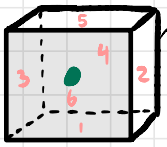
P11

1) Empleando ley de Gauss con una superficie gaussiana cúbica



Cubo superficie S

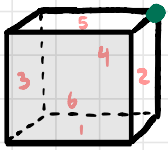
$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot\vec{dA} \Rightarrow \oint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dA} + \oint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dA} + \cdots + \oint_{S_6} \vec{E}\cdot\vec{dA}$$

Notamos que cada flujo por cada cara es igual, entonces el flujo total es: $6\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dA}$ (S → cualquier cara!)

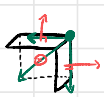
Por ley de Gauss, el flujo total es $6\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0}$, y si es por una cara,

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q}{6\varepsilon_0} \text{ //}$$

2) Se tiene lo siguiente.

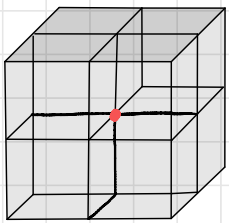


Notar que las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a los diferenciales de área de las caras 5, 4 y 2



$\Rightarrow$ que solo aportan al flujo 1, 3, 6

Sin embargo, no sé cuanto flujo pasa a través de esas caras, así que usaré un supercubo como superficie gaussiana.



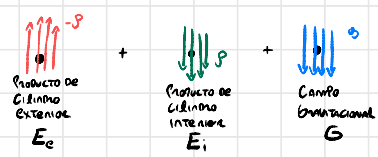
En total, hay $6 \cdot 8$ caras pero $3 \cdot 8$ NO aportan al flujo (alejamiento entonces), entonces $6 \cdot 8 - 3 \cdot 8$ realmente aportan

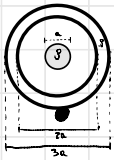
∴ Por ley de Gauss, el flujo total es $24\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ y por cada cara

sería $\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$ //

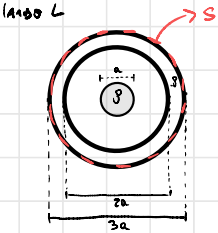
P2)

Mediante superposición, podemos notar que la carga de masa m está sometida a 2 campos eléctricos y uno gravitacional.





Para encontrar $E_T = E_e + E_i$ usamos ley de Gauss, hallo superficie de Gauss un cilindro de radio $\frac{3}{2}a$ y largo L



$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,2\pi\,\tfrac{3}{2}aL = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q_{en}}{3aL\pi\varepsilon_0}}$$

Ahora, $q_{en} = \underbrace{\iiint -\rho\,dv}_{\text{Carga de cascarón cilíndrico}} + \underbrace{\iiint \rho\,dv}_{\text{Carga cilindro interior}}$

$$\Rightarrow q_{en} = -\rho \int_0^L\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} r\,dr\,d\theta\,dz + \rho\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} r\,dr\,d\theta\,dz \Rightarrow$$

Volumen rápido — Volumen rápido

$$q_{en} = -\rho\pi L\left(\tfrac{q}{4}a^2 - a^2\right) + \rho\pi\frac{a^2}{4}L$$

$$q_{en} = \rho\pi L\left(a^2 - \tfrac{q}{4}a^2 + \tfrac{a^2}{4}\right)$$

$$\boxed{q_{en} = -\rho\pi L a^2}$$

$$\therefore E = \frac{q_{en}}{3aL\pi\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{-\rho\pi L a^2}{3aL\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{-\rho\pi a}{3\varepsilon_0}}$$

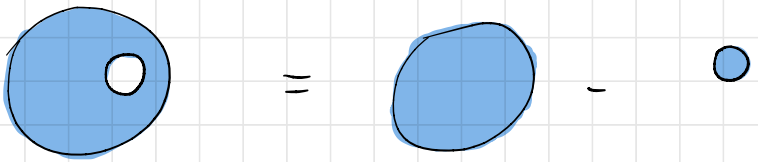
Entonces, para la fuerza se tiene: (hay equilibrio entre la F. eléctrica y el peso)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{\rho\pi a}{3\varepsilon_0} + mg = 0$$

$$\therefore \text{La masa mín es } \frac{\rho\pi a}{3\varepsilon_0 g}\ (kg) \quad //$$

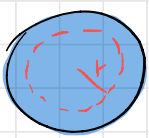
P31

Para encontrar el campo en la cavidad, emplearemos el principio de superposición.



Grande Chiquita

Calculamos por ley de Gauss para $r < R$ en esfera grande



$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{q_c}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

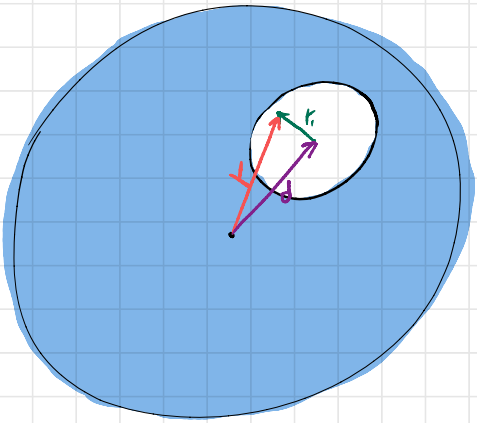
* Notar que $q_{en} = \iiint \rho \, dv \Rightarrow q_{en} = \rho \underbrace{\iiint dv}_{\text{Volumen esfera radio } r} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Ahora en chiquita $r_1 < a$



$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r_1^2 = \frac{\rho 4\pi r_1^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}}$$

¿Son lo mismo? ... No, Aquí Debemos recordar que debemos tener todo en función del mismo eje de referencia.



El Centro chiquito tiene una posición RELATIVA al Centro Grande, así que usaremos con vectores para dejarlo todo en función del eje de la esfera grande.

$$r = d + r_1 \Rightarrow \boxed{r_1 = r - d}$$

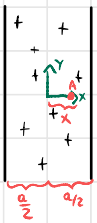
Entonces, reemplazamos r_1: $E = \frac{\rho(r-d)}{3\varepsilon_0}$

El Campo total es: $E = E_{grande} - E_{chiquito} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho(r-d)}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}}$ //

∴ El Campo es uniforme en la CAVIDAD.

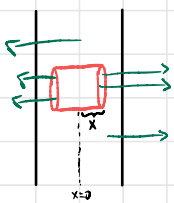
P4

Los planos delimitan un volumen con densidad de carga ρ.



Sabemos que el campo apunta en dirección $\hat{x}$ o $-\hat{x}$ dependiendo si estamos en $x>0$ o $x<0$.

Usando ley de Gauss:



¡Solo hay flujo por tapas!

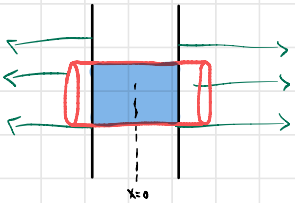
$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\oint dA = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ Dos tapas de área S $\rightarrow E\cdot 2S = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0}$

q_{en} = ρ · Volumen cilindro $\Rightarrow$ $q_{en} = \rho \cdot \underbrace{2x}_{\text{Largo}} \cdot \underbrace{S}_{\text{Área}}$

Entonces, $E2S = \frac{\rho 2xS}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{x}}$

Ahora, para un punto $P>a$:



$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 2S = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0}$$

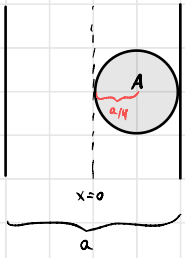
q_{en} = Pintado en azul

↳ $q_{en} = \rho a S$

$\Rightarrow$ $E2S = \frac{\rho a S}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{x}}$

No depende de dónde parto.

B)



Notar que lo haremos por superposición.

$$\vec{E} \text{ en } A = E_{\text{volumen}} + E_{\text{esfera}}$$

Notar que en $x = \frac{a}{4}$, estamos en el centro de la esfera y por geometría será cero.

$$\Rightarrow \vec{E} \text{ en } A = E_{\text{volumen}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} \text{ en } A = \frac{\rho a}{4\varepsilon_0}\hat{x}}$$

(Se usó resultado anterior de $\vec{E}$ dentro de las placas $E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\hat{x}$)

Ahora, en un punto $P > a$

- Campo esfera: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{-\rho 4\pi (a/4)^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{-\rho a^3}{192 r^2 \varepsilon_0}$
- Plano: $\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ (Recordar que no depende de x cuando $P > a$)

Ahora, notar que al igual que en P3, el 'r' del campo de la esfera está relativo a su centro, entonces hay que "Amesinado" y desarlo a donde al sist. de referencia en $x=0$

$$\therefore E = \frac{-\rho a^3}{192\varepsilon_0 (x - (a/4))^2}\hat{x}$$

lo trasladé al centro de la esfera $x = \frac{a}{4}$

En conclusión, el campo en $P > a$ es

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\rho a^3}{192\varepsilon_0 (x - \frac{a}{4})^2}\hat{x}\ //}$$