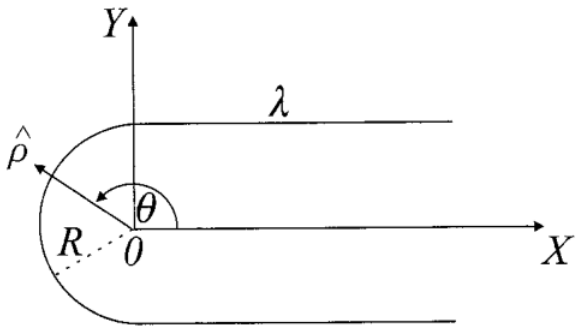
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudantes: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 2

Problema 1

Un alambre infinito con densidad lineal de carga λ se dobla en forma de horquilla, como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el punto O.



SOLUCION:

Primero calcularemos el campo eléctrico producido por la semicircunferencia, luego el campo producido por los dos semiejes y finalmente usaremos el principio de superposición para calcular el campo total en O. Para calcular cada una de estas tres contribuciones usaremos la expresión del campo eléctrico producido por una distribución lineal de cargas, es decir,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\lambda(\vec{R})d\ell \tag{1}$$

en que $\lambda(\vec{R})$ denota la densidad lineal de carga, $\vec{r}$ es el punto donde deseamos calcular el campo, $\vec{R}$ recorre los puntos de distribución y $d\ell$ es el elemento de longitud de la línea donde se encuentra la carga.

Pondremos el origen del sistema de coordenadas en el punto O, de modo que $\vec{r} = 0$. En primer lugar, para la semicircunferencia, tenemos que $\vec{R} = R\hat{\rho}$ y $d\ell = Rd\theta$. Reemplazando en (1)

$$\vec{E}_1(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{\rho}(\theta)d\theta$$

Escribimos $\hat{\rho}(\theta) = \cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{y}$ y resolvemos la integral, obteniendo

$$\vec{E}_1(0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\ \hat{x}$$

Ahora calcularemos la contribución al campo debido al alambre superior, ubicado en $y = R$, y que se extiende desde $x = 0$ a $x = \infty$. En este caso $\vec{R} = x\ \hat{x} + R\ \hat{y}$ y $d\ell = dx$. Reemplazando en (1)

$$\vec{E}_2(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_0^\infty \frac{x\ dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{x} + R\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{y}\right] \tag{2}$$

La primera integral es casi directa. Reemplazamos $u = x^2 + R^2\ \rightarrow\ du = 2x\ dx$

$$\int_0^\infty \frac{x\ dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{R^2}^\infty \frac{1}{u^{3/2}}du = -\frac{1}{\sqrt{u}}\bigg|_{R^2}^\infty = \frac{1}{R} \tag{3}$$

Para la segunda integral, sustituimos $x = R\tan(u)\ \rightarrow\ dx = R\sec^2(u)du$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{R\sec^2(u)}{(R^2\tan^2(u)+R^2)^{3/2}}du$$

Recordemos que $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$, por lo tanto $R^2\tan^2 u + R^2 = R^2\sec^2 u$. Tenemos que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{R\sec^2(u)}{R^3\sec^3(u)}du = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sec(u)} = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi/2}\cos(u) = \frac{1}{R^2} \tag{4}$$

Reemplazando (3) y (4) en (2), obtenemos

$$\vec{E}_2(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R}\hat{x} + \frac{1}{R^2}\hat{y}\right]$$

El calculo de la contribución de campo producida por el alambre inferior, ubicado en $y = -R$, es análoga y resulta en

$$\vec{E}_3(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R}\hat{x} - \frac{1}{R^2}\hat{y}\right]$$

Finalmente, utilizamos el principio de superposición para obtener el campo eléctrico total producido por la distribución de carga

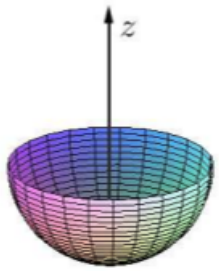
$$\vec{E}(0) = \vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0) + \vec{E}_3(0)$$

$$\vec{E}(0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right)\hat{x} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(0 - \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2}\right)\hat{y}$$

$$\vec{E}(0) = 0.$$

Problema 2

Un recipiente hemisférico no conductor, de radio interior a, tiene una carga total Q repartida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico en el centro de curvatura.



SOLUCION:

Tomamos como origen el centro de curvatura de la semiesfera. A partir de esto, podemos determinar la contribución de un elemento diferencial de carga en la superficie al campo eléctrico en el eje que pasa por el centro de curvatura, que coincide con la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$ (El campo $\vec{E}$, por simetría, solo tendrá componente en $\hat{\boldsymbol{z}}$).

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\sigma dS \tag{1}$$

donde el elemento diferencial de superficie sobre la esfera está dado por

$$dS = a^2 \sin\theta d\theta d\phi \tag{2}$$

y, como la carga está uniformemente distribuida, la densidad superficial es simplemente

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2} \tag{3}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), podemos determinar el campo total integrando sobre toda la superficie:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \sin\theta \frac{Q}{2\pi a^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}d\theta d\phi \tag{4}$$

Evaluando en $\vec{r} = \overrightarrow{0}$ obtenemos el campo en el centro de curvatura:

$$\vec{E}_C = -\frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\sin\theta\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}d\theta d\phi$$

Si tomamos $\vec{R} = a\hat{\boldsymbol{\rho}} = a\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + a\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}$, entonces $|\vec{R}| = a$. Por el argumento de simetría, solo interesa la componente según $\hat{\boldsymbol{z}}$. De todas formas, se puede verificar calculando explícitamente las integrales en $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$. Con esto,

$$E_C = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\int_{-\pi/2}^{0}\cos\theta\sin\theta d\theta = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\underbrace{\int_{-\pi/2}^{0}\sin 2\theta d\theta}_{=-1} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

Finalmente,

$$\vec{E}_C = E_C\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Problema 3

Considere un disco circular de radio a que tiene una densidad de carga superficial uniforme σ.

a) Calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje del disco a una distancia z.

b) Obtenga, a partir del resultado anterior, el campo creado por un plano infinito con densidad de carga σ.

SOLUCION:

a) Para calcular el campo eléctrico producido por el disco en un punto cualquiera de su eje, consideremos la expresión de campo eléctrico producto de un anillo que se calculó en la ayudantía anterior,

$$\vec{E}(z) = \frac{a\lambda}{2\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\ \hat{z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\ \hat{z} \tag{1}$$

donde se usó $\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi a}$. Vamos a considerar el disco como un conjunto de anillos concéntricos, y usaremos el principio de superposición para sumar las aportaciones de todos ellos. En forma diferencial, tenemos

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}dq\ \hat{z} \tag{2}$$

Aquí, r es el radio de cada anillo y dq el elemento de carga de cada uno, es decir

$$dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr \tag{3}$$

Reemplazamos (3) en (2) e integramos entre 0 y a,

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \pi\sigma \cdot z \int_0^a \frac{2r\ dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\ \hat{z}$$

Reemplazamos $u = z^2 + r^2 \ \rightarrow \ du = 2r\ dr$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z) &= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+a^2} \frac{du}{u^{3/2}}\ \hat{z} \\
&= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left(-\frac{2}{\sqrt{u}} \Big|_{z^2}^{z^2+a^2} \right) \hat{z} \\
&= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[-\frac{2}{(z^2+a^2)^{1/2}} + \frac{2}{z} \right] \hat{z} \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2+a^2)^{1/2}} \right] \hat{z}
\end{aligned}$$

b) Un plano infinito con densidad de carga σ lo podemos considerar como un disco de radio infinito. Como $\frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}} \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow \infty$, encontramos que el campo eléctrico es constante, pero cambia su dirección al atravesar el plano cargado en $z = 0$,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\ \hat{z}.$$