PAUTA INTERROGACIÓN-2

FIS1533 Electricidad y Magnetismo
16 de Mayo de 2011

PROBLEMA 1

Se conectan tres condensadores de 2, 4 y 6 μF en serie a una batería ideal de 200 V:

a) Obtenga la carga en cada uno de ellos.

b) Obtenga la diferencia de potencial en cada condensador.

c) Calcule la energía almacenada en cada condensador y la energía total almacenada.

A continuación se desconecta la batería y se separan los condensadores (cuidando para que no se descarguen) para conectarlos en paralelo (+ con + y – con –), sin batería. Calcule:

d) La carga en cada uno.

e) El voltaje en la combinación.

f) La energía en cada uno.

g) ¿Cómo se compara la energía total con la obtenida en c)? Comente.

Respuesta:

a)

En serie, $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

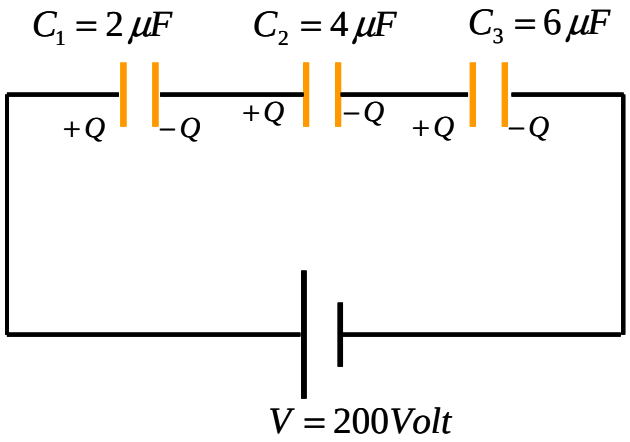
$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{12}{11}\mu F$$

1,5

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$Q = C_{eq}V = \frac{12}{11} \times 200 = 218{,}18\,\mu C$$



b)

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = 109{,}09\ V$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = 54{,}55\ V$$

0,6

$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = 36{,}36\ V$$

c)

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = 11{,}9\ mJ$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = 5{,}95\ mJ$$

0,6

$$W_3 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_3} = \frac{1}{2}C_3V_3^2 = 4{,}0\ mJ$$

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 21{,}9\,mJ$$

d) En paralelo

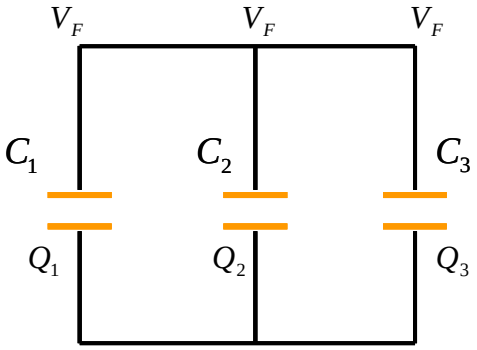
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 12\,\mu F$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_F$$

$$3Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$3Q = C_{eq}V_F$$

$$V_F = \frac{3Q}{C_{eq}} = \frac{3\times 218{,}18\times 10^{-6}\ C}{12\times 10^{-6}\ F} = 54{,}55\ V$$



1,5

$$Q_1 = C_1V_F = 2\times 10^{-6}\times 54{,}55\ C = 109{,}1C$$

$$Q_2 = C_2V_F = 4\times 10^{-6}\times 54{,}55\ C = 218{,}2C$$

$$Q_3 = C_3V_F = 6\times 10^{-6}\times 54{,}55\ C = 327{,}3C$$

e)

$$V_F = \frac{3Q}{C_{eq}} = \frac{3\times 218{,}18\times 10^{-6}\ C}{12\times 10^{-6}\ F} = 54{,}55\ V$$

0,6

f)

$$W_1' = \frac{1}{2}C_1 V_F^2 = 3{,}0\ mJ$$

$$W_2' = \frac{1}{2}C_2 V_F^2 = 6{,}0\ mJ$$

$$W_3' = \frac{1}{2}C_3 V_F^2 = 8{,}9\ mJ$$

0,6

$$W_T' = W_1' + W_2' + W_3' = 17{,}9\,mJ$$

g) $W_T' < W_T$, se disipó energía

0,6

PROBLEMA 2

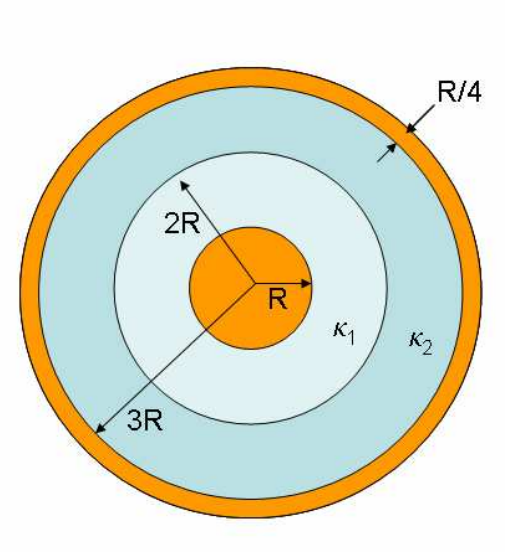
Considere un cable coaxial de longitud *L*, el cual tiene una sección transversal como la mostrada en la figura. Este cable consiste de un alambre macizo de cobre de radio *R* rodeado por dos mantos (cascarones) cilíndricos sucesivos concéntricos de material dieléctrico de constantes κ_1 y κ_2, respectivamente, y un envoltorio (cascarón) cilíndrico metálico de radio interior 3*R* y espesor *R*/4.

(a) Calcule la capacidad del sistema.

(b) Si una batería de 12 V es conectada con su polo positivo al conductor macizo y su terminal negativo al conductor exterior, ¿cuál es la carga neta almacenada en el conductor macizo?

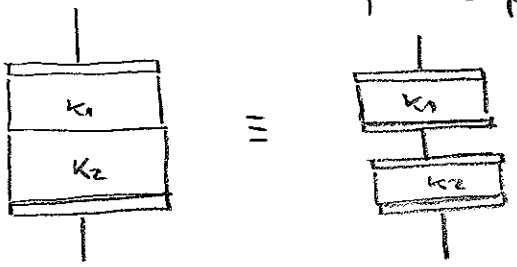
(c) ¿Cuál es la energía almacenada en el condensador luego de conectar la batería?

Respuesta:

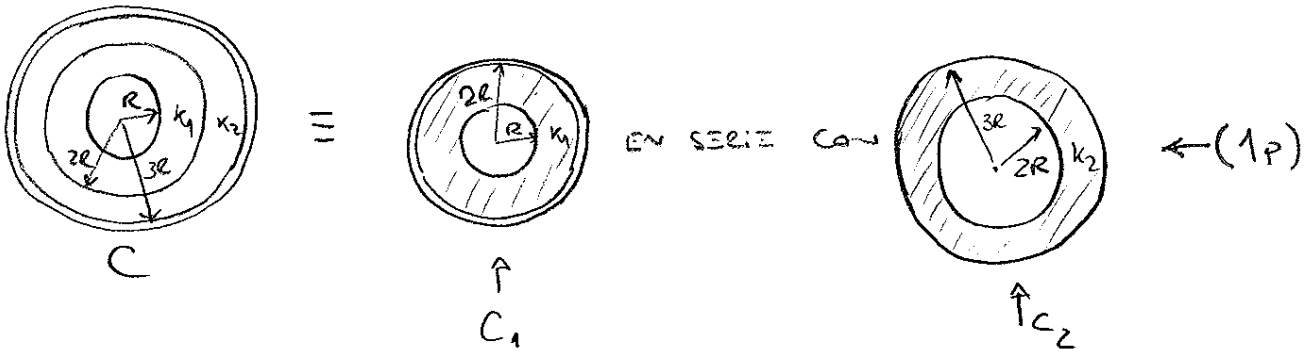


(a)

ESTE PROBLEMA ES SIMILAR AL CASO DEL CONDENSADOR DE PLACAS PARALELAS



SIGUIENDO LA MISMA IDEA, AQUÍ SE TIENE QUE:

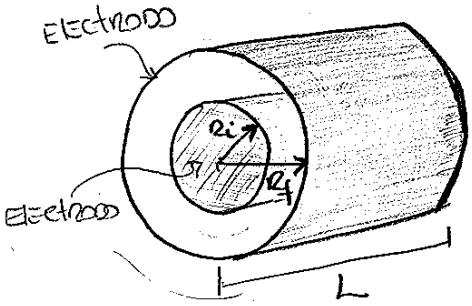


DONDE:

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} \quad \leftarrow (1/2\,P)$$

Por lo tanto el problema radica en calcular las capacitancias C_1 y C_2. Para ello consideraremos que $L \gg R$.

Primero calcularemos la capacitancia C_c de un cable coaxial sin dieléctrico en su interior, de radio interior R_i y exterior R_f tal como se muestra en la figura.

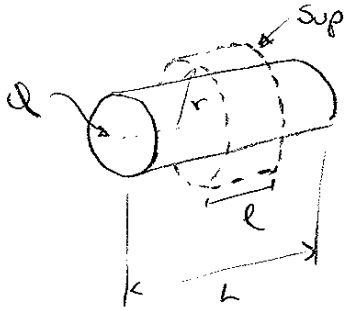


Sabemos que la capacitancia está dada por:

$$C_c = \frac{Q}{|\Delta V|}$$; donde Q es la carga almacenada si al condensador se le aplica una diferencia de potencial ΔV.

$(1/2\ p)$

Utilizando Ley de Gauss podemos calcular el campo entre los electrodos, para luego determinar la diferencia de potencial ΔV.



Determinando $\vec{E}$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi r \cdot \ell = \frac{\lambda \cdot \ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

En este caso $\boxed{\lambda = \frac{Q}{L}}$ $(1/2\ p)$

Calculando ΔV:

$$\Delta V = -\int_{R_i}^{R_f} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \Delta V = -\int_{R_i}^{R_f} \frac{\lambda\, dr}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{|\Delta V| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right)} \leftarrow (1/2\ p)$$

Luego la capacitancia C_c está dada por:

$$C_c = \frac{Q}{|\Delta V|} \Rightarrow \boxed{C_c = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right)}} \leftarrow (1/4\ p)$$

Podemos utilizar el resultado anterior para calcular C_1 y C_2 directamente:

$$\boxed{C_1 = k_1 \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(2)}} \leftarrow (1/4\ p) \quad ; \quad \boxed{C_2 = \frac{k_2 \cdot 2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}} \leftarrow (1/4\ p)$$

DE ESTA MANERA LA CAPACITANCIA DEL SISTEMA ESTÁ DADO POR:

$$\frac{1}{C} = \frac{\ln(2)}{k_1 2\pi\varepsilon_0 L} + \frac{\ln(3/2)}{k_2 \cdot 2\pi\varepsilon_0 L} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{k_1 k_2 2\pi\varepsilon_0 L}\left(k_2\ln(2) + k_1\ln(3/2)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{k_1 k_2 2\pi\varepsilon_0 L}{k_2\ln(2) + k_1\ln(3/2)}} \leftarrow (1/4\,P)$$

(b) SI UNA BATERÍA DE 12 V ES CONECTADA CON SU POLO POSITIVO AL CONDUCTOR MACIZO Y SU TERMINAL NEGATIVO AL CONDUCTOR EXTERIOR, ENTONCES EL CONDUCTOR MACIZO QUEDA CARGADO POSITIVAMENTE CON CARGA Q_+ DONDE: $(1/4\,P)$

$$\underbrace{Q_+ = (12\,V)\cdot C}_{(1/2\,P)} \Rightarrow \boxed{Q_+ = (12\,V)\cdot\frac{k_1 k_2 2\pi\varepsilon_0 L}{k_2\ln(2) + k_1\ln(3/2)}} \leftarrow (1/4\,P)$$

C) LA ENERGÍA ALMACENADA EN EL CONDENSADOR LUEGO DE CONECTAR LA BATERÍA ESTÁ DADA POR:

$$\boxed{\underbrace{U = \frac{1}{2}Q\cdot V}_{(1/2\,P)} \equiv \underbrace{\frac{(12\,V)^2}{2}}_{(1/2\,P)}\cdot\underbrace{\frac{k_1 k_2\cdot 2\pi\varepsilon_0 L}{k_2\ln(2) + k_1\ln(3/2)}}_{(1/2\,P)}}$$

PROBLEMA 3

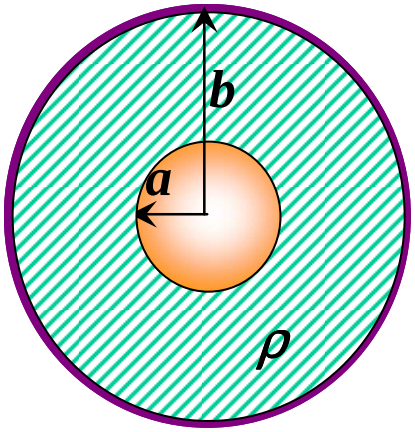
Una esfera sólida metálica de radio *a* es rodeada por un cascarón esférico delgado metálico de radio *b*. El espacio entre estos dos electrodos concéntricos se llena con un material Ohmico homogéneo de resistividad ρ, como se muestra en la figura. Se aplica una diferencia potencial (voltaje *V*) entre los dos electrodos:

(a) Calcule el campo eléctrico en cualquier punto entre *a* y *b*.

(b) A partir del campo eléctrico y vector densidad de corriente, calcule la resistencia entre los electrodos.

(c) Calcule la energía total disipada en el resistor (material homogéneo de resistividad ρ), en un intervalo de tiempo Δt.

(d) ¿Qué sucede con la resistencia, cuando i) el voltaje *V* se reduce a la mitad, ii) el cascarón esférico tiene radio infinito?



Respuesta:

Supongamos que el material Ohmico es compuesto por varios cascarones esféricos concéntricos. Consideremos unos de tal cascarón esférico de radio *r* y espesor d*r* entre *a* y *b*.

(a)
La relación entre el campo eléctrico (*E*), la vector densidad de corriente (*j*) y la resistividad (ρ) es,

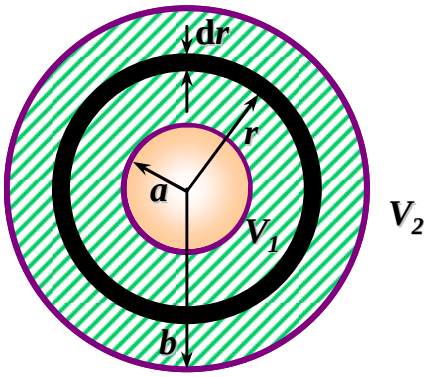
0,5 $E = \rho\, j$ ----------(1)

Si *i* es la corriente, tenemos;

0,5 $j = \dfrac{i}{4\pi r^2}$

Ecu.(1) $E = \dfrac{\rho i}{4\pi r^2}$ ----------(2)

0,5



(b)

Sabemos que, $E = -\dfrac{dV}{dr}$ $\qquad V_1 - V_2 = V$

0,5 $\Rightarrow -\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_a^b \dfrac{\rho i}{4\pi r^2} dr$ De Ecu.(2)

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\rho i}{4\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{V}{i} = \frac{\rho}{4\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

Usando la ley de Ohm

1,5 $\Rightarrow R = \dfrac{\rho(b-a)}{4\pi ab}$

(c) La energía total disipada en el resistor es,

$$P = -\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{V^2}{R}$$

$$\Rightarrow -\Delta U = \frac{4\pi ab V^2}{\rho(b-a)}\Delta t$$ **1,5**

(d)

i) La resistencia no cambia con el voltaje *V*. **0,5**

ii) Si $b = \infty$,

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$R = \frac{\rho}{4\pi a}$$ **0,5**