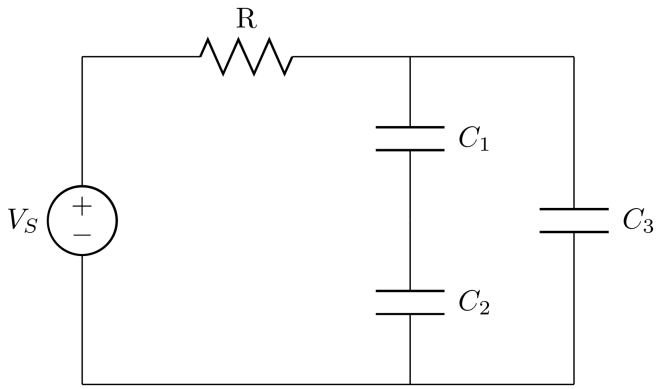
Interrogación 2

Fecha: 3 de Junio 2024

1. Considere el circuito de la siguiente figura.



(a) Calcule la capacitancia equivalente del circuito y la constante de tiempo del circuito RC resultante. ¿Qué pasa si $C_2 \to \infty$? [2 puntos]

(b) Suponga que en $t = 0$ se conecta la batería con potencial V_S con las 3 capacitancias totalmente descargadas. Calcule la corriente que fluye en la resistencia R en un instante de tiempo $t > 0$. [2 puntos]

(c) ¿Cuál es la carga total máxima almacenada por las capacitancias? ¿Cuál es la corriente máxima que fluye por la resistencia R? [2 puntos]

(a) La capacitancia equivalente de la serie C_1 y C_2 es

$$C'_{\text{eq}} \;=\; \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,.$$

La capacitancia equivalente total es el paralelo de C_3 y C'_{eq}, es decir

$$C_{\text{eq}} \;=\; C'_{\text{eq}} + C_3 \;=\; \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3\,.$$

Por lo tanto, el circuito inicial es equivalente a un circuito RC simple con resistencia R y capacitancia C_{eq}. La constante de tiempo es

$$\tau \;=\; RC_{\text{eq}} \;=\; R\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3\right)\,. \tag{1}$$

Si $C_2 \to \infty$ obtenemos que $C_{\text{eq}} \to C_1 + C_3$ y $\tau \to R(C_1 + C_3)$. Es decir que en el circuito se puede olvidar la capacitancia C_2.

(b) Se trata de condirera el proceso de carga de un circuito RC con resistencia R y capacitancia C_{eq}. La ecuación que fluye en la resistencia al tiempo $t > 0$ es

$$I(t) \;=\; I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

con $I_0 = V_S/R$ la corriente al inicial (al tiempo $t = 0$) y τ dado por (1)

(c) La corriente maxima que fluye en R es la corriente inicial I_0. La ecuación de la carga de una capacitancia en un circuito RC es

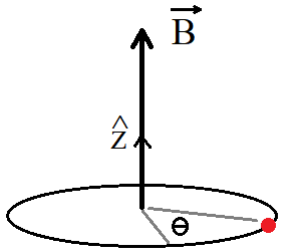
$$Q(t) \;=\; Q_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

con $Q_\infty = C_{\text{eq}} V_S$ la carga en la capacitancia (equivalente) en un tiempo infinitamente grande. Esta es la máxima carga total lmacenada por las 3 capacitancias. ■

2. Un campo magnético uniforme y constante, de magnitud B_0, está dirigido paralelo al eje z. En $t = 0$, un protón se encuentra dentro de dicho campo con una velocidad

$$\vec{v} = (4\hat{x} + 3\hat{z}) \times 10^6 \ [m/s]$$

y viaja en una trayectoria helicoidal con un radio $R = 5 \ [cm]$. Considere que para el protón, el cociente $m/q \sim 1 \times 10^{-8} \ [kg/C]$



(a) Calcule el valor de B_0. [2 puntos]

(b) Calcule el tiempo necesario para dar una vuelta alrededor de la hélice [2 puntos]

(c) ¿ En qué ángulo (medido en radianes) estará el protón al tiempo $t = 5 \times 10^7 \ [s]$? Suponga que el angulo inicial en que esta el protón es nulo. [2 puntos]

Se pueden ocupar las formulas de movimiento ciclotronico o deducir el movimiento, suponiendo que el proton parte del origen con la velocidad indicada.
a)
Como sea el movimiento es circular, de radio controlado por la velocidad inicial en el plano XoY, por lo que:

$$R = \frac{v_{x0}m}{qB_0} \Rightarrow B_0 = \frac{v_{x0}m}{qR}$$

donde v_{x0} es la velocidad inicial en x. Dado los datos:

$$B_0 = \frac{4 \times 10^6 \ [m/s]}{5 \times 10^{-2}[m]} \frac{m}{q} \sim \frac{4}{5} \left[\frac{kg}{C\,s} = Tesla\right]$$

b)
Como la rapidez es conservada en el movimiento frente a un campo magnetico uniforme constante, el tiempo de giro sera el período del movimiento, dado por la frecuencia angular $\omega_0 = qB_0/m$ y de período:

$$\omega_0 = \frac{qB_0}{m} \sim \frac{4}{5} \times 10^8 [rad/s]$$

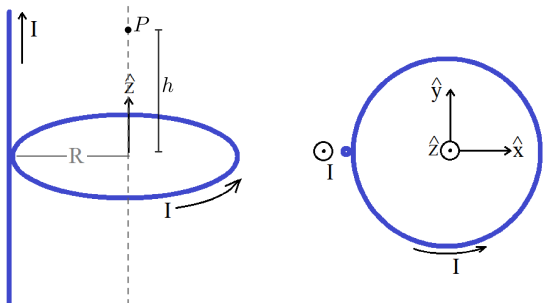
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \sim \frac{5}{2}\pi \times 10^{-8}[s]$$

c) considerando que el proton se mueve en una trayectoria circular, el angulo en que se encontrara es:

$$\Delta\theta = \omega_0 t = 4 \times 10^{15}[rad]$$

■

3. Suponga un alambre infinito alineado en la dirección $\hat{z}$ y una espira circular de radio R contenida en el plano xy, por los cuales circula una corriente electrica I constante tal como se muestra en la figura.



A partir de la ley de Biot-Savart:

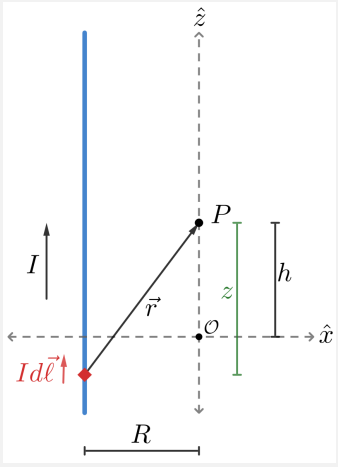
(a) Calcule el campo magnético $\vec{B}_1$ generado por el alambre en un punto P sobre el eje que pasa por el centro de la espira. [2 puntos]

(b) Calcule el campo magnético $\vec{B}_2$ generado por la espira en un punto P ubicado sobre un eje que pasa por su centro. [2 puntos]

(c) Calcule el campo magnético total $\vec{B}$ para un punto P sobre el eje que pasa por el centro de la espira circular. [2 puntos]

Se tomará el origen de coordenadas $\mathcal{O}$ como el centro del anillo.

(a) Con dicho sistema de coordenadas, la geometría para el alambre recto queda establecida en la siguiente figura:



En este caso, el elemento de línea asociado al problema es $d\vec{\ell} = dz\,\hat{e}_z$, y un elemento de corriente $Id\vec{\ell}$, ubicado a una distancia z de P, produce un campo en dicho punto dado por

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}, \tag{1}$$

en donde, de la geometría:

$$\vec{r} = R\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z \rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{z^2+R^2}. \tag{2}$$

Reemplazando:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idz\hat{e}_z\times(R\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z)}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,dz}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{e}_y, \tag{3}$$

■

dado que el alambre es infinito, se integrará de la siguiente forma

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{e}_y, \tag{4}$$

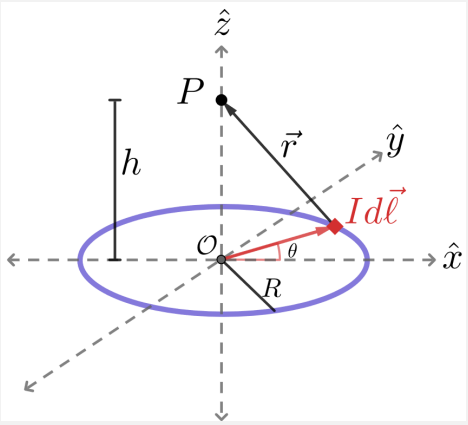
dado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{2}{R^2}, \tag{5}$$

entonces el campo es:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} \hat{e}_y. \tag{6}$$

(b) Tomando el mismo origen de coordenadas que para el ítem pasado, la geometría de este viene dada en la siguiente figura:



Un elemento de corriente $Id\vec{\ell}$ producirá un campo en P dado por:

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{7}$$

en donde, al usar coordenadas polares-cilíndricas:

$$\vec{r} = h\,\hat{e}_z - R(\cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y) \rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{h^2+R^2}. \tag{8}$$

El dicho sistema de coodenadas (polares), el elemento de línea para R constante viene dado por

$$d\vec{\ell} = R(-\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)d\theta. \tag{9}$$

Reemplazando:

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR(-\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)d\theta \times \left[h\,\hat{e}_z - R(\cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y)\right]}{(h^2+R^2)^{3/2}}. \tag{10}$$

Teniendo en cuenta que $\hat{e}_x \times \hat{e}_x = \hat{e}_y \times \hat{e}_y = 0$, $\hat{e}_x \times \hat{e}_z = -\hat{e}_y$, $\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$, $\hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x$, $\hat{e}_y \times \hat{e}_x = -\hat{e}_z$:

$$\begin{aligned} d\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR(h\sin\theta\,\hat{e}_y + R\sin\theta^2\,\hat{e}_z + h\cos\theta\,\hat{e}_x + R\cos^2\theta\,\hat{e}_z)}{(h^2+R^2)^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR(h\sin\theta\,\hat{e}_y + h\cos\theta\,\hat{e}_x + R\,\hat{e}_z)}{(h^2+R^2)^{3/2}} d\theta. \end{aligned} \tag{11}$$

La variable de integración se extiende desde 0 hasta 2π, entonces:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{IR(h\sin\theta\,\hat{e}_y + h\cos\theta\,\hat{e}_x + R\,\hat{e}_z)}{(h^2+R^2)^{3/2}} d\theta, \tag{12}$$

pero dado que ls integrales del seno y el coseno en dicho intérvalo se anulan, se tiene que:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(h^2+R^2)^{3/2}} \hat{e}_z \tag{13}$$

■

(c) El campo magnético total será la superposición de los dos campos hallados anteriormente, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{total}} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(h^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \tag{14}$$

■