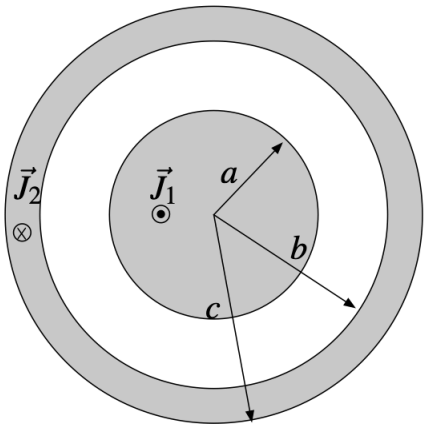
Exámen

Fecha: 1 de Julio 2024

1. Un cable coaxial muy largo consiste en un cilindro sólido con un radio interior de radio a, rodeado por un cascarón cilíndrico conductor concéntrico de radio interno b y exterior c. El conductor interior tiene una densidad de corriente no uniforme $\vec{J}_1 = \alpha r\hat{z}$ donde α es una constante. El cilindro exterior tiene una densidad de corriente $\vec{J}_2 = -\beta\hat{z}$ donde β es una constante positiva. Ambas regiones conductoras, llevan cada una, una corriente total $I_0 > 0$ de igual magnitud pero en opuestas direcciones. Entre ambos conductores existe vacío.



(a) Encuentre los valores α y β en términos de a, b, c y I_0. [2 puntos]

(b) Determine el campo magnético en todo el espacio. Exprese sus resultados en términos de a, b, c e I_0. [2 puntos]

(c) Realice un gráfico de $|\vec{B}|$ con respecto a la distancia desde el eje de simetría r. [2 puntos]

(a) Usando la definición de corriente eléctrica a partir de la densidad de corriente, se obtiene que

$$I_0 = \iint \vec{J}_1 \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^a (\alpha r\hat{z}) \cdot (r dr d\theta \hat{z}) = \frac{2\pi\alpha a^3}{3} \quad 0.5$$

y

$$-I_0 = \iint \vec{J}_2 \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_b^c (-\beta\hat{z}) \cdot (r dr d\theta \hat{z}) = -\beta\pi(c^2 - b^2)\,. \quad 0.5$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$0.5 \quad \alpha = \frac{3I_0}{2\pi a^3}\,, \qquad \beta = \frac{I_0}{\pi(c^2-b^2)}\,. \quad 0.5$$

(b) Por simetría el campo magnético es de la forma $\vec{B}(r,\theta,z) = B(r)\hat{\theta}$. Podemos calcular $B(r)$ por medio de ley de Ampère

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}(\Gamma) \quad \text{BONUS: 0.5}$$

donde $I_{\text{enc}}(\Gamma)$ es la corriente encerrada por el camino cerrado Γ.

- $r < a$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^r (\alpha r\hat{z}) \cdot (r dr d\theta \hat{z}) = \frac{2\pi\alpha r^3}{3} \quad 0.25$$

de donde se deriva

$$B(r) = \frac{\mu_0\alpha r^2}{3} = \frac{\mu_0 I_0 r^2}{2\pi a^3}\,. \quad 0.25$$

- $a \leqslant r \leqslant b$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^a (\alpha r\hat{z}) \cdot (r dr d\theta \hat{z}) = \mu_0 I_0 \quad 0.25$$

de donde se deriva

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\,. \quad 0.25$$

■

- $b < r \leqslant c$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \left(I_0 + \int_0^{2\pi} \int_b^r (-\beta \hat{z}) \cdot (r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \hat{z}) \right) = \mu_0 I_0 - \mu_0 \beta \pi (r^2 - b^2)$$ 0.25

de donde se deriva

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) .$$ 0.25

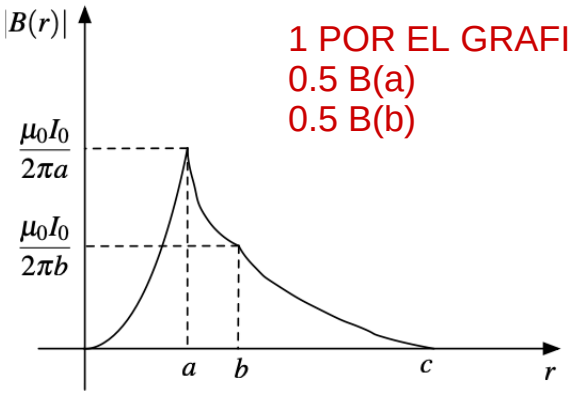
- $r > c$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 (I_0 - I_0) = 0$$ 0.25

de donde se deriva

$$B(r) = 0 .$$ 0.25

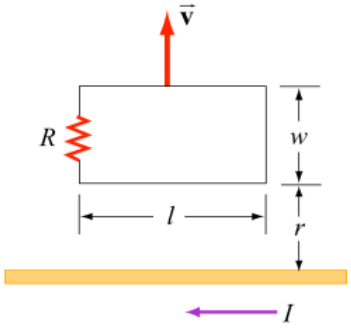
(c) Observando que $|\vec{B}(r,\theta,z)| = B(r)$ se ve que el gráfico de $|\vec{B}|$ es



1 POR EL GRAFICO
0.5 B(a)
0.5 B(b)

■

2. Un lazo rectangular de dimensiones l y w se mueve con una velocidad constante $\vec{v}$ alejándose de un alambre recto infinitamente largo que lleva una corriente I en el plano del lazo, como se muestra en la figura. La resistencia total del lazo es R.

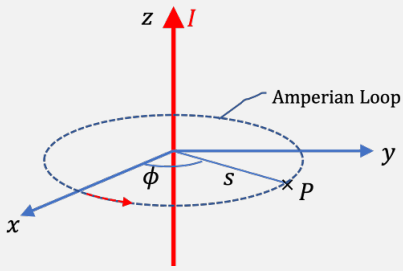


(a) Usando la ley de Ampère, encuentra el campo magnético a una distancia s del alambre recto que lleva corriente. [2 puntos]

(b) Calcule el flujo magnético a través del lazo rectangular en el instante en que el lado inferior de longitud l está a una distancia r del alambre recto, como se muestra en la figura. [2 puntos]

(c) En el instante en que el lado inferior está a una distancia r del alambre, encuentre la f.e.m. inducida y la correspondiente corriente inducida en el lazo rectangular. Indique en qué dirección fluye la corriente inducida. [2 puntos]

(a) Para hallar el campo magnético, se escoge un circuito amperiano como el que muestra la figura:



Así, dada la simetría del problema, el campo magnético se dirige en la dirección $\hat{e}_\phi$. De esta forma, la Ley de Ámpere es:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}, \qquad 1 \tag{1}$$

en donde I_{enc} es la corriente que cruza el circuito amperiano, es decir, $I_{enc} = I$.

Por otro lado, el elemento diferencial de línea es paralelo al campo punto a punto, por lo que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\,dl$, y por lo tanto:

$$B \int dl = \mu_0 I \rightarrow B(2\pi s) = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}. \qquad 0.75 \tag{2}$$

Por lo tanto:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{e}_\phi. \qquad 0.25 \text{ por la dirección} \tag{3}$$

Es decir, el campo entra a la página.

■

(b) el flujo magnético viene dado por:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}, \qquad 1 \tag{4}$$

con $d\vec{A}$ el vector de área.

Para cierto tiempo t, las líneas de campo magnético a una distancia s cruzan un área diferencial $d\vec{A} = lds\,\hat{e}_\phi$, y entonces:

$$0.5 \quad \Phi = \int_r^{r+w} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right)(lds) = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{r}\right). \quad 0.5 \tag{5}$$

(c) Por definición:

$$\begin{aligned} \text{f.e.m.} &= -\frac{d\Phi}{dt} \quad 0.25 \\ &= -\frac{\mu_0 Il}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln\left(1 + \frac{w}{r}\right) \quad 0.25 \\ &= \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \frac{w}{r(r+w)} \frac{dr}{dt} \quad 0.5 \end{aligned} \tag{6}$$

pero dado que la velocidad de movimiento es constante, entonces $r = vt$, tal que:

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \frac{wv}{r(r+w)}. \quad 0.5 \tag{7}$$

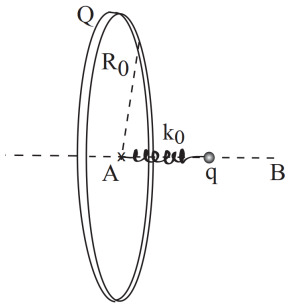
Esta f.e.m. actúa como una fuente de voltaje en el circuito y por lo tanto, la corriente es:

$$I = \frac{\text{f.e.m.}}{R} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi R} \frac{wv}{r(r+w)}. \quad 0.25 \tag{8}$$

El flujo decrece y por la ley de Lenz, se debe inducir una corriente que se oponga dicho cambio, es decir, que genere un campo magnético que contrarrestare el campo que "se pierde". Por lo tanto, dicha corriente debe generar un campo en la misma dirección del original, lo cual se logra con unca corriente en la dirección de las manecillas del reloj. 0.25

■

3. Un anillo de radio R_0 tiene una carga Q positiva, la cual está distribuida de manera uniforme sobre el anillo, como se ilustra en la gura. Considere una carga puntual de carga negativa q ($q < 0$) y masa m, la cual es depositada en reposo sobre el eje central del anillo cerca del centro representado por el punto A, además la carga esta soldada a un resorte ideal de constante elástica k_o y largo natural cero con extremo jo en el punto A.

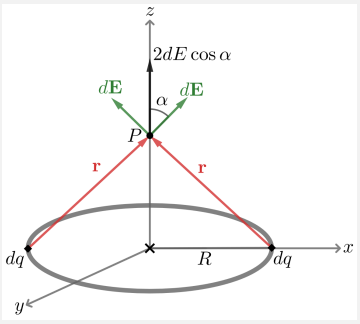


(a) Calcule el campo eléctrico provocado por el anillo cargado en el eje de simetría del mismo. [3 puntos]

(b) Calcule la fuerza total que siente la carga q. [2 puntos]

(c) Si la carga q se mueve exclusivamente en el eje de simetría, escriba (usando Newton) la ecuación de movimiento que rige su movimiento. Estime la frecuencia de pequeñas oscilaciones ($z \ll R_0$) con que se moverá. [1 punto]

(a) Considere el anillo cargado como en la siguiente figura:



En este problema, la carga está a lo largo de un cuerpo unidimensional y por lo tanto, es posible definir una densidad lineal de carga λ.

La simetría del problema muestra que la única contribución al campo se da a lo largo del eje z, tal que

$$\vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\cos\alpha\,\hat{e}_z. \quad 0.5 \tag{1}$$

De la geometría del problema:

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + z^2 \\ \cos\alpha &= \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}. \end{aligned} \quad 0.25 \tag{2}$$

Además, se puede definir el diferencial de carga

$$dq = \lambda\, ds, \quad 0.25 \tag{3}$$

con ds un diferencial de arco en el anillo. Reemplazando:

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int ds\,\hat{e}_z. \quad 0.5 \tag{4}$$

Integrando en media circunferencia (ya que se hizo la suma vectorial de dos dq diametralmente opuestos):

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\pi R)z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{e}_z. \quad 0.25 \tag{5}$$

Finalmente, ya que la densidad de carga es uniforme:

$$\lambda = \frac{dq}{ds} \text{ y } \lambda = \frac{Q}{s} \rightarrow \lambda = \frac{q}{2\pi R}, \quad 0.25 \tag{6}$$

lo cual implica que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+R_0^2)^{3/2}}\hat{e}_z. \quad 1 \tag{7}$$

(b) Si la carga q se encuentra a una distancia z del centro del anillo, el campo eléctrico hará una fuerza dada por:

$$\vec{F}_{elec} = -|q|\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|Qz}{(z^2+R_0^2)^{3/2}}\hat{e}_z, \quad 0.5 \tag{8}$$

mientras que el resorte hará una fuerza:

$$\vec{F}_{elstica} = -k_0 z\,\hat{e}_z, \quad 0.5 \tag{9}$$

con lo que la fuerza total es:

$$\vec{F}_{total} = -\left[k_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|Q}{(z^2+R_0^2)^{3/2}}\right] z\,\hat{e}_z \quad 1 \tag{10}$$

■

(c) De la segunda ley de Newton, se tiene que en la dirección z:

$$\vec{F}_{total} = m\frac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z \rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \left[\frac{k_0}{m} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{|q|Q}{(z^2+R_0^2)^{3/2}}\right] z = 0, \quad 0.25 \tag{11}$$

que es la ecuación de movimiento de q.
Ahora, para oscilaciones pequeñas, es decir, $z \ll R_0$:

$$\frac{z}{(z^2+R_0^2)^{3/2}} \approx \frac{z}{R^3}, \quad 0.25 \tag{12}$$

entonces la ecuación de movmiento es

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{k_0}{m} + \frac{|q|Q}{4\pi\epsilon_0 m R^3}\right) z = 0, \quad 0.25 \tag{13}$$

que es la ecuación de un Movimiento Armónico Simple con frecuencia

$$\omega^2 = \frac{k_0}{m} + \frac{|q|Q}{4\pi\epsilon_0 m R^3}. \quad 0.25 \tag{14}$$

■