naturaleza del problema, puesto que el alambre se puede describir con solo una componente variable en coordenadas cilíndricas.

Paso 1: Campo Eléctrico Segmento Superior - $\mathbf{E}_1$

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el punto O y se utilizarán coordenadas cartesianas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ parte en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo:

$$\mathbf{r} = 0$$

Como el centro de referencia coincide con el punto a calcular el vector es nulo.

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ parte en el origen y recorre todo el cuerpo con carga:

$$\mathbf{r}\,' = x\hat{\mathbf{x}} + R\hat{\mathbf{y}}, \quad x \in [-\infty, 0]$$

Donde "R" es el radio de la semicircunferencia.

Con lo anterior, también se construyen las demás componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = -(x\hat{\mathbf{x}} + R\hat{\mathbf{y}})$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = \sqrt{x^2 + R^2}$$

Considerando que la densidad de carga es lineal y que la única componente variable para el alambre es x:

$$dq(\mathbf{x}\,') = \lambda(\mathbf{x}\,')\ dl' = \lambda\ dx$$

Para llegar a lo anterior se utilizó el diferencial de línea para cartesianas, omitiendo las componentes constantes y el sentido vectorial.

Finalmente, se utiliza la definición de campo eléctrico considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|^3}\ \lambda(\mathbf{x}\,')\ dl' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{-(x\hat{\mathbf{x}} + R\hat{\mathbf{y}})}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\ \lambda\ dx\end{aligned}$$

Paso 2: Campo Eléctrico Segmento Central - $\mathbf{E}_2$

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el punto O y se utilizarán coordenadas cilíndricas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ parte en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo:

$$\mathbf{r} = 0$$

Como el centro de referencia coincide con el punto a calcular el vector es nulo.

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ parte en el origen y recorre todo el cuerpo con carga:

$$\mathbf{r}\,' = R\hat{\mathbf{r}}, \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Donde "R" es el radio de la semicircunferencia y "$\hat{\mathbf{r}}$" la componente radial en coordenadas cilíndricas.

Con lo anterior, también se construyen las demás componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = -R\hat{\mathbf{r}}$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = R$$

Considerando que la densidad de carga es lineal y que la única componente variable para el alambre es θ:

$$dq(\mathbf{x}\,') = \lambda(\mathbf{x}\,')\ dl' = \lambda \cdot R\ d\theta$$

Para llegar a lo anterior se utilizó el diferencial de línea para cilíndricas, omitiendo las componentes constantes y el sentido vectorial.

Finalmente, se utiliza la definición de campo eléctrico considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'|^3}\,\lambda(\mathbf{x}\,')\,dl' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-R\hat{\mathbf{r}}}{R^3}\,\lambda\cdot R\,d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\lambda\hat{\mathbf{r}}}{R}\,d\theta \\
&= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{\mathbf{r}}\,d\theta
\end{aligned}$$

Utilizando que $\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}\,d\theta \\
&= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}}\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}\,d\theta\Big) \\
&= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\Big((\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos\theta\,\hat{\mathbf{y}})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big) \\
&= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\Big((\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}))\,\hat{\mathbf{x}} - (\cos\frac{\pi}{2} - \cos(-\frac{\pi}{2}))\,\hat{\mathbf{y}}\Big) \\
&= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot 2\,\hat{\mathbf{x}} \\
&= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\hat{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

Paso 3: Campo Eléctrico Segmento Inferior - $\mathbf{E}_3$

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el punto O y se utilizarán coordenadas cartesianas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ parte en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo:

$$\mathbf{r} = 0$$

Como el centro de referencia coincide con el punto a calcular el vector es nulo.

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ parte en el origen y recorre todo el cuerpo con carga:

$$\mathbf{r}\,' = x\hat{\mathbf{x}} - R\hat{\mathbf{y}}, \quad x \in [-\infty, 0]$$

Donde "R" es el radio de la semicircunferencia.

Con lo anterior, también se construyen las demás componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = -(x\hat{\mathbf{x}} - R\hat{\mathbf{y}})$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = \sqrt{x^2 + R^2}$$

Considerando que la densidad de carga es lineal y que la única componente variable para el alambre es x:

$$dq(\mathbf{x}\,') = \lambda(\mathbf{x}\,')\ dl' = \lambda\ dx$$

Para llegar a lo anterior se utilizó el diferencial de línea para cartesianas, omitiendo las componentes constantes y el sentido vectorial.

Finalmente, se utiliza la definición de campo eléctrico considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|^3}\ \lambda(\mathbf{x}\,')\ dl' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{-(x\hat{\mathbf{x}} - R\hat{\mathbf{y}})}{(x^2+R^2)^{3/2}}\ \lambda\ dx\end{aligned}$$

Paso 4: Campo Eléctrico - Principio de Superposición E

Finalmente, y mediante el principio de superposición, el campo eléctrico en el punto O será la suma de los campos generados por los distintos segmentos:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{-(x\hat{\mathbf{x}} + R\hat{\mathbf{y}})}{(x^2+R^2)^{3/2}}\ \lambda\ dx + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{-(x\hat{\mathbf{x}} - R\hat{\mathbf{y}})}{(x^2+R^2)^{3/2}}\ \lambda\ dx \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{-2x\hat{\mathbf{x}}}{(x^2+R^2)^{3/2}}\ \lambda\ dx + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{-2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\ dx\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{-2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R^2} \frac{1}{2\beta^{3/2}}\ d\beta\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{\beta}}\right)\Bigg|_{\infty}^{R^2}\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{R^2}} - \frac{-2}{\sqrt{\infty}}\right)\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-2}{\sqrt{R^2}}\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \hat{\mathbf{x}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Notar que se realizó un cambio de variable $\beta = x^2 + R^2 \ \rightarrow\ d\beta = 2x\ dx$.
También, y como $R > 0$, se puede considerar que $\sqrt{R^2} = |R| = R$.

Nota: El tratamiento de las integrales también se puede realizar observando la simetría de la figura, con el objetivo de obviar la componente $\hat{\mathbf{y}}$.

0.0.2 "Ejercicios Teoría Electromagnética ", 5.6.9, Fabián Cádiz

Un alambre cuya densidad lineal de carga es λ se extiende en el eje z desde $z = -d$ hasta $z = d$. Despreciando efectos gravitacionales:

a) Calcule el potencial en un punto $z > d$ sobre el eje del alambre.

b) ¿Cuál es el cambio de energía potencial de un electrón si se mueve de $z = 4d$ hasta $z = 3d$?

c) Si el electrón parte del reposo desde $z = 4d$, ¿cuál es la velocidad en $z = 3d$?

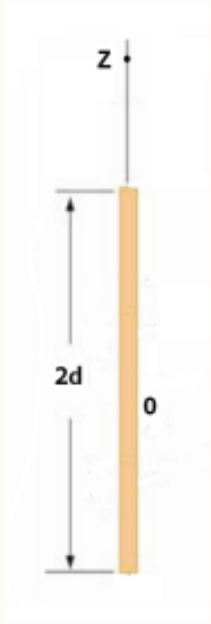


Figura 2. Esquema sobre el alambre.

Solución a)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el potencial eléctrico en un punto $z > d$ sobre el eje del alambre. Como la figura no posen ninguna simetría apta para la Ley de Gauss, se aplicará la definición de potencial eléctrico para distribuciones continuas de carga:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|}\, \lambda(\mathbf{x}\,')\, dl'$$

Se nota que se usa la integral simple en virtud de la naturaleza del problema, puesto que el alambre se puede describir con solo una componente variable en coordenadas cartesianas.

Paso 2: Potencial Eléctrico Alambre - Componentes Integral

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el centro del alambre y se utilizarán coordenadas cartesianas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ inicia en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el potencial:

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}, \quad z \in [d, \infty[$$

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ inicia en el origen y recorre todo el cuerpo con carga:

$$\mathbf{r}\,' = z'\hat{\mathbf{z}}, \quad z' \in [-d, d]$$

Se siguen determinando componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = z\hat{\mathbf{z}} - z'\hat{\mathbf{z}}$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = z + z'$$

Considerando que la densidad de carga es lineal y que la única componente variable para el alambre es z:

$$dq = \lambda \, dz'$$

Para llegar a lo anterior se utilizó el diferencial de línea para cartesianas, omitiendo las componentes constantes y el sentido vectorial.

Paso 3: Potencial Eléctrico - Alambre

Finalmente, se utiliza la definición de potencial eléctrico para el alambre considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|} \, \lambda(\mathbf{x}\,') \, dl' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-d}^{d} \frac{1}{(z + z')} \cdot \lambda \, dz' \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z-d}^{z+d} \frac{1}{\beta} \, d\beta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \, (\ln \beta)\Big|_{z-d}^{z+d} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} (\ln(z + d) - \ln(z - d)) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z + d}{z - d}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Notar que se realizó un cambio de variable $\beta = z + z' \;\rightarrow\; d\beta = dz'$.

Solución b)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el cambio de energía potencial ΔU de un electrón que se mueve desde $z = 4d$ hasta $z = 3d$. La energía potencial que posee una carga puntual se puede escribir como:

$$U = qV(\mathbf{x})$$

Se conoce el potencial que afecta a la carga,
por lo que solo queda reemplazar por los valores requeridos.

Paso 1: Cambio Energía Potencial - ΔU

El cambio en la energía potencial de un electrón (i.e $q = -e$) que se mueve desde $z = 4d$ hasta $z = 3d$ vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= U(z = 3d) - U(z = 4d) \\
&= qV(z = 3d) - qV(z = 4d) \\
&= -e(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{3d + d}{3d - d}) - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{4d + d}{4d - d})) \\
&= \frac{-e\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (\ln 2 - \ln \frac{5}{3}) \\
&= \frac{-e\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{6}{5})
\end{aligned}$$

Solución c)

Paso Único: Velocidad Electrón - $v(z = 3d)$

Se pide determinar la velocidad del electrón en $z = 3d$ si parte del reposo en $z = 4d$. Mediante el principio de conservación de energía se tiene que:

$$\begin{aligned}
E(z = 3d) &= E_(z = 4d) \\
U(z = 3d) + K(z = 3d) &= U(z = 4d) + K(z = 4d)
\end{aligned}$$

Donde U y K son la energía potencial y cinética del electrón, respectivamente.
Como este parte del reposo (i.e $K(z = 4d) = 0$):

$$\begin{aligned}
U(z = 3d) + K(z = 3d) &= U(z = 4d) \\
K(z = 3d) &= U(z = 4d) - U(z = 3d) \\
K(z = 3d) &= -\Delta U
\end{aligned}$$

Reescribiendo la energía cinética como $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_e v^2(z = 3d) &= -\Delta U \\
v^2(z = 3d) &= \frac{2}{m_e} \cdot -\Delta U \\
v(z = 3d) &= \sqrt{\frac{\lambda e}{2\pi\varepsilon_0 m_e} \ln(\frac{6}{5})}
\end{aligned} \tag{2}$$

0.0.3 "Problemas Resueltos de Electromagnetismo", 4.13, Rodrigo Chi

Una carga $+Q$ se encuentra inserta en un alambre conductor de largo L y radio R_0 muy pequeño. Un cascarón cilíndrico conductor neutro de radios internos R_1 y externo R_2 y largo L es ubicado simétricamente alrededor del alambre. Tener en cuenta que $R_0 \ll R_1, R_2 \ll L$.

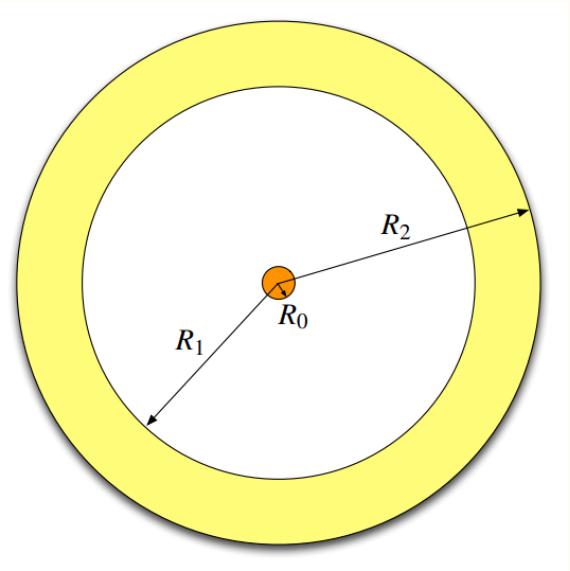


Figura 3. Esquema sobre la configuración en estudio.

Ahora, deposite una carga $-Q$ en el cascarón cilíndrico. Calcule:

a) La densidad lineal de carga λ del alambre.

b) La densidad superficial de carga en la capa interna y externa del cascarón.

c) El campo eléctrico en todo el espacio.

d) La diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro.

e) La capacitancia del sistema.

f) La capacidad C' si ahora el alambre tiene carga $2Q$ y el cascarón tiene carga $-2Q$. Explique su resultado basado en la definición de capacitancia.

Solución a)

Paso Único: Densidad de Carga - λ

La carga total del alambre estará determinada por una integral simple en cartesianas:

$$Q = \int_L \lambda \, dl$$

Como la densidad de carga del alambre es uniforme,

se puede tratar como una constante y sale de la integral.
Su largo es L y su carga total es Q:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda \int_0^L dz \\ Q &= \lambda \cdot L \\ \lambda &= \frac{Q}{L} \end{aligned} \tag{3}$$

Solución b) y c)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar las cargas en las superficies interior y exterior del cascarón (i.e $r = R_1$ y $r = R_2$). Como se está hablando de un cilindro, se deberá aplicar estratégicamente Ley de Gauss utilizando una cilindro coaxial de altura "L" y radio "r" arbitrario:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

El cascarón está cargado y experimentará un efecto
de polarización debido al alambre con carga Q.
Luego, la carga en la superficie estará determinada por una integral doble en cilíndricas:

$$Q = \iint_S \sigma \, dS$$

Paso 1: Carga Superficial - Q_{R_1}

En primer lugar, se calculará estratégicamente el campo eléctrico mediante la Ley de Gauss en la región $R_1 < r < R_2$:

$$\oint \vec{E}_{R_1<r<R_2} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

El cascarón cilíndrico es conductor, por lo que el campo eléctrico
en su interior será nulo y su carga solo se ubicará en su superficie:

$$\vec{E}_{R_1<r<R_2} = 0 \tag{4}$$

Con lo anterior, la carga encerrada (en $r < R_2$) debe ser igual a 0:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= 0 \\ Q + Q_{R_1} &= 0 \\ Q_{R_1} &= -Q \end{aligned} \tag{5}$$

Paso 2: Densidad Carga Superficial - σ_{R_1}

Así, la carga en la superficie $r = R_1$ estará determinada por una integral doble en cilíndricas:

$$Q_{R_1} = \iint_S \sigma \, dS$$

Como la densidad de carga del cascarón es uniforme,
se puede tratar como una constante y sale de la integral:

$$\begin{aligned} -Q &= \sigma_{R_1} \int_0^L \int_0^{2\pi} R_1 \; d\theta dz \\ -Q &= \sigma_{R_1} \cdot 2\pi R_1 L \\ \sigma_{R_1} &= -\frac{Q}{2\pi R_1 L} \end{aligned} \tag{6}$$

Paso 4: Carga Superficial - Q_{R_2}

El cascarón cilíndrico ubicado entre R_1 y R_2 está cargado con carga $-Q$ y es conductor, es decir, su carga solo se ubicará en sus superficies. Mediante el principio de conservación de carga se obtiene que:

$$\begin{aligned} Q_{R_1} + Q_{R_2} &= -Q \\ -Q + Q_{R_2} &= -Q \\ Q_{R_2} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Paso 5: Densidad Carga Superficial - σ_{R_2}

Así, la carga en la superficie $r = R_2$ estará determinada por una integral doble en cilíndricas:

$$Q = \iint_S \sigma \; dS$$

Como su carga total es 0, su densidad de carga es nula:

$$\sigma_{R_2} = 0 \tag{8}$$

Nota: No es estrictamente necesario realizar la integral de superficie para determinar la densidad de carga. Como la densidad de carga es uniforme, basta con saber que se refería al área del manto de un cilindro de altura L y radio R_i, con $i = 1, 2$.

Solución e)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el campo eléctrico en todo el espacio. Como se está hablando de un alambre y cilindro, es posible aplicar Ley de Gauss utilizando un cilindro coaxial de altura "L" y de radio "r" arbitrario:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Además, y como se presentan "cortes visuales" relacionados con un cambio en la densidad de carga, se debe trabajar por intervalos: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$.

Paso 1: Ley de Gauss - $\vec{E}_{r<R_0}$

En primer lugar, se calculará el campo eléctrico mediante la Ley de Gauss en la región $r < R_0$:

$$\oint \vec{E}_{r<R_0} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

El alambre es conductor, por lo que el campo eléctrico en su interior será nulo y su carga solo se ubicará en su superficie:

$$\vec{E}_{r<R_0} = 0 \tag{9}$$

Paso 2: Ley de Gauss - $\vec{E}_{R_0<r<R_1}$

Ahora, se calculará el campo eléctrico mediante la Ley de Gauss en la región $R_0 < r < R_1$:

$$\oint \vec{E}_{R_0<r<R_1} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Se conoce que el campo solo posee componente radial.
Además, la carga encerrada será la carga total del alambre:

$$E_{R_0<r<R_1} \cdot \oint dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Ahora, la integral cerrada es en verdad la superficie del manto del cilindro gaussiano, pues el flujo es ortogonal a esta en todo momento:

$$\begin{aligned} E_{R_0<r<R_1} \cdot 2\pi r L &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E_{R_0<r<R_1} &= \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} \end{aligned} \tag{10}$$

Finalmente, y como el campo eléctrico es un vector, se aplica la componente radial:

$$\vec{E}_{R_0<r<R_1} = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0}\ \hat{r} \tag{11}$$

Paso 4: Ley de Gauss - $\vec{E}_{r>R_2}$

Por último, se calculará el campo eléctrico mediante la Ley de Gauss en la región $r > R_2$:

$$\oint \vec{E}_{r>R_2} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Se conoce que el campo solo posee componente radial.
Además, la carga encerrada será la carga total de la configuración:

$$E_{r>R_2} \cdot \oint dS = \frac{Q - Q}{\varepsilon_0} = 0$$

Como la configuración es eléctricamente neutra se obtiene que:

$$\vec{E}_{r>R_2} = 0 \tag{12}$$

Solución f)

Paso Único: Potencial Eléctrico - ΔV

Se pide determinar la diferencia de potencial que se encuentra entre el alambre y el cilindro (i.e $R_0 < r < R_1$), por lo que se utilizará la forma integral de la relación campo - potencial électrico:

$$\Delta V = V(R_0) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_0} \vec{E}_{R_0<r<R_1} \cdot d\vec{l}$$

Luego, por propiedades de integrales se pueden invertir los límites y la única componente en juego es la radial, por lo que:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{R_0}^{R_1} \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0}\, dr \\ &= \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} (\ln r)\Big|_{R_0}^{R_1} \\ &= \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} (\ln R_1 - \ln R_0) \\ &= \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Solución g)

Paso Único: Capacitancia - C

Se pide determinar la capacitancia de la configuración propuesta. Para ello, es necesario solo conocer el campo y potencial eléctrico que se encuentra en medio de los lugares que contienen cargas de igual magnitud, pero opuestas (i.e $R_0 < r < R_1$). Finalmente, se ocupa la expresión que relaciona carga almacenada con capacitancia:

$$Q = C\Delta V$$

Reemplazando valores se obtiene que:

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\Delta V} \\ &= \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \\ &= \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \end{aligned} \tag{14}$$

Se debe notar que $R_1 > R_0$, por lo que se cumple que $C > 0$.

Solución i)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la capacitancia de la nueva configuración. Para ello, es necesario solo conocer el campo y potencial eléctrico que se encuentra en medio de los lugares que contienen

cargas de igual magnitud, pero opuestas (i.e $R_0 < r < R_1$). Finalmente, se ocupa la fórmula que relaciona carga almacenada con capacitancia:

$$Q = C\Delta V$$

Paso 1: Análisis Nueva Capacitancia - C'

Como se modifican las cargas contenidas de igual manera para el alambre y el cascarón, solo bastaría con cambiar Q por $2Q$ en los resultados anteriores:

$$\vec{E}_{R_0<r<R_1} = \frac{2Q}{2\pi r L\varepsilon_0}\,\hat{r} \tag{15}$$

$$\Delta V = \frac{2Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) \tag{16}$$

Finalmente, se ocupa la fórmula que relaciona carga almacenada con capacitancia:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{Q}{\Delta V} \\ &= \frac{2Q}{\frac{2Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \\ &= \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \end{aligned} \tag{17}$$

Se debe notar que $R_1 > R_0$, por lo que se cumple que $C > 0$.
Luego, se concluye que la nueva capacitancia es igual a la anterior (i.e $C = C'$).

Nota: Se puedo haber realizado todo el ejercicio nuevamente con el cambio propuesto, pero supone algo demoroso. Luego, basta con saber que la capacitancia nace a partir de la geometría de la figura y no depende de la carga almacenada.