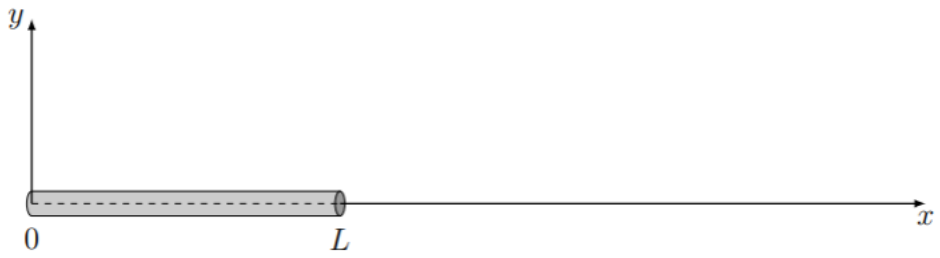
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 10

Problema 1 (I1 2018-2)

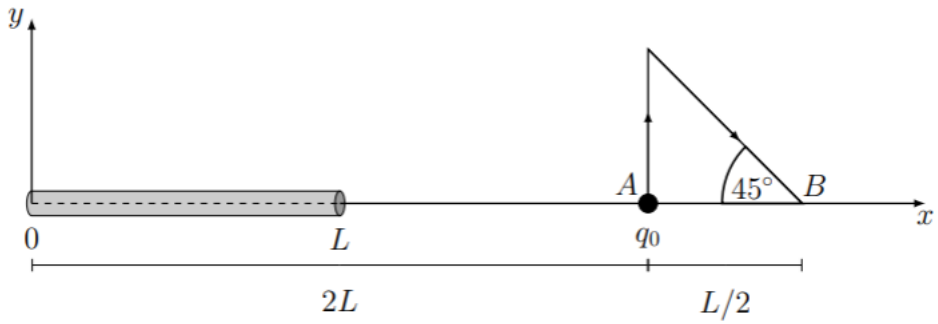
Considere una varilla plastica (aislante) cuya densidad de carga lineal λ_0 es constante. La varilla esta ubicada en el eje x, entre $x = 0$ y $x = L$.



a) Determine el valor y unidades del SI de λ_0 si la carga total de la varilla es Q.

b) Encuentre el campo eléctrico para cualquier $x > L$.

c) Suponga ahora que se ubica una carga puntual q_0 sobre el eje x en $x = 2L$.



Se desea mover la carga q_0 desde el punto A hasta el punto B por el camino mostrado en la figura. Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico.

SOLUCION:

a) La carga total está dada por:

$$Q = \int_0^L \lambda(x)dx = \int_0^L \lambda_0 dx = \lambda_0 L$$

Por lo tanto:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L}$$

Las unidades de λ_0 en el sistema internacional son simplemente C/m

b) Por simetría, el campo eléctrico sobre el eje x es solamente en la dirección $+x$ El campo eléctrico se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dE_x &= k\frac{\lambda_0 dx'}{(x-x')^2} \\ E_x &= k\lambda_0 \int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2} \\ E_x &= k\lambda_0 \frac{1}{(x-x')}\Big|_0^L \\ E_x &= k\lambda_0 \left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

De esta forma el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)\hat{x}$$

c) El trabajo del campo eléctrico para ir desde el punto A al punto B está dado por:

$$W_{A\to B} = \int_A^B q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Como la fuerza eléctrica es conservativa, el trabajo es independiente del camino y solamente depende del punto inicial y final. Por lo tanto, se podría tomar una trayectoria sobre el eje x que va desde $x = 2L$ hasta $x = 5L/2$

En este caso el trabajo es simplemente:

$$
\begin{aligned}
W_{A\to B} &= \int_{2L}^{5L/2} q_0 E_x dx \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\int_{2L}^{5L/2}\left(\frac{1}{x-L}-\frac{1}{x}\right)dx \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}(\ln(x-L)-\ln(x))\Big|_{2L}^{5L/2} \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln\left[\frac{5L/2-L}{2L-L}\right]-\ln\left[\frac{5L/2}{2L}\right]\right) \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln\left[\frac{5L/2-L}{2L-L}\right]-\ln\left[\frac{5L/2}{2L}\right]\right) \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln\left[\frac{3}{2}\right]-\ln\left[\frac{5}{4}\right]\right) \\
W_{A\to B} &= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left[\frac{6}{5}\right]
\end{aligned}
$$

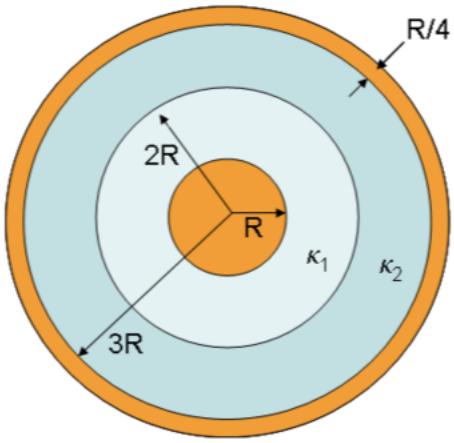
Problema 2 (I1 2023-1)

Considere un cable coaxial de longitud L, el cual tiene una sección transversal como la mostrada en la figura. Este cable consiste de un alambre macizo de cobre de radio R rodeado por dos mantos (cascarones) cilíndricos sucesivos concéntricos de material dieléctrico de constantes (permitividad relativa) κ_1 y κ_2, respectivamente, y un envoltorio (cascarón) cilíndrico metálico de radio interior $3R$ y espesor $R/4$.

a) Calcule la capacitancia del sistema, considerando que $L \gg R$.

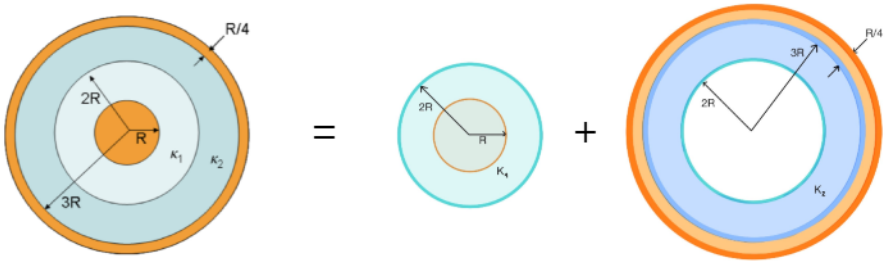
b) Si una batería de 12 V es conectada con su polo positivo al conductor macizo y su terminal negativo al conductor exterior, ¿cuál es la carga neta almacenada en el conductor macizo?

c) ¿Cuál es la energía almacenada en el condensador cuando está completamente cargado?



SOLUCION:

a) Fijándonos en la configuración que tenemos, podemos notar que esto no es otra cosa más que dos capacitores en serie, tal como se muestra a continuación



De este modo, tenemos que

$$C_{\text{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

y por lo tanto el problema radica en calcular las capacitancias C_1 y C_2.

Para calcular las capacitancias, consideremos el caso de un cable coaxial sin dieléctrico, que tiene un radio interior R_i y exterior R_f. Por ley de Gauss, el campo electrico entre ambos radios viene dado por

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_e}{\epsilon_0} \;\rightarrow\; E \cdot 2\pi r L = \frac{q_e}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}\hat{r}$$

Ahora, el potencial entre los dos electrodos es

$$\Delta V = -\int_{R_i}^{R_f} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_{R_i}^{R_f} \frac{dr}{r}$$
$$\Rightarrow\; |\Delta V| = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right)$$

y por ultimo la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_f/R_i)}$$

la cual es la capacitancia de un condensador cilíndrico. Para aplicar este resultado a nuestros condensadores, recordemos que $C = \kappa C_0$, de modo que

$$C_1 = \kappa_1 \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(2)}, \quad C_2 = \kappa_2 \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(3/2)}$$

De esta manera, la capacitancia del sistema esta dada por

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{\kappa_1}\frac{\ln(2)}{2\pi\epsilon_0 L} + \frac{1}{\kappa_2}\frac{\ln(3/2)}{2\pi\epsilon_0 L} = \frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\frac{1}{2\pi\epsilon_0 L}[\kappa_2\ln(2) + \kappa_1\ln(3/2)]$$
$$\Rightarrow\; C_{\text{eq}} = \frac{\kappa_1\kappa_2 2\pi\epsilon_0 L}{\kappa_2\ln(2) + \kappa_1\ln(3/2)}$$

b) Si la batería conecta su polo positivo al conductor macizo, este ultimo queda cargado positivamente con carga Q_+. Entonces

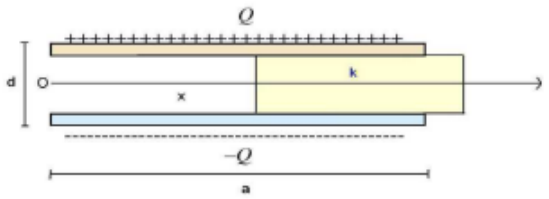
$$Q_+ = (12\ V)\cdot C = (12\ V)\frac{\kappa_1\kappa_2 2\pi\epsilon_0 L}{\kappa_2\ln(2) + \kappa_1\ln(3/2)}$$

c) La energía almacenada por el condensador después de conectar la batería es, simplemente

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{(12\ V)^2}{2}\frac{\kappa_1\kappa_2 2\pi\epsilon_0 L}{\kappa_2\ln(2) + \kappa_1\ln(3/2)}$$

Problema 3 (I1 2020-2)

Se tiene un condensador plano con placas cuadradas de largo a, distancia d entre las placas y una carga total Q. Calcular la fuerza que se ejerce sobre un material dieléctrico cuando se encuentra a una distancia x del punto O.



SOLUCION:

La energía potencial asociada a esta configuración es

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

Notemos que es función de la posición x, puesto que la capacitancia también lo es. El sistema se puede ver como dos condensadores en paralelo, uno de ellos con un dieléctrico de constante κ. Así

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 a x}{d} + \frac{\kappa\epsilon_0 a(a-x)}{d} = \frac{\epsilon_0 a(x + \kappa[a-x])}{d}$$

Con esto, la energía potencial eléctrica almacenada es

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\epsilon_0 a(x + \kappa[a-x])}$$

Para obtener la fuerza, consideremos que para un sistema aislado a $Q = \text{cte}$ la conservación de energía nos dice que el trabajo que hace el sistema mas la variación de energía del sistema es cero. O sea, si esta aislado, el trabajo que haga el sistema es a costa de su propia energía. Entonces

$$dW + dU = 0$$

Como $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$, esto implica que $\vec{F} = -\nabla U$. Así, la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico será

$$F_x\hat{x} = -\frac{dU}{dx}\hat{x} \;\rightarrow\; F_x = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a}\frac{1-\kappa}{(x + \kappa[a-x])^2}$$

Notemos que $1 - \kappa < 0$, lo que significa que la fuerza apunta según $-\hat{x}$. Esto quiere decir que la placa dieléctrica es atraída hacia el interior del condensador. En este caso que es conservativo, la fuerza que hace el sistema es para ir a una configuración de menor energía, y tira al dieléctrico hacia dentro.