PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física
FIS1533 — Electricidad & Magnetismo
Segundo Semestre 2018

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Interrogación 01

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible en cada hoja.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
5. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo, pero pierde el derecho a recorrección.
6. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

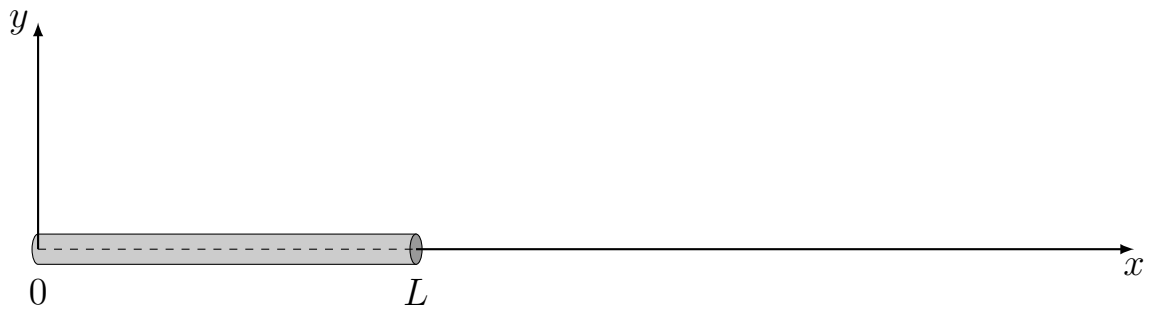
Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

Problema 1 [6 puntos]

Considere una varilla plástica (aislante) cuya densidad de carga lineal es constante y está dada por $\lambda(x) = \lambda_0$. La varilla está ubicada en el eje x, entre $x = 0$ y $x = L$.

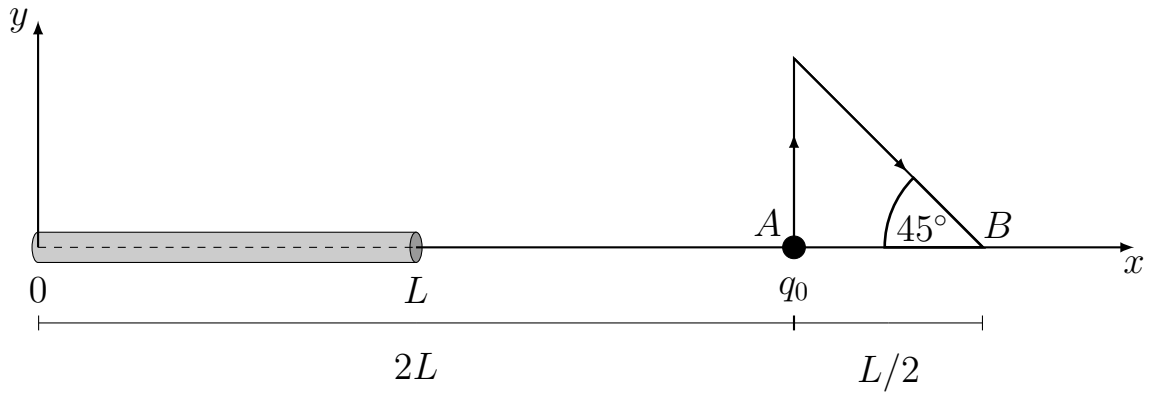


Determine:

a) El valor de λ_0 si la carga total de la varilla es Q y sus unidades en el sistema internacional [2 puntos].

b) El campo eléctrico (dirección y magnitud) para cualquier $x > L$ [2 puntos].

Suponga ahora que se ubica una carga puntual q_0 sobre el eje x en $x = 2L$.



c) Se desea mover la carga q_0 desde el punto A hasta el punto B por el camino mostrado en la figura. Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico [2 puntos].

Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

a) La carga total está dada por:

$$Q = \int_0^L \lambda(x)dx = \int_0^L \lambda_0 dx = \lambda_0 L \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

Por lo tanto:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L} \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

Las unidades de λ_0 en el sistema internacional son simplemente C/m (1 punto).

b) Por simetría, el campo eléctrico sobre el eje x es solamente en la dirección $+x$ (0.25 punto). El campo eléctrico se calcula de la siguiente forma:

$$dE_x = k\frac{\lambda_0 dx'}{(x-x')^2} \qquad \text{(0.25 puntos)}$$

$$E_x = k\lambda_0 \int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2} \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

$$E_x = k\lambda_0 \frac{1}{(x-x')}\Big|_0^L$$

$$E_x = k\lambda_0 \left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)$$

De esta forma el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)\hat{x} \qquad \text{(1 punto)}$$

c) El trabajo del campo eléctrico para ir desde el punto A al punto B está dado por:

$$W^{(E)}_{A\to B} = \int_A^B q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \text{(0.25 puntos)}$$

Como la fuerza eléctrica es conservativa, el trabajo es independiente del camino y solamente depende del punto inicial y final. Por lo tanto, se podría tomar una trayectoria sobre el eje x que va desde $x = 2L$ hasta $x = 5L/2$ (0.5 puntos).

En este caso el trabajo es simplemente:

$$
\begin{aligned}
W^{(E)}_{A\to B} &= \int_{2L}^{5L/2} q_0 E_x dx \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\int_{2L}^{5L/2}\left(\frac{1}{x-L}-\frac{1}{x}\right)dx \qquad \text{(0.25 puntos)} \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln(x-L)-\ln(x)\right)\Big|_{2L}^{5L/2} \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln\left[\frac{5L/2-L}{2L-L}\right]-\ln\left[\frac{5L/2}{2L}\right]\right) \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln\left[\frac{5L/2-L}{2L-L}\right]-\ln\left[\frac{5L/2}{2L}\right]\right) \\
&= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln\left[\frac{3}{2}\right]-\ln\left[\frac{5}{4}\right]\right) \\
W^{(E)}_{A\to B} &= \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 L}\ln\left[\frac{6}{5}\right] \qquad \text{(1 punto)}
\end{aligned}
$$

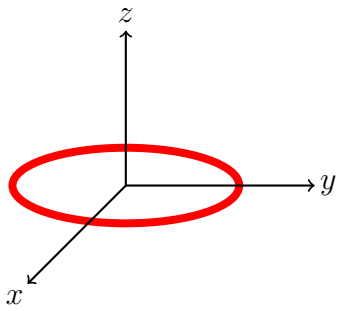
Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

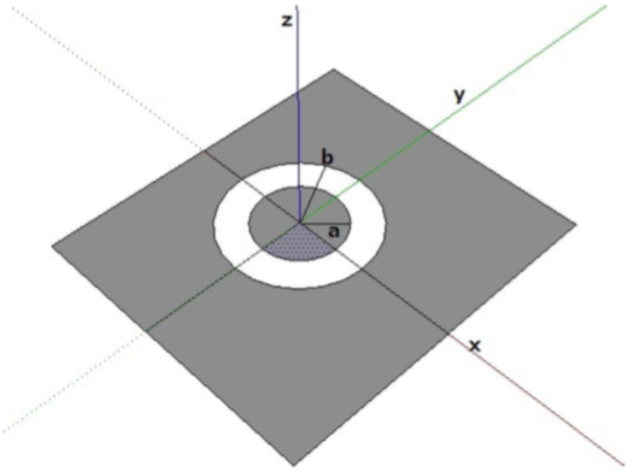
Problema 2 [6 puntos]

a) Considere un anillo de radio R, carga q y densidad de carga uniforme que se encuentra en el plano $x-y$ con centro en el origen. Calcule el potencial V generado por el anillo en el eje z. Indique cuál es el potencial dV debido a una porción de carga dq [2 puntos].



b) Partiendo del potencial calculado en a), encuentre el vector campo eléctrico en el eje z [2 puntos].

c) En el plano $x-y$ se tiene un plano infinito con densidad de carga σ el cuál tiene un agujero en forma de cinta de radio interno a y radio externo b (ver figura). Determine el campo eléctrico en cualquier punto sobre el eje z [2 puntos].



Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

a) Debido a que toda la carga en el anillo está a la misma distancia sobre un punto en el eje z tenemos simplemente que:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad \text{(1 punto)}$$

La contribución de una porción de carga dq es simplemente:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad \text{(1 punto)}$$

b) Usando la relación $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ y que debido a la simetría solamente hay campo eléctrico en la dirección z tenemos que (0.5 punto):

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \qquad \text{(0.5 punto)}$$
$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z}$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \qquad \text{(1 punto)}$$

(c) Para calcular el campo eléctrico sobre el eje z podemos usar el principio de superposición y descomponer el campo total en la contribución de un plano infinito de densidad σ y una cinta de radio interior a y exterior b de densidad $-\sigma$.

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{plano}} + \vec{E}_{\text{cinta}} \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

Usando el resultado en b) calculamos el campo de la cinta:

$$\vec{E}_{\text{cinta}} = \hat{z}\int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}(-\sigma)2\pi r dr \qquad \text{(0.5 puntos)}$$
$$\vec{E}_{\text{cinta}} = -\hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr$$
$$\vec{E}_{\text{cinta}} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right] \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

Por lo tanto tenemos que el campo total es:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{plano}} + \vec{E}_{\text{cinta}}$$
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 + \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]\hat{z} \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

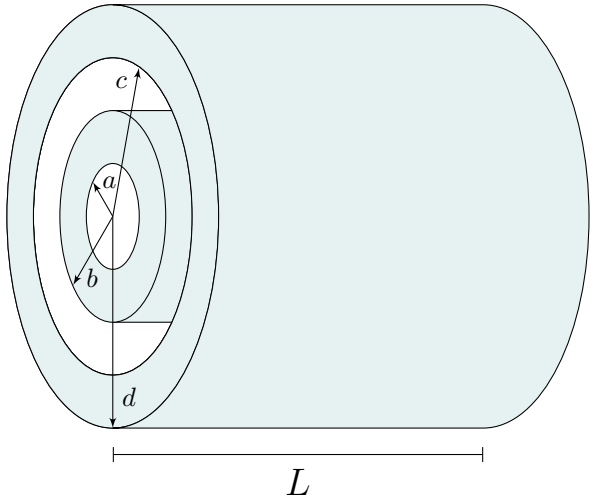
Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

Problema 3 [6 puntos]

Un sistema consiste de dos cascarones cilíndricos, conductores y concéntricos. El cascarón exterior tiene radio externo d e interno c, el cascarón interior tiene radio externo b e interno a, y ambos tienen longitud $L \gg d$. El cascarón interior contiene una carga total $+Q$ y el exterior una carga total $-Q$.



Determine:

a) La carga en cada una de las cuatro superficies conductoras [2 puntos].

b) El campo eléctrico en todo el espacio [2 puntos].

c) La capacitancia del sistema [2 puntos].

Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

a) Como el campo eléctrico dentro de un conductor es siempre 0, por la ley de Gauss tenemos que la carga encerrada neta por una superficie Gaussiana cerrada dentro del cascarón cilíndrico interior debe ser cero. De esta forma la carga en la superficie interior en el cascarón interior es 0 y debido a que el cascarón es neutro, la carga en la superficie exterior del cascarón interior es $+Q$ (1 punto).

Del mismo modo, el campo eléctrico dentro del cascarón exterior es cero, por lo que la carga encerrada neta por una superficie Gaussiana cerrada dentro del cascarón cilíndrico exterior debe ser cero. De esta forma la carga en la superficie interior en el cascarón exterior es $-Q$ para cancelar la carga del cascarón interior. Debido a que el cascarón es neutro, la carga en la superficie exterior del cascarón exterior es 0 (1 punto).

b) Solamente $E \neq 0$ entre $b < r < c$.

Usando Gauss tenemos que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\hat{r} \quad \text{(0.8 puntos)}$$

Por lo tanto tenemos que:

(i) $r < a$: $\vec{E}(r) = 0$ (0.3 puntos)

(ii) $a < r < b$: $\vec{E}(r) = 0$ (interior del conductor) (0.3 puntos)

(iii) $b < r < c$: $\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\hat{r}$

(iv) $c < r < d$: $\vec{E}(r) = 0$ (interior del conductor) (0.3 puntos)

(v) $d < r$: $\vec{E}(r) = 0$ (0.3 puntos)

c) Para obtener la capacitancia es necesario obtener la diferencia de potencial entre ambos conductores. Usando la definición de la diferencia de potencial eléctrico en término del campo eléctrico tenemos:

$$V = V_b - V_c = -\int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(0.25 puntos)}$$

$$V = V_b - V_c = -\int_c^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \quad \text{(1 punto)}$$

La capacitancia es simplemente

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(c/b)} \quad \text{(0.75 puntos)}$$

Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

Problema 4 [3 puntos]

Se tienen tres cargas q puntuales de masa m formando las puntas de un triángulo equilatero de lado a.

i) Calcule la energía acumulada en el sistema [1.5 puntos].

ii) Si las cargas se sueltan del reposo, calcule la magnitud de la velocidad de cada una de ellas cuando se encuentran *infinitamente* separadas [1.5 puntos].

(i) La energía acumulada corresponde a la energía potencial eléctrica, la cual está dada para cargas puntales por

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(3\frac{q^2}{a}\right) \quad \text{(1.5 puntos)}$$

(ii) Debido a que la fuerza eléctrica es conservativa, la energía total inicial debe ser igual a la energía final total:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_f \quad \text{(0.75 puntos)} \\ K_0 + U_O &= K_f + U_f \\ 0 + 3\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a} &= 3\frac{1}{2}mv^2 + 0 \\ \implies v &= \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 am}} \quad \text{(0.75 puntos)} \end{aligned}$$

Nombre: _____

RUT: _____

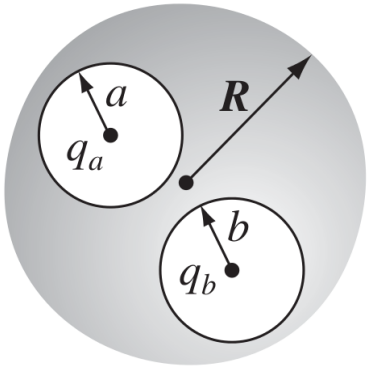
N lista: _____

Problema 5 [3 puntos]

Dos cavidades esféricas son perforadas en el interior de un conductor neutro de radio R. Las cavidades tienen radios a y b y se encuentran a una distancia c entre ellas. En el centro de cada cavidad se colocan cargas q_a y q_b (ver figura).

i) Determine las densidades de carga en las superficies internas del conductor (σ_a y σ_b). Determine además la carga total inducida en la superficie exterior del conductor [2 puntos].

ii) Determine el campo eléctrico en el interior de la cavidad a [1 punto].



(i) Las densidades son simplemente:

$$\sigma_a = -\frac{q_a}{4\pi a^2} \qquad \sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2} \quad \text{(1.3 puntos)}$$

Debido a que el conductor es neutro la carga en la superficie exterior debe ser (q_a+q_b) (0.7 puntos).
(ii) Usando la ley de Gauss dentro de la cavidad a tenemos:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad \text{(0.2 puntos)}$$

$$E 4\pi r_a^2 = \frac{q_a}{\epsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a}{r_a^2}\hat{r}_a \quad \text{(0.8 puntos)}$$

donde $\vec{r}_a$ es el vector desde el centro de la cavidad a.

Integrales:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \ n \neq -1 \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| \tag{2}$$

$$\int u \ dv = uv - \int v du \tag{3}$$

$$\int e^x \, dx = e^x \tag{4}$$

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \, dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{5}$$