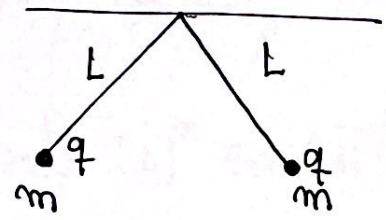
Ayudantía 1

1.

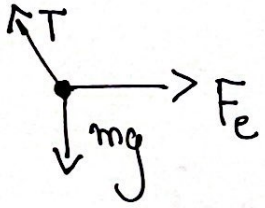


Por demostrar:

$$q = 2L\sin\theta\sqrt{\frac{mg\tan\theta}{k}}$$

El sistema está en equilibrio, luego $\sum F_x = \sum F_y = 0$.
En particular, para la carga del lado derecho se tiene su DCL:

DCL:



(i) $\sum F_x = F_e - T\sin\theta = 0$

(ii) $F_e = T\sin\theta$, pero $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = T\sin\theta$

Además r en función de L:

$r = 2L\sin\theta$, por lo tanto la ecuación queda:

(i) $T\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4L\sin^2\theta}$ *

Scanned with CamScanner

Ahora:

(ii) $\sum F_y = 0 \rightarrow T\cos\theta = mg$ *

Dividiendo (i)* en (ii)*, se obtiene

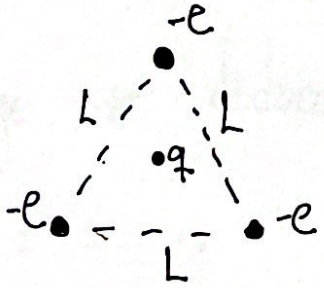
$$\text{Tan}\,\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4L\sin^2\theta \cdot mg};$$

Despejando se obtiene que:

$$q = 2L\sin\theta\sqrt{\frac{mg\tan\theta}{K}} \quad \text{con} \quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Q.E.D. //

2.



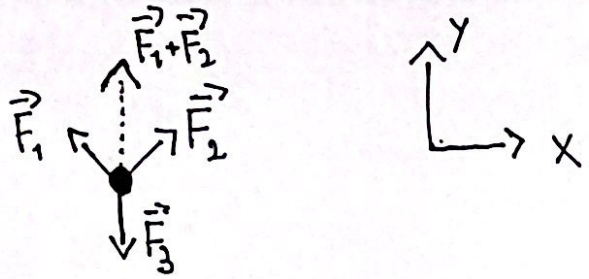
¿Cuánto vale q para que el sistema esté en equilibrio?

Lo primero es notar que q debe ser positiva, para atraer las cargas negativas a su alrededor y alcanzar el equilibrio.

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre para la carga de arriba.

Scanned with CamScanner

DCL:



Luego; aplicando la ley de Coulomb:

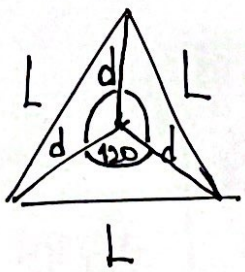
$$\vec{F}_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(-\hat{x}\cos(\pi/3)+\hat{y}\sin(\pi/3)\right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(\hat{x}\cos(\pi/3)+\hat{y}\sin(\pi/3)\right)$$

Sumando $\vec{F}_1$ con $\vec{F}_2$ sólo queda componente en $\hat{y}$.

Luego se deduce que para el equilibrio $|\vec{F}_1+\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$

$$\vec{F}_3 = \frac{-e\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \rightarrow \text{¿d?}:$$



Teo cos:

$$L^2 = d^2+d^2-2d^2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L^2 = 3d^2 \quad \circledast$$ reemplazamos en $\vec{F}_3$.

Planteamos la condición de equilibrio:

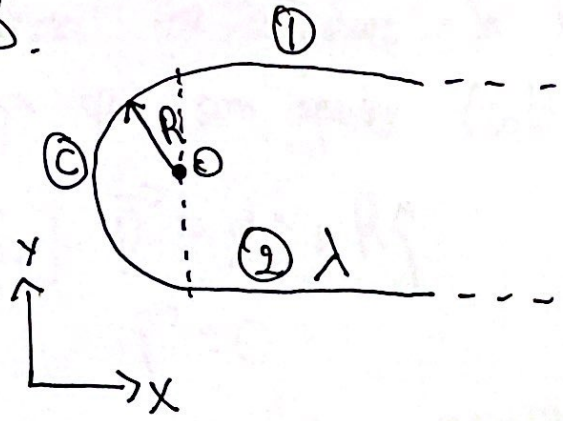
$$|\vec{F}_1+\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| \rightarrow \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\sin(\pi/3) = \frac{e\cdot q\cdot 3}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Despejando:

$$\boxed{Q = \frac{e}{\sqrt{3}}}$$

Scanned with CamScanner

3.



¿Cuanto vale $E(O)$? → Aplicamos superposición.

$$E(O) = E_c(O) + E_1(O) + E_2(O)$$

Recordar: $$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \lambda \, dl$$

E_c $\vec{r} = 0$

$\vec{R} = R\hat{\rho}$ donde $\hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$

$dl = R\,d\theta$, Reemplazando:

$$E_c(O) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{\rho}(\theta)\, d\theta = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \underbrace{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{i}\cos(\theta) + \hat{j}\sin(\theta)}_{-2}$$

$$\boxed{E_c(O) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\hat{i}}$$

Scanned with CamScanner

Ahora los alambres. Se hace para ① y se deduce para ② ya que son iguales. (sólo cambia la posición).

E_1 | $\vec{R} = x\hat{\imath} + R\hat{\jmath}$

$\vec{r} = 0$

$dl = dx$, reemplazando:

$$E_1(0) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{-R}{|R|^3}\, dl$$

$$E_1(0) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{(-x\hat{\imath} - R\hat{\jmath})}{(x^2+R^2)^{3/2}}\, dx$$

Separamos la integral en $\hat{\imath}$ y en $\hat{\jmath}$:

$$E_1(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \Big[\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x\,dx\,\hat{\imath}}{(x^2+R^2)^{3/2}}}_{(i)} + \underbrace{R\int_0^{\infty} \frac{dx\,\hat{\jmath}}{(x^2+R^2)^{3/2}}}_{(ii)}$$

Se hace el cambio de variable

$u = x^2 + R^2$

$du = 2x\,dx$ y se integra.

Scanned with CamScanner

Se obtiene:

$$E_1(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{1}{R}\hat{i}}_{(i)} + \underbrace{\frac{1}{R}\hat{j}}_{(ii)}\right]$$

Luego, para el alambre de abajo (2) se tiene:

$\vec{R} = X\hat{i} - R\hat{j}$, por lo que ese (-) en el eje y se traduce en:

$$E_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}\hat{i} - \frac{1}{R}\hat{j}\right];$$

Sumando: $E_1(0) + E_2(0) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$

Luego:

$$\boxed{E_1(0) + E_2(0) + E_c(0) = 0}$$

Scanned with CamScanner