Parte VII

Ecuaciones de Maxwell y sus bases empíricas

Capítulo 14

Ecuaciones de Maxwell

14.1. Corriente de Desplazamiento

Habíamos visto anteriormente que si un conductor con corriente posee cierta simetría favorable, el campo magnético se podía obtener fácilmente mediante la ley de Ampère

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I_{enc}$$

Esta ecuación indica que la circulación del campo magnético sobre cualquier curva cerrada es siempre $\mu_0 I_{enc}$, donde I_{enc} es la corriente que atraviesa una superficie cuyo contorno es la curva de integración.

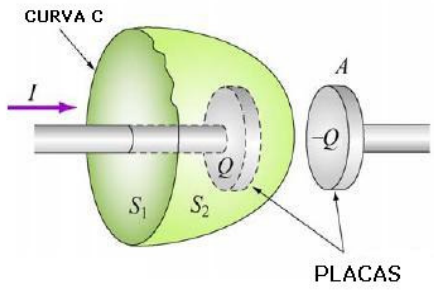
Ahora, en un medio material la ley de Ampère es

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = I$$

Esta ley se puede llevar a su forma diferencial mediante el teorema de Stokes

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = J(\vec{x})$$

Sin embargo, esta ley es inconsistente en algunas ocasiones y encontraremos entonces una generalización válida, que fue propuesta por Maxwell. Consideremos el circuito eléctrico de la figura, que consiste de un condensador de placas paralelas, que se está cargando con una corriente de magnitud constante I



Utilizando la ley de Ampère al contorno C y a la superficie S_1

$$\oint_{C} d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S_1} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = I$$

Si, por otra parte, se utiliza la ley de Ampère al contorno C y a la superficie S_2, entonces $J(\vec{x})$ es cero para todo $\vec{x} \in S_2$

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Vemos que existe entonces una ambiguedad fundamental en la ley de Ampère al escoger dos superficies de integración distintas. El error es fácil de ver al mirar su forma diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$$

Utilizamos ahora el hecho de que la divergencia de un rotor es nulo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Es inmediato que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ es **inconsistente** con la conservación de la carga en la presente situación, por que de hecho, en el volumen encerrado por ambas superficies, hay un $\partial\rho/\partial t$ distinto de cero (se está acumulando carga en el condensador).
Maxwell corrigió la ley de Ampère al agregar un término tal que de ella se desprenda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = -\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t}$$

De la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

y sustituyendo en la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x})}{\partial t}) = 0$$

de manera que la corrección de Maxwell está en agregar el término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ a la forma diferencial de la ley de Ampère, y entonces se obtiene la ley de Ampère-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x})}{\partial t}$$

es evidente que en el caso de campos que no dependen del tiempo, esta ley es igual a la ley de Ampère. La introducción del segundo término , llamado densidad de *corriente de desplazamiento*, representa una de las más grandes contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética. Veremos que al modificar ésta ley, las ecuaciones de Maxwell predicen la propagación de ondas electromagnéticas.

Por último, la forma integral de la ley de Ampère-Maxwell queda de la forma

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x})$$

En el ejemplo, al integrar en la superficie S_2, el segundo término no es nulo, debido a que hay un flujo del campo $\vec{D}$ a través de S_2 que está variando en el tiempo, de hecho la magnitud del campo crece cuando se acumula carga en el condensador.

14.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell resumen toda la teoría electromagnética. Éstas establecen la relación entre las **fuentes** (densidad de carga $\rho(t,\vec{x})$, y densidad de corriente $\vec{J}(t,\vec{x})$) con los campos $\vec{E}(t,\vec{x}), \vec{B}(t,\vec{x}), \vec{D}(t,\vec{x}), \vec{H}(t,\vec{x})$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial\vec{D}(\vec{x})}{\partial t}$$

La primera ecuación $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ es la ley de Gauss, cuya forma integral es

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) = \iiint_{V(S)} d^3x\rho(t,\vec{x})$$

La ecuación $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ es la forma diferencial de la ley de inducción de Faraday, ésta dice que un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico, en su forma integral

$$\oint_\Gamma d\vec{x}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{d}{dt}\oiint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{B}(t,\vec{x})$$

La ecuación $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ es la ley de Gauss magnética, y representa el hecho de que los monopolos magnéticos nunca han sido observados. Es decir, las líneas de campo magnético son cerradas, consecuencia de esto es que el flujo magnético sobre una superficie cerrada es siempre cero. En su forma integral

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

Por último, la ecuación $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ es una extensión de la ley de Ampère, mencionada anteriormente. Hay que notar que ésta implica la ecuación de continuidad.

Es claro que las ecuaciones de Maxwell representan expresiones matemáticas de ciertos resultados experimentales. Resulta evidente entonces que no pueden demostrarse, sin embargo, la aplicabilidad para cualquier situación puede verificarse.
Junto con la ecuación de la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$, que describe la acción de los campos sobre partículas cargadas, este conjunto de leyes nos da una descripción clásica completa de las partículas que actúan electromagnéticamente.

14.2.1. Vector de Poynting- Conservación de la Energía

Las ecuaciones de Maxwell son consistentes con la ley de conservación de la carga eléctrica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

o, en su forma integral

$$\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = -\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

intentemos establecer una ley equivalente para la **Conservación de la energía**. Podemos comenzar el análisis definiendo una densidad de energía electromagnética $\epsilon(t, \vec{x})$. Del mismo modo, definimos el **vector de Poynting** $\vec{S}(t, \vec{x})$, donde

$$\vec{S}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{S}(\vec{x})$$

es la energía electromagnética de campo cruzando una superficie $d\vec{S}(\vec{x})$ por unidad de tiempo. Notar que nuestras definiciones de $\epsilon(t, \vec{x})$ y $\vec{S}(t, \vec{x})$ están claramente inspiradas en $\rho(t, \vec{x})$ y $\vec{J}(t, \vec{x})$. Uno podría pensar entonces que la ley de conservación de la energía se escribe en la forma

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \epsilon(t, \vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(t, \vec{x})$$

Sin embargo, esto no está correcto, pues falta incluir un término que involucre el **trabajo** realizado por los campos sobre las cargas presentes en la región V (por unidad de tiempo). La fuerza neta que actúa sobre un elemento de carga por unidad de volumen es (de acuerdo a la fuerza de Lorentz)

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

de forma que el trabajo realizado sobre las cargas por unidad de tiempo es

$$W = \iiint_V d^3x \vec{f} \cdot \vec{v} = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}) \left(\vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) \right) = \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Luego, la ley de conservación de la energía debe ser como sigue

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V d^3x \epsilon(t, \vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(t, \vec{x}) + \iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

La interpretación es bien clara: la disminución de energía por unidad de tiempo en un volumen V es igual al flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo a través del contorno de V más el trabajo reaizado sobre las cargas en V por unidad de tiempo. En su forma diferencial

$$\frac{\partial \epsilon(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(t, \vec{x}) = -\vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \vec{E}(t, \vec{x})$$

Veamos que una expresión de este tipo se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{\mu_0}\vec{E}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right) + \epsilon_0\vec{E}(t,\vec{x})\cdot\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

Además

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

y

$$\vec{E}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right) = \vec{B}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})\right) - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\vec{B}(t,\vec{x})\right)$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})\right) - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\vec{B}(t,\vec{x})\right)\right) + \epsilon_0\vec{E}(t,\vec{x})\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} + \epsilon_0\vec{E}(t,\vec{x})\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\frac{\vec{B}(t,\vec{x})}{\mu_0}\right)$$

$$-\vec{J}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2(t,\vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(t,\vec{x})\right\} + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}(t,\vec{x})\times\frac{\vec{B}(t,\vec{x})}{\mu_0}\right)$$

Comparando con nuestra expresión anterior, obtenemos fórmulas explícitas para ϵ y $\vec{S}$

$$\epsilon(t,\vec{x}) = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2(t,\vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(t,\vec{x})$$

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(t,\vec{x})\times\vec{B}(t,\vec{x})$$

14.3. Ecuaciones de Maxwell en un Medio Lineal, Homogéneo e Isotrópico

Es bien sabido que la relación entre los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en general está dada por

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \left(\epsilon_0\vec{P}+\right)\vec{E}(t,\vec{x})$$

Sin embargo, en ciertos medios, la polarización depende linealmente del campo eléctrico (medios lineales), de forma que

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \epsilon\vec{E}(t,\vec{x})$$

donde ϵ es la permitividad del medio, y no depende de $\vec{x}$ para medios homogéneos e isotrópicos.

Del mismo modo, en este tipo de medios simples, el campo $\vec{H}$ está relacionado con $\vec{B}$ mediante

$$\vec{H}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(t,\vec{x})$$

donde μ es la permeabilidad del medio. De esta forma las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{\rho(t,\vec{x})}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x})$$

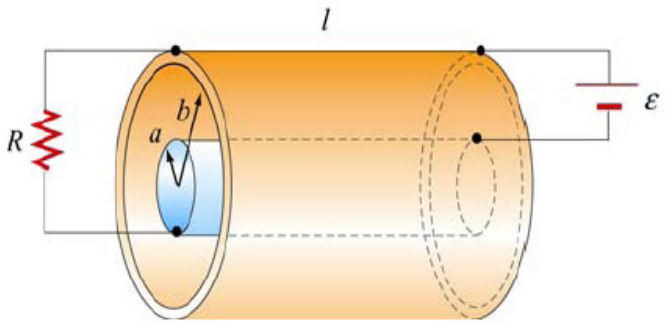
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x}) = \mu\vec{J}(t,\vec{x}) + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado para $\vec{E}$ y $\vec{B}$, donde propiedades del medio se incluyen en ϵ y μ

Problema

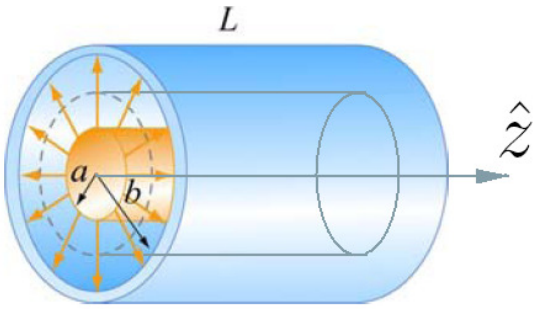
Un cable coaxial consiste de dos conductores cilíndricos concéntricos , el interior de radio a y el exterior de radio b (ambos con resistencia nula). La longitud de ambos cables l es tal que $l >> b$. El cable transmite energía en DC desde una batería a una carga. La batería provee una fem ε entre ambos conductores en un extremo del cable , y la carga es una resistencia R conectada entre los conductores al otro extremo del cable. Una corriente I fluye a través del conductor interior y regresa por el conductor exterior. La batería carga el conductor interno con carga $-Q$ y el externo con $+Q$



a) Encuentre el campo eléctrico en todas partes
b) Encuentre la dirección y magnitud de $\vec{B}$ en todas partes
c) Calcule el vector de Poynting al interior del cable
d) Al integrar $\vec{S}$ sobre una superficie apropiada, encuentre la potencia que fluye en el cable coaxial

Solución

a) Despreciando efectos de borde, se puede calcular el campo eléctrico mediante la ley de Gauss, utilizando como superficie de integración un cilindro de largo h y radio r, con $a < r < b$, como se muestra en la figura



$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \oiint_S dS(\vec{x}')\hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \oiint_S dS(\varphi, z)\hat{r} \cdot E(r)\hat{r}$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r) \oiint_S dS(r, \varphi, z) = E(r)2\pi rh$$

la carga encerrada por S es

$$q_{int} = 2\pi ah\sigma$$

donde σ es la densidad de carga (homogénea) en el conductor interno

$$\sigma = \frac{-Q}{2\pi aL}$$

con esto

$$E(r)2\pi rh = \frac{2\pi ah}{\epsilon_0}\left(\frac{-Q}{2\pi aL}\right)$$

$$E(r) = \frac{-Q}{2\pi rL\epsilon_0}$$

de forma que el campo eléctrico entre ambos conductores está dado por

$$\vec{E}(r) = \frac{-Q}{2\pi rL\epsilon_0}\hat{r}$$

Además, se sabe

$$\varepsilon = \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}')$$

tomando una curva parametrizada por $\vec{x}' = r\hat{r}$, con $\hat{r}$ alguna dirección radial fija, y $a < r < b$, se obtiene

$$\varepsilon = -\int_a^b drE(r) = -\int_a^b dr\frac{-Q}{2\pi rL\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\varepsilon = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0}\ln(b/a)$$

luego

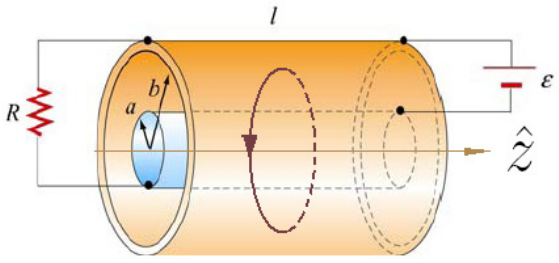
$$Q = \varepsilon 2\pi L\epsilon_0 \ln(a/b)$$

y

$$\vec{E}(r) = \frac{-\varepsilon \ln(a/b)}{r}\hat{r}$$

por supuesto, que el campo eléctrico para $r < a$ es nulo (interior de un conductor), y lo mismo ocurre para $r > b$, pues el cable coaxial es eléctricamente neutro.

b) El campo magnético para $a < r < b$ puede se obtenido mediante la ley de Ampère, utilizando como contorno una curva circular Γ concéntrica al conductor interno y de radio r.



Notar que el sentido de la corriente por el conductor interno es según $\hat{z}$. Por simetría, el campo magnético sólo dependerá de la variable r, y será tangente a la curva Γ en todos sus puntos

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi r\hat{\varphi} \cdot \vec{B}(r)\hat{\varphi} = 2\pi r B(r)$$

la corriente encerrada por Γ es simplemente I, luego

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

El campo magnético es nulo para $r > a$ (Cualquier curva encierra una corriente nula, pues ambos conductores llevan I en sentidos opuestos).

c) El vector de Poynting al interior del cable ($a < r < b$) está dado por

$$\vec{S}(r) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(r) \times \vec{B}(r) = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{-\varepsilon \ln(a/b)}{r}\right)\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)\hat{r} \times \hat{\varphi}$$

$$\vec{S}(r) = \frac{-I\varepsilon \ln(a/b)}{2\pi r^2}\hat{z}$$

El vector de Poynting representa un flujo de energía por unidad de tiempo y área en dirección $-\hat{z}$ (es decir, desde la fem hacia la resistencia). Para calcular la potencia que se transmite a través de la línea se debe calcular el flujo del vector Poynting sobre una sección transversal entre ambos conductores, esto es

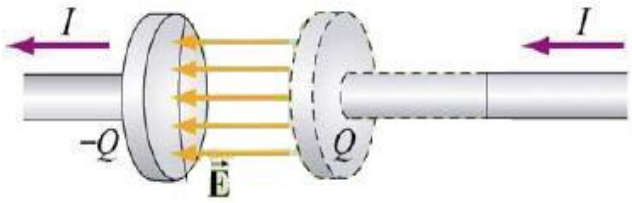
$$P = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b dr r(-\hat{z}) \cdot \frac{-I\varepsilon \ln(a/b)}{2\pi r^2}\hat{z} = I\varepsilon \ln(a/b) \int_a^b dr \frac{1}{r}$$

$$P = \varepsilon I$$

que es efectivamente la potencia que se disipa en la resistencia. Con este ejemplo se ilustra como los campos realmente son los que transportan la energía desde la fuente a la carga

Problema

Un condensador de placas paralelas circulares se está cargando de modo que entre las placas existe un campo eléctrico $\vec{E}(t)$ aproximadamente uniforme. Obtenga el campo magnético entre las placas del condensador en función de la distancia r al eje del mismo.



Solución

De la cuarta ecuación de Maxwell, tenemos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

en este caso, para la región entre placas

$$\vec{J} = \vec{0}$$

Además, en el vacío se tiene $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, y $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, con lo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ahora, integrando sobre una circunferencia a distancia r del eje de las placas, y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{B} = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) \right) = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x})}{\partial t}$$

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi r^2)$$

$$\oint_C d\vec{x} \cdot \vec{B} = B 2\pi r = \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{dE}{dt}$$

Finalmente

$$B = \frac{r}{2c^2} \frac{dE}{dt}$$

Parte VIII

Ondas Electromagnéticas

Capítulo 15

Ondas Planas Monocromáticas

Una de las consecuencias importantes de las ecuaciones de Maxwell, es la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz (La luz es, en efecto, una onda electromagnética)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

La razón es que un campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético y vice versa. El acoplamiento entre estos dos campos lleva a la generación de ondas electromagnéticas. Esta predicción fue confirmada por Hertz en 1887



Fig. 15.1: Heinrich Hertz

Heinrich Hertz (1857-1894) Físico Alemán. Clarificó y expandió la teoría electromagnética de la luz que fue propuesta por Maxwell. Fue el primero en demostrar de forma satisfactoria la existencia de ondas electromagnéticas al construír un aparato para producir y detectar ondas de radio.

15.1. Ondas electromagnéticas planas en medios no conductores y libres de fuentes

Sabemos que cargas y corrientes son fuentes de campos electromagnéticos. Más adelante veremos exactamente como son creados estos campos a partir de cierta distribución de fuentes. Por el momento, mostraremos algunas soluciones particulares a las ecuaciones de Maxwell, en primer lugar, las ondas planas. Supongamos que se quiere estudiar el comportamiento de los campos en una región del espacio libre de fuentes (Es evidente que para que existan campos, deben existir fuentes en algun lugar del espacio). Lo que quiero decir con esto es que encontraremos un tipo de solución para regiones que están lejos de las fuentes (es decir $\rho(t, \vec{x}) = 0$ en la zona de interés). También asumiremos que el medio en el cual se propagan las ondas no es

buen **conductor**, en ese caso tampoco existirá una densidad de corriente $\vec{J}(t,\vec{x})$ en respuesta al campo eléctrico. En este caso las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x})$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x}) = \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})$$

Utilizaremos ahora la conocida identidad

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{f} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{f}$$

De esta forma

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x})\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})$$

pero en regiones libre de fuentes

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

como indica la primera ecuación de Maxwell. Así

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})$$

por otro lado

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})\right) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x})$$

de forma que

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x}) - \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

definiendo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

Esta es la conocida **Ecuación de Onda**. Es decir, hemos llegado a que en un medio libre de cargas y no conductor, el campo eléctrico satisface la ecuación de onda. Las soluciones son ondas que se propagan a velocidad c. Es fácil verificar que el campo magnético satisface **exactamente** la misma ecuación, en efecto

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x})\right) - \vec{\nabla}^2\vec{B}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}^2\vec{B}(t,\vec{x})$$

por otro lado

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t,\vec{x}) \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{x}) = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(t,\vec{x})$$

En resumen

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

son las ecuaciones desacopladas para los campos $\vec{E}(t,\vec{x})$ y $\vec{B}(t,\vec{x})$.

Ecuación de Onda en una dimensión

La forma general de la ecuación de onda en una dimensión es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x,t) = 0$$

Resulta inmediato verificar que cualquier función de la forma $\psi(x \pm ct)$ satisface la ecuación de onda en una dimensión. La demostración es la siguiente: Sea $x' = x \pm ct$, con esto $\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm c$. Usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial \psi(x')}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial^2 x'} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi(x')}{\partial x'} \right) = \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x'^2} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x'^2}$$

Similarmente, las derivadas parciales con respecto a t son

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \pm c \frac{\partial \psi}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right) = \pm \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} \frac{\partial x'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}$$

Luego

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

lo cual muestra que $\psi(x \pm ct)$ es solución de la ecuación de onda en una dimensión. La ecuación de onda es un ecuación diferencial lineal, lo que impica que si $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$ son soluciones de la ecuación de onda, entonces $\psi_1(x,t) \pm \psi_2(x,t)$ también es solución .vLas ondas electromagnéticas obedecen entonces el principio de superposición

Solución a la ecuación de Onda

Para resolver la ecuación de onda que satisfacen los campos electromagnéticos, supondremos que la variación temporal de éstos es de la forma e^{iwt} (es decir, tienen una dependencia oscilatoria en el tiempo a una frecuencia bien determinada, w). A este tipo de ondas las llamaremos **monocromáticas**

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})e^{iwt}$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})e^{iwt}$$

de forma que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x}) = -w^2\vec{E}(\vec{x})$$

Entonces la parte espacial $\vec{E}(\vec{x})$ satisface

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(\vec{x}) + \frac{w^2}{c^2}\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

busquemos una solución de la forma

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

donde $\vec{k} =\mid \vec{k} \mid \hat{k}$ y $\vec{E}_0$ es un vector constante

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2\vec{E}_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = -k^2\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

donde $k =\mid \vec{k} \mid$, de forma que

$$-k^2\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{w^2}{c^2}\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0$$

En efecto, es solución si

$$k = \sqrt{\frac{w}{c}}$$

Finalmente, hemos encontrado que una solución de la ecuación de onda en medios no conductores y libres de cargas son campos de la forma

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\left(wt - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}_0 e^{i\left(wt - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}$$

con $\mid \vec{k} \mid = \frac{w}{c}$. Sin embargo, los campos deben tener divergencia nula, de forma que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

del mismo modo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$$

Ambos campos deben ser **transversales** (perpendiculares a la dirección de propagación)

Propagación en el eje z

Supongamos ahora que la dirección de propagación de los campos es en la dirección del eje z, es decir

$$\vec{k} = \beta\hat{k} = \frac{w}{c}\hat{k}$$

y

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \beta z$$

entonces

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$
$$\vec{B}(t,z) = \vec{B}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$

además, ambos campos deben ser perpendiculares al eje z. Por ejemplo, si escogemos

$$\vec{E}(t,z) = E_0 e^{i(wt-\beta z)}\hat{i}$$

de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,z) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,z)$$

se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z} E_0 e^{i(wt-\beta z)}\hat{j} = -i\beta E_0 e^{i(wt-\beta z)}\hat{j} = -iw\vec{B}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$

entonces

$$i\beta E_0 e^{i(wt-\beta z)}\hat{j} = iw\vec{B}_0 e^{i(wt-\beta z)}$$

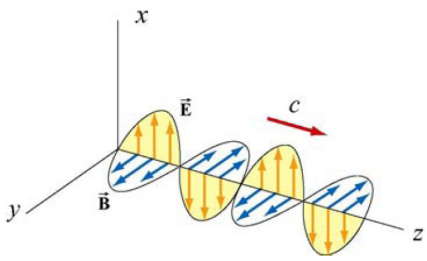
y se desprende que

$$\vec{B}_0 = \frac{E_0}{c}\hat{j}$$

Finalmente

$$\vec{E}(t,z) = E_0 e^{i(wt-\beta z)}\hat{i}$$
$$\vec{B}(t,z) = B_0 e^{i(wt-\beta z)}\hat{j}$$

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{1}{c}$$
$$\beta = \frac{w}{c}$$



Vemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están siempre en fase, es decir, alcanzan sus máximos y mínimos al mismo tiempo.

Nota

Por supuesto que los campos físicos se obtienen al tomar la parte real de las soluciones encontradas

$$\vec{E}(t,z) = E_0 \cos(wt - \beta z)\,\hat{i}$$
$$\vec{B}(t,z) = \frac{E_0}{c}\cos(wt - \beta z)\,\hat{j}$$

Resumen

1. Las ondas son transversales ya que tanto $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación, que coincide con la dirección del producto $\vec{E} \times \vec{B}$
2. Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí. Es decir $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$
3. La razón entre las magnitudes de los campos es

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{w}{\beta} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

4. La velocidad de propagación es igual a la velocidad de la luz en el medio $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
5. Las ondas electromagnéticas obedecen el principio de superposición

Vector Poynting

En general, el flujo de Energía por unidad de área (y tiempo) está descrito por el vector de Poynting

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu}\vec{E}(t,\vec{x}) \times \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{E}(t,\vec{x}) \times \vec{H}(t,\vec{x})$$

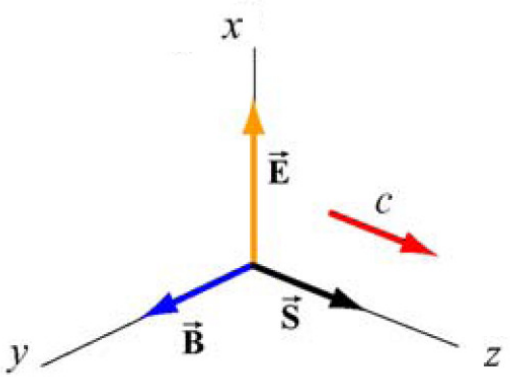
Debido a que los campos son perpendiculares

$$\mid \vec{S}(t,\vec{x}) \mid = \frac{1}{\mu} \mid \vec{E}(t,\vec{x}) \times \vec{B}(t,\vec{x}) \mid = \frac{1}{\mu} \mid \vec{E}(t,\vec{x}) \mid\mid \vec{B}(t,\vec{x}) \mid$$

En el caso de las ondas planas monocromáticas recién visto

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu}\frac{E_0 B_0}{c}\cos^2(wt - \beta x)\,\hat{k}$$

Como es de esperar, el vector de Poynting apunta en la dirección de propagación



La intensidad de la onda I, definida como el promedio temporal de $\mid \vec{S} \mid$ es

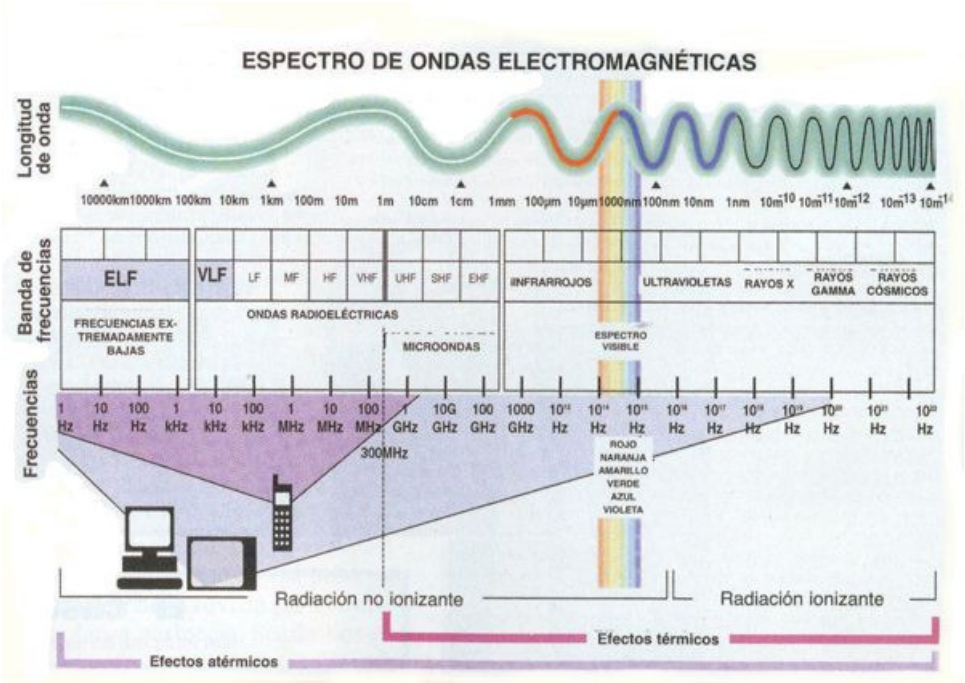
$$I = \frac{E_0 B_0}{\mu}\left\langle \cos^2(wt - \beta x)\right\rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu} = \frac{E_0^2}{2c\mu} = \frac{cB_0^2}{2\mu}$$

donde hemos usado

$$\left\langle \cos^2(wt - \beta x)\right\rangle = 1/2$$

Notar que la magnitud de la intensidad es constante. Por supuesto que esto no es muy realista, pues es bien sabido de la vida diaria que la energía de la radiación decae con la distancia. Veremos más adelante que los campos electromagnéticos tienen en general la forma de ondas esféricas, cuya amplitud decae como el inverso de la distancia $1/r$, de forma que la magnitud del vector poynting decae como $1/r^2$. Por supuesto que las ondas planas, si bien son soluciones

de las ecuaciones de Maxwell, constituyen sólo un estudio aproximado de los campos electromagnéticos muy distantes de las fuentes. (Por ejemplo, de la radiación producida por el Sol en la tierra, se puede suponer que la magnitud de los campos es constante). Veremos también que es posible generar ondas planas teóricamente, pero en la práctica no



Ejemplo

En la superficie de la atmósfera terrestre, la magnitud del vector Poynting (en promedio temporal) es $\langle S\rangle = 1{,}35\times 10^3\ (W/m^2)$.

a) Asumiendo que la radiación solar en la superficie de la atmósfera consiste en una onda sinusoidal plana, ¿Cuáles son las magnitudes del campo eléctrico y magnético ?

b) ¿Cual es el promedio temporal de la potencial radiada por el Sol? La distancia media entre el Sol y la Tierra es $R = 1{,}5\times 10^{11}$ m

Solución

a) El promedio temporal del vector Poynting esta relacionado con la magnitud del campo eléctrico según

$$\langle S\rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

La amplitud del campo eléctrico es entonces

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle S\rangle}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2\left(1{,}35\times 10^3 W/m^2\right)}{\left(3\times 10^8 m/s\right)\left(8{,}85\times 10^{-12}C^2/Nm^2\right)}} = 1{,}01\times 10^3 V/m$$

La magnitud del campo magnético es

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1{,}01\times 10^3 V/m}{3\times 10^8 m/s} = 3{,}4\times 10^{-6}T = 3{,}4\mu T$$

Notar que este campo magnético es menor que el campo magnético terrestre, que varía entre 30 y 60 μ T

b) La potencia total irradiada por el Sol a una distancia R es (en promedio)

$$\langle P\rangle = \langle S\rangle\, 4\pi R^2 = \left(1{,}35\times 10^3 W/m^2\right) 4\pi \left(1{,}5\times 10^{11} m\right)^2 = 3{,}8\times 10^{26} W$$

Por supuesto que aquí hemos supuesto que la radiación emitida por el sol corresponde a ondas esféricas. La intensidad a una distancia r del Sol es

$$I = \langle S\rangle = \frac{\langle P\rangle}{4\pi r^2}$$

la cual decrece como $1/r^2$

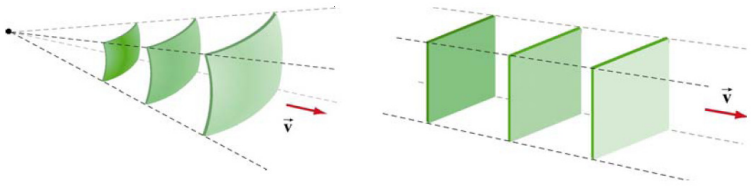


Fig. 15.2: Como veremos más adelante, los campos de radiación en general son ondas esféricas

15.2. Ondas Planas en medios conductores

Veremos que las soluciones para las ondas electromagnéticas planas en medios conductores difieren bastante en su comportamiento con respecto al caso de un medio dieléctrico perfecto (no conductor) que vimos anteriormente. Aceptaremos ahora que el medio tenga una conductividad σ, de forma que existirá una corriente eléctrica en el medio en respuesta al campo eléctrico. Si el medio es ohmico

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = \sigma\vec{E}(t,\vec{x})$$

Claramente seguiremos suponiendo que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico, de forma que las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x}) = \mu\sigma\vec{E}(t,\vec{x}) + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})$$

Al igual que antes, evaluamos

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{x})\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x})$$

Además

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{x})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sigma\vec{E}(t,\vec{x}) + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})\right) = -\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x}) - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x})$$

con esto,la ecuación para el campo eléctrico es

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}(t,\vec{x}) - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(t,\vec{x}) - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x}) = 0$$

Es fácil verificar, siguiendo los mismos pasos, que el campo magnético satisface la misma ecuación

$$\vec{\nabla}^2\vec{B}(t,\vec{x}) - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}(t,\vec{x}) - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

La única diferencia con el caso anterior (propagación en medios dieléctricos perfectos) la constituye el término $\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})$. Veremos que la conductividad del medio tendrá como efecto una **atenuación** de las ondas a medida que penetra en el material. Nuevamente supondremos que los campos son de la forma

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})e^{iwt}$$

luego

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \mu\epsilon w^2 - i\mu\sigma w\right)\vec{E}(\vec{x})e^{iwt} = 0$$

Definimos

$$k^2 = w^2\mu\epsilon - i\mu\sigma w$$

y la ecuación queda de la forma

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right)\vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Si la propagación es en el eje z, entonces la ecuación a resolver es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\vec{E}(\vec{x}) = 0$$

cuya solución es, por supuesto

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-ikz}$$

y entonces la solución completa queda

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i(wt-kz)}$$

Hay que recordar que k es un número complejo, que escribiremos en la forma $k = \beta - i\alpha$. Así

$$k^2 = \mu\epsilon w^2 - i\mu\sigma w = \beta^2 - \alpha^2 - 2i\alpha\beta$$

se debe resolver

$$2\alpha\beta = \mu\sigma w \rightarrow \alpha = \frac{\mu\sigma w}{2\beta}$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \mu\epsilon w^2 \rightarrow \beta^2 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4\beta^2} = w^2\mu\epsilon$$

$$\beta^2 - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4\beta^2} = w^2\mu\epsilon$$

$$\beta^4 - \beta^2 w^2\mu\epsilon - \frac{\mu^2\sigma^2 w^2}{4} = 0$$

$$\beta^2 = \frac{w^2\mu\epsilon \pm \sqrt{w^4\mu^2\epsilon^2 + \mu^2\sigma^2 w^2}}{2}$$

$$\beta^2 = \frac{w^2\mu\epsilon \pm w^2\mu\epsilon\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{w^2\epsilon^2}}}{2}$$

Obviamente la solución correcta es con el signo positivo, pues β es real

$$\beta^2 = w^2\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2} + 1\right)$$

$$\beta = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2} + 1\right)\right.}$$

y como

$$\alpha^2 = \beta^2 - w^2\mu\epsilon$$

$$\alpha^2 = w^2\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}+1\right) - w^2\mu\epsilon$$

$$\alpha^2 = w^2\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}-1\right)$$

$$\alpha = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}-1\right)}$$

Solución
Se concluye que las ondas planas monocromáticas en un medio con conductividad σ son de la forma

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)}$$

donde hemos asumido que la propagación es en la dirección z, y al igual que antes $\vec{E}_0$ debe ser un vector perpendicular a z. Notar que la amplitud de la onda es atenuada por un factor exponencial $e^{-i\alpha z}$, por lo que α es llamada **Constante de atenuación**

$$\beta = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}+1\right)}$$

$$\alpha = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}-1\right)}$$

Ésta es la solución exacta para ondas planas monocromáticas en un medio lineal y de conductividad σ. Notar que para un dieléctrico perfecto, la constante de atenuación es cero y se recupera el caso visto anteriormente

Observación
Este factor exponencial atenuante es el que explica que en ciertos materiales las ondas no se propaguen correctamente. Por ejemplo, para el agua de mar (que constituye un medio conductor), dentro de un gran rango de frecuencias el factor α es grande, de forma que las ondas decaen bastante rápido. (Esto explica en parte por qué los submarinos no se comunican mediante ondas electromagnéticas)

La razón física de este factor atenuante radica en la naturaleza misma del medio. Por ser conductor, existe una gran cantidad de cargas libres que son aceleradas por la prescencia del campo eléctrico (principalmente, pues ya es sabido que su magnitud es muchísimo mayor a la del campo magnético). De esta forma, parte de la energía electromagnética que se propaga es utilizada en trabajo para mover las cargas libres presentes en el medio. Con esto, resulta natural que la onda electromagnética pierda energía a medida que avanza en el material

Supongamos ahora que $\vec{E}_0 = E_0\hat{i}$. Nuevamente, de la ley de Faraday podemos determinar la relación entre las magnitudes de los campos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \times E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)}\hat{i} = -iw\vec{B}_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)}$$

$$(i\beta + \alpha) \times E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)}\hat{j} = iw\vec{B}_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)}$$

Se obtiene $\vec{B}_0 = B_0\hat{j}$ con

$$B_0 = \frac{i\beta + \alpha}{iw}E_0$$

$$B_0 = \frac{\beta - i\alpha}{w}E_0 = \frac{k}{w}E_0$$

con

$$k = \sqrt{w^2\mu\epsilon - i\mu\sigma w}$$

$$B_0 = \sqrt{\mu\epsilon - \frac{i\mu\sigma}{w}}E_0 = \sqrt{\frac{\mu\sigma + iw\mu\epsilon}{iw}}E_0$$

y entonces

$$\frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{iw}{\sigma\mu + iw\mu\epsilon}}$$

o

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon}} = \eta$$

Esta razón, que depende de las características del medio (μ, ϵ, σ) y de la frecuencia w, se conoce como **impedancia característica del medio**. Notar que en general $(\sigma \neq 0)$ es un número complejo, esto quiere decir que para medios con conductividad, el campo eléctrico y magnético **no están en fase**

La impedancia característica en representación polar es

$$\eta = \mid \eta \mid e^{i\vartheta}$$

donde

$$\mid \eta \mid = \left(\frac{\frac{w}{\mu}}{\sqrt{(\sigma^2 + w^2\epsilon^2)}}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mu/\epsilon}{\sqrt{(\frac{\sigma}{\epsilon w})^2 + 1)}}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\left(1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2\right)^{1/4}}$$

y

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(\pi/2 - Arctan(w\epsilon/\sigma)\right)$$

$$\tan 2\vartheta = \frac{\sigma}{w\epsilon}$$

Con esto, la solución general para ondas planas que se propagan en dirección z queda

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)} \hat{e}_1$$
$$\vec{H}(z,t) = \frac{E_0}{\mid \eta \mid} e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z-\vartheta)} \hat{e}_2$$
$$e_1 \times e_2 = \hat{k}$$

La velocidad de propagación es

$$c = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}+1\right)}}$$

y la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{w\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}+1\right)}}$$

15.3. Solución para buenos conductores

Si la conductividad es grande en el sentido $\sigma >> w\epsilon$, entonces

$$\beta = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}+1\right)\right)} \approx w\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2w}}$$
$$\alpha = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}-1\right)\right)} \approx w\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2w}}$$

Es decir, aproximadamente se tiene

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}}$$

En términos de la frecuencia en Hertz $f = \frac{w}{2\pi}$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \sigma}$$

En este caso los campos son atenuados rápidamente. Se define la **profundidad de penetración** como la distancia dentro del material a la cual los campos han decaido en un factor $1/e$ (aproximadamente al 30 % de su valor original)

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma}}$$

Además, en este caso la impedancia característica queda

$$\eta = \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4} = \frac{E_0}{H_0}$$

Es decir, los campos se encuentran en un desfase de $\vartheta = \pi/4$

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)} \hat{e}_1$$
$$\vec{H}(z,t) = \frac{E_0}{\mid \eta \mid} e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z-\pi/4)} \hat{e}_2$$
$$e_1 \times e_2 = \hat{k}$$

La velocidad de propagación es

$$c = \frac{w}{\beta} = \sqrt{\frac{2w}{\sigma\mu}} = w\delta$$

y la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 2\pi\delta$$

Nota: Notar que aquí, la definición de un buen conductor no es una propiedad única del material, puesto que debe tenerse $\sigma >> w\epsilon$. Es decir, un material se considera buen conductor en determinado rango de frecuencias.

15.4. Resumen sobre las ondas planas monocromáticas

Hemos visto que las ecuaciones de Maxwell aceptan como solución campos electromagnéticos que están descritos matemáticamente por ondas planas. Para una propagación según el eje z, los campos son de la forma

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)} \hat{e}_1$$
$$\vec{H}(z,t) = \frac{E_0}{\mid \eta \mid} e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z-\vartheta)} \hat{e}_2$$
$$e_1 \times e_2 = \hat{k}$$

1. En un dieléctrico perfecto (conductividad nula), la constante de atenuación es cero, y la impedancia intrínseca es un número real puro

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \rightarrow \frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$

En el espacio vacío, la impedancia intrínseca es

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi$$

En este caso

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{i(wt-\beta z)} \hat{e}_1$$
$$\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(wt-\beta z)} \hat{e}_2$$
$$e_1 \times e_2 = \hat{k}$$

Con

$$\beta = \frac{w}{c} = w\sqrt{\mu\epsilon}$$

2. En un buen conductor ($\sigma >> w\epsilon$), los campos son fuertemente atenuados a medida que se propagan en el medio. Aquí, en un análisis aproximado

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \sigma}$$

la impedancia intrínseca es un complejo con fase $\pi/4$ y su magnitud es

$$\mid \eta \mid = \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}}$$

Los campos son atenuados por un factor $1/e$ al ingresar una distancia igual a la profundidad de penetración

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Problema

Dado $\vec{E}(t,\vec{x}) = E_m \sin(wt - \beta z)\,\hat{j}$ en el espacio libre, encuentre $\vec{D}(t,\vec{x})$, $\vec{B}(t,\vec{x})$ y $\vec{H}(t,\vec{x})$. Dibuje $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en $t = 0$

Solución

Se tiene

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = E_m \sin(wt - \beta z)\,\hat{j}$$

de aquí es inmediato que

$$\vec{D}(t,\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(t,\vec{x}) = \epsilon_0 E_m \sin(wt - \beta z)\,\hat{j}$$

Además, de la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

como la propagación es en z, la única derivada parcial espacial para el campo eléctrico que no es nula es la que involucra z, es decir

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \times \vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \times \vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial z} E_m \sin(wt - \beta z)\,\hat{i} = \beta E_m \cos(wt - \beta z)\,\hat{i} = -\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

Luego

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = -\frac{\beta}{w} E_m \sin(wt - \beta z)\,\hat{i} = -\frac{E_m}{c} \sin(wt - \beta z)\,\hat{i}$$

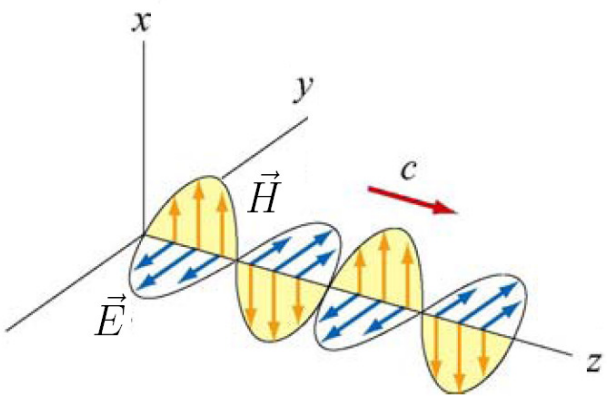
Por último, el campo $\vec{H}(t,\vec{x})$ es, simplemente

$$\vec{H}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(t,\vec{x}) = -\frac{E_m}{\mu_0 c} \sin(wt - \beta z)\,\hat{i}$$

En $t = 0$, los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están dados por

$$\vec{E}(0,\vec{x}) = -E_m \sin(\beta z)\,\hat{j}$$

$$\vec{H}(0,\vec{x}) = \frac{E_m}{\mu_0 c} \sin(\beta z)\,\hat{i}$$



Problema

Dado $\vec{H} = H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{i}$ en el espacio libre, encuentre $\vec{E}$

Solución

Una forma de resolver este problema es notando que $\vec{H}$ representa una onda plana que se propaga en dirección $-\hat{z}$. Luego, debe tenerse que el vector poynting tenga esta dirección, lo cual se logra con un campo eléctrico polarizado según $\hat{j}$, en efecto

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E\hat{j} \times H\hat{i} = -EH\hat{k}$$

Además, se cumple que

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

o, equivalentemente

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\beta \mu_0}{w}$$

y entonces

$$\vec{E} = \frac{w\mu_0}{\beta} H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j}$$

Otra forma, es recordando que el espacio vacío tiene conductividad nula y entonces

$$\vec{\nabla} \times H = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times H = \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \times \vec{H} = \beta H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j}$$

entonces

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \beta H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j}$$

$$\vec{D} = \frac{\beta}{w} H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j}$$

$$\vec{E} = \frac{\beta}{w\epsilon_0} H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j}$$

En efecto, es el mismo resultado anterior

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\epsilon_0} H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j}$$

$$\vec{E} = \frac{w\mu_0}{\beta} H_m e^{i(wt+\beta z)}\hat{j}$$

Problema

Dados

$$\vec{E} = 30\pi e^{i\left(10^8 t+\beta z\right)}\hat{i}, \vec{H} = H_m e^{i\left(10^8 t+\beta z\right)}\hat{j}$$

en el espacio libre, encontrar H_m y β $(\beta > 0)$

Solución

Estas son ondas planas que satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío, de forma que

$$\frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 (m/s)$$

Luego

$$\beta = \frac{w}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3}$$

Además

$$\frac{\mid E \mid}{\mid B \mid} = c \rightarrow \frac{\mid E \mid}{\mid H \mid} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

Luego

$$\mid H_m \mid = \frac{30\pi}{120\pi} = \frac{1}{4}$$

Además, las ondas se propagan en la dirección $-\hat{k}$, por lo que

$$\vec{E} \times \vec{H} = -\hat{k}$$

entonces

$$H_m = -\frac{1}{4}$$

y

$$\vec{E} = 30\pi e^{i\left(10^8 t+\frac{1}{3}z\right)}\hat{i}$$
$$\vec{H} = -\frac{1}{4} e^{i\left(10^8 t+\frac{1}{3}\right)}\hat{j}$$

Problema

En un medio homogéneo no conductor donde $\mu_r = 1$, encuentre ϵ_r y w si

$$\vec{E} = 30\pi e^{i(wt-(4/3)y)}\hat{z}, \vec{H} = 1{,}0\pi e^{i(wt-(4/3)y)}\hat{i}$$

¿Cuál es la velocidad de la luz en esta región?

Solución

Se trata de ondas planas con $\beta = 4/3$. Luego

$$\frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} = \frac{3\times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Además

$$\frac{E}{H} = 30\pi = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r\epsilon_0}} = 120\pi\sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}}$$

Así

$$\frac{w}{4/3} = \frac{3\times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$30\pi = 120\pi\sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}}$$

Resolviendo

$$\epsilon_r = 16$$

$$w = 10^8(rad/s)$$

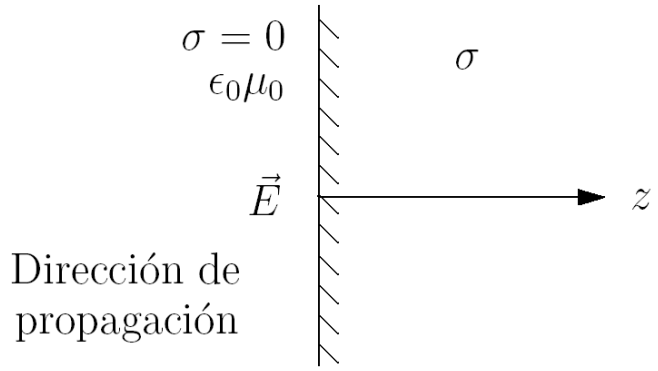
la velocidad de la luz en este medio es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 16\epsilon_0}} = \frac{3\times 10^8}{4}$$

es un cuarto de la velocidad de la luz en el vacío

Problema

Suponga $\vec{E} = e^{-\alpha z} e^{i(wt-\beta z)} \hat{i}$ (V/m) con $f = 100$ Mhz, en la superficie de un conductor de cobre, $\sigma = 58$ MS/m, localizado en $z > 0$. Examine la atenuación a medida que la onda se propaga en el interior del conductor



Solución

A una profundidad z, la magnitud del campo eléctrico es

$$\mid \vec{E} \mid = e^{-\alpha z} = e^{-z/\delta}$$

donde $\delta = 1/\alpha$ es la profundidad de penetración

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 6{,}61 \mu m$$

Es decir, después de 6,61 micrómetros dentro del conductor, el campo es atenuado en $\frac{1}{e}$, a un 36,8 % de su valor inicial. A 5δ o 33 micrómetros, la magnitud es 0,67 % de su valor inicial

Problema

Para agua de mar con $\mu = \mu_0$ y conductividad $\sigma \approx 4{,}3$ (S/m), ¿a qué frecuencia la profundidad de penetración es de un metro?

Solución

Supongamos un rango de frecuencias en el que el agua de mar es considerado un buen conductor, es decir

$$\sigma >> w\epsilon$$

(notar que la permitividad del vacío es del orden de 10^{-12}, y la constante dieléctrica ϵ_r en general no es muy grande). La profundidad de penetración está dada por

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu w \sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 w \sigma}}$$

$$\delta^2 = \frac{2}{\mu_0 w \sigma} \rightarrow w = \frac{2}{\sigma \mu_0 \delta^2}$$

Se desea $\delta = 1$ (m), entonces

$$w = \frac{2}{4{,}3 \times 4\pi \times 10^{-7} 1^2} = 3{,}7 \times 10^5$$

o, en Hertz

$$f = \frac{w}{2\pi} = 58{,}6 \times 10^3$$

o sea, una frecuencia de aproximadamente 60 kHz para una profundidad de un metro. Si un submarino está equipado con un receptor de muy alta sensibilidad y si se utiliza un transmisor de muy alta potencia, es posible comunicarse con otro submarino sumergido. Sin embargo, debe utilizarse una frecuencia muy baja, y aún en este caso se produce una atenuación muy fuerte de la señal. En efecto, a 5 profundidades de penetración (5 metros), la magnitud de los campos se reduce al 1 % del valor original, y por consiguiente la potencia se reduce al 0,01 % de la potencia incidente

Problema

Una onda plana uniforme que se propaga en un medio determinado, tiene un campo eléctrico

$$\vec{E}(t,z) = 5e^{-\gamma z}e^{i10^8 t}\hat{j}$$

Si el medio se caracteriza por

$$\sigma = 3{,}5 S/m$$

$$\epsilon_r = 1$$

$$\mu_r = 18$$

Determine γ, $\vec{H}$, η y la profundidad de penetración para el medio. ¿Después de recorrer qué distancia la onda se atenúa al 10 % de su valor inicial? ¿Cuál es la velocidad de propagación en este medio?

Solución

Las ondas planas que son solución de las ecuaciones de Maxwell son de la forma

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 e^{-ikz}e^{iwt}$$

donde

$$k = \beta - i\alpha$$

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 e^{-i\beta z - \alpha z}e^{iwt}$$

comparando con

$$\vec{E}(t,z) = 5e^{-\gamma z}e^{i10^8 t}\hat{j}$$

se aprecia que se trata de una onda plana a frecuencia $w = 10^8$ Hertz, polarizada según $\hat{j}$ y con

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

Notemos que

$$\frac{\sigma}{w\epsilon} = \frac{3{,}5}{\epsilon_0 \times 10^8} = \frac{3{,}5}{8{,}854 \times 10^{-12} \times 10^8} = 3953{,}02$$

Se aprecia que

$$\sigma >> w\epsilon$$

de forma que el medio se puede considerar un buen conductor. En este caso

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} = \frac{10^8 \times 18 * 4\pi \times 10^{-7} \times 3{,}5}{2} = 62{,}9159$$

Con esto

$$\gamma = 62{,}9159 + i62{,}9159 = \frac{62{,}9159}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$$

La profundidad de penetración es

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 0{,}0158942$$

La impedancia característica del medio es (en una muy buena aproximación)

$$\eta = \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{10^8 \times 18 \times 4\pi 10^{-7}}{3{,}5}} e^{i\pi/4} = 25{,}4219 e^{i\pi/4}$$

El campo $\vec{H}(t,z)$ está dado por

$$H(t,z) = -\frac{5}{\mid \eta \mid} e^{-\gamma z} e^{i10^8 t} e^{-i\pi/4} \hat{i} = -\frac{5}{\mid \eta \mid} e^{-\alpha z} e^{i\left(10^8 t - \beta z - \pi/4\right)} \hat{i}$$

$$H(t,z) = -0{,}196681 e^{-62{,}9159 z} e^{i\left(10^8 t - 62{,}9159 z - \pi/4\right)} \hat{i}$$

La velocidad de propagación está relacionada con la constante de propagación β

$$\beta = \frac{w}{c} \rightarrow c = \frac{10^8}{62{,}9159} = 1,5895 \times 10^8$$

un poco más de la mitad de la velocidad de la luz en el vacío. Por último, para determinar a que distancia dentro del material la onda se ha atenuado hasta un 10 % de su valor original, se debe resolver

$$0{,}1 = e^{-\alpha x} = e^{-62{,}9159 x}$$

$$-2{,}30258 = -62{,}9159 x$$

$$x = 3{,}65978 \times 10^{-2} = 3{,}65978 cm$$

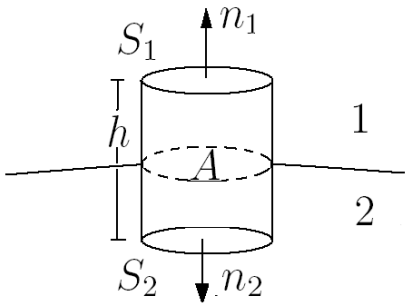
Capítulo 16

Condiciones de borde en la frontera

Las condiciones que deben satisfacer los campos electromagnéticos en una zona interfacial que separa dos madios se deducen, por supuesto, de las ecuaciones de Maxwell. La más simple de obtener es la que cumple la componente normal del campo magnético, y se obtiene a partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

En cualquier zona interfacial entre dos medios se puede construír una superficie cilíndrica como se muestra en la figura



Integrando la ecuación de Maxwell sobre el volumen limitado por el cilindro se obtiene

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\hat{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

$$\iint_{S_1} dS_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) + \iint_{S_2} dS_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) + \iint_{S_3} dS_3 \hat{n}_3 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

donde S_3 es el manto del cilindro, mientras S_1 y S_2 las tapas. Si $\vec{B}(t, \vec{x})$ es finito, el último término se puede anular si $h \to 0$. Además, en este límite ($h \to 0$) las superficies S_1 y S_2 son prácticamente las mismas, $S_1 \to S_2$, con $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$ y entonces

$$\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\hat{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = \iint_{S_1} dS_1 \left(\hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) - \hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) \right) = 0$$

$$\hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) - \hat{n}_1 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

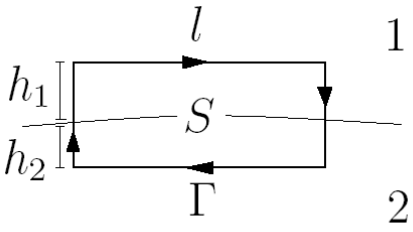
Es decir, la componente **normal** del campo magnético es continua al atravesar un medio

$$B_{1n} = B_{2n}$$

Ahora veremos que la componente tangencial del campo eléctrico es continua. A partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

Integremos esta ecuación sobre una superficie plana rectangular como la de la figura



El contorno de S es el camino Γ indicado en la figura. Utilizando el teorema de Stokes

$$\iint_S d\vec{S}(\hat{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x})\right) = \oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = - \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

En el caso en que $h_1 \to 0$, $h_2 \to$

$$lE_{1t} - lE_{2t} = 0$$

la integral de superficie por supuesto es nula ya que la superficie total tiende a cero $S \to$(suponemos que la derivada temporal del campo magnético es finita). De aquí se deduce que la componente **tangencial** de $\vec{E}(t, \vec{x})$ debe ser continua al atravesar una interfaz entre dos medios

$$lE_{1t} = lE_{2t}$$

Utilizando ahora la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x})$$

y utilizando la misma superficie para el caso del campo magnético (cilindro de altura h) se obtiene

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

$$\iint_{V(S)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(t, \vec{x}) = \iint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

si $h \to 0$, entonces

$$(D_{1n} - D_{2n})\, A = \sigma A$$

donde A es la superficie de las tapas, y σ es la densidad superficial de carga en la frontera que divide a los dos medios. Así, la componente normal del campo $\vec{D}(t, \vec{x})$ es discontinua al atravesar una superficie cargada

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

o, equivalentemente para medios lineales

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

Por último, de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times H(t, \vec{x}) = \vec{J}(t, \vec{x}) + \frac{\partial D(t, \vec{x})}{\partial t}$$

y utilizando la misma superficie de integración que el caso del campo eléctrico, se obtiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times H(t, \vec{x})\right) = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot J(t, \vec{x}) + \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial D(t, \vec{x})}{\partial t}$$

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \times H(t, \vec{x}) = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot J(t, \vec{x}) + \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial D(t, \vec{x})}{\partial t}$$

Si nuevamente h_1 y h_2 tienden a cero, y la derivada temporal del campo $\vec{D}$ es finita

$$H_{1t} - H_{2t} = \vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}$$

donde n es la perpendicular a la superficie S. Es decir, la componente tangencial de $\vec{H}(t, \vec{x})$ es discontinua al atravesar un medio con densidad de carga superficial en la interfaz.

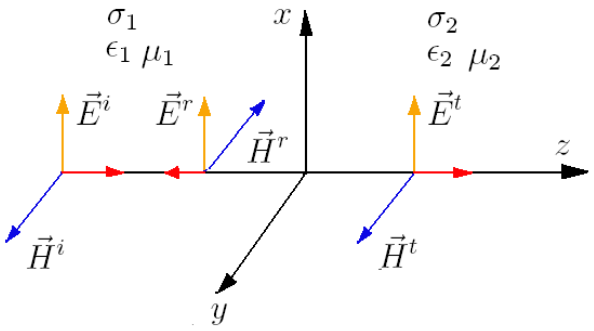
Resumen

Al atravesar una interfaz entre dos medios (1 y 2), los campos electromagnéticos satisfacen

$$B_{1n} = B_{2n}$$
$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$
$$H_{1n} - H_{2n} = \vec{J} \cdot \hat{n}$$

16.1. Condiciones de Borde para incidencia normal

Las ondas electromagnéticas que se propagan en materiales generalmente entran en el material a través de una frontera entre éste y otro medio, que puede ser aire o vacío. Aquí utilizaremos las condiciones de borde que satisfacen los campos para el caso de ondas que inciden normalmente sobre una interfaz. (Esto significa que la dirección de propagación es perpendicular a la frontera). Veremos que la onda incidente será acompañada por una onda reflejada y una transmitida. Consideremos el caso que se muestra en la figura



Se aprecia una onda incidente ($\vec{E}^i(x,z)$, $\vec{H}^i(y,z)$) que se desplaza en el sentido positivo de z, los campos $\vec{E}^r(x,z)$, $\vec{H}^r(y,z)$ describen la onda reflejada que se desplaza en el sentido negativo de z, y $\vec{E}^t(x,z)$, $\vec{H}^t(y,z)$ describen la onda transmitida. La interfaz es el plano $z=0$, con el medio 1 a la izquierda y el medio 2 a la derecha. Más concretamente

$$\vec{E}^i(t,z) = E^i e^{-ikz} e^{iwt} \hat{i}$$
$$\vec{E}^r(t,z) = E^r e^{ikz} e^{iwt} \hat{i}$$
$$\vec{E}^t(t,z) = E^t e^{-ikz} e^{iwt} \hat{i}$$
$$\vec{H}^i(t,z) = H^i e^{-ikz} e^{iwt} \hat{j}$$
$$\vec{H}^r(t,z) = -H^r e^{ikz} e^{iwt} \hat{j}$$
$$\vec{H}^t(t,z) = H^t e^{-ikz} e^{iwt} \hat{j}$$

Estas son ondas planas que se propagan en dirección z. Son soluciones a las Ecuaciones de Maxwell si

$$k = \beta - i\alpha$$

Con α y β encontrados anteriormente (Son propiedad de la frecuencia y del medio en el cual se propagan las ondas). Interesa determinar que relación se cumple entre las magnitudes de los campos incidentes, reflejados y transmitidos. Para ello, usaremos el hecho de que el campo eléctrico debe ser continuo en $z=0$ (es completamente transversal a la interfaz). Esto significa

$$\vec{E}^i(t,0) + \vec{E}^r(t,0) = \vec{E}^t(t,0)$$

o bien

$$E^i + E^r = E^t$$

Además, si no hay una corriente superficial en la interfaz, el campo $\vec{H}(t,z)$ es también continuo en $z=0$

$$\vec{H}^i(t,0) + \vec{H}^r(t,0) = \vec{H}^t(t,0)$$

o bien

$$H^i - H^r = H^t$$

Además, para cada onda las magnitudes entre $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están dadas por las impedancias intrínsecas del medio. En resumen, se debe resolver lo siguiente

$$E^i + E^r = E^t$$
$$H^i - H^r = H^t$$
$$\frac{E^i}{H^i} = \eta_1 = \frac{E^r}{H^r}$$
$$\frac{E^t}{H^t} = \eta_2$$

Utilizando la última junto a las dos primeras se obtiene lo siguiente

$$\frac{E^t}{H^t} = \eta_2 = \frac{E^i + E^r}{H^i - H^r}$$
$$\eta_2 = \frac{E^i + E^r}{\frac{1}{\eta_1}\left(E^i - E^r\right)}$$
$$\eta_2 = \eta_1 \frac{E^i + E^r}{E^i - E^r} \rightarrow E^i\left(\eta_2 - \eta_1\right) = E^r\left(\eta_1 + \eta_2\right)$$

Finalmente

$$E^r = E^i\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right)$$
$$E^t = E^i\left(\frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\right)$$
$$H^r = H^i\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right)$$
$$H^t = H^i\left(\frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right)$$

Es inmediato que si $\eta_1 = \eta_2$, entonces $\vec{E}^r = 0$, $\vec{H}^r = 0$, lo cual es evidente pues en este caso no existe ninguna interfaz. Recordar que la impedancia de un medio está dada en general por

$$\eta = \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon_0}}$$

Para un buen conductor

$$\eta \approx \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4}$$

Para un medio dieléctrico perfecto (conductividad nula)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Para el espacio vacío

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

16.1.1. Incidencia Normal en un conductor perfecto: Ondas estacionarias

Un caso particular interesante de la ley de reflexión y transmisión en una interfaz para ondas que inciden normalmente es cuando el medio 2 es un conductor perfecto. En este medio, la impedancia intrínseca tiende a cero

$$\lim_{\sigma\to\infty} \eta_2 = \lim_{\sigma\to\infty} \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon_0}} = 0$$

Luego, se cumple

$$E^r = E^i \left(\frac{-\eta_1}{\eta_1}\right) = -E^i$$

$$E^t = 0$$

$$H^r = H^i \left(\frac{-\eta_1}{\eta_1}\right) = -H^i$$

$$H^t = 0$$

Es decir, la onda es **completamente reflejada**. Veremos que esta condición da origen a la creación de una onda estacionaria. El campo eléctrico total queda

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}^i(t,z) + \vec{E}^r(t,z)$$

$$\vec{E}(t,z) = E^i e^{-ikz} e^{iwt}\hat{i} - E^i e^{ikz} e^{iwt}\hat{i}$$

$$\vec{E}(t,z) = E^i e^{iwt}\hat{i}\left(e^{-ikz} - e^{ikz}\right)$$

Si el medio 1 es un dieléctrico perfecto, entonces $k = \beta$ ($\alpha = 0$)

$$\vec{E}(t,z) = E^i e^{iwt}\hat{i}\left(e^{-i\beta z} - e^{i\beta z}\right) = -2i\sin(\beta z) E^i e^{iwt}\hat{i}$$

Tomando la parte real

$$\vec{E}(t,z) = 2E^i \sin(\beta z)\sin(wt)\hat{i}$$

Esta es una onda que se anula para valores determinados de z ($\forall t$), dados por

$$z = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{wn\pi}{c} = \frac{fn}{2\lambda f}$$

$$z = \frac{n}{2\lambda}, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

donde λ es la longitud de onda en el medio 1. Por otra parte, el campo eléctrico se anula para todo t tal que

$$\sin wt = 0 \rightarrow t = \frac{n\pi}{w}, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Esta onda es llamada **estacionaria** puesto que no se propaga, sino que simplemente oscila en el espacio y el tiempo.

Para el campo magnético se tiene

$$\vec{H}(t,z) = \vec{H}^i(t,z) + \vec{H}^r(t,z)$$

$$\vec{H}(t,z) = H^i e^{-i\beta z} e^{iwt}\hat{j} + H^i e^{i\beta z} e^{iwt}\hat{j}$$

$$\vec{H}(t,z) = H^i e^{iwt}\hat{j}\left(e^{-i\beta z} + e^{i\beta z}\right) = 2H^i e^{iwt}\cos(\beta z)\hat{j}$$

tomando la parte real

$$\vec{H}(t,z) = 2H^i \cos(\beta z)\cos wt\hat{j}$$

Se anula para

$$\beta z = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\beta}$$

$$z = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Además, se aprecia que se anula para todo t tal que

$$\cos wt = 0$$

Se aprecia que para ondas estacionarias, el campo eléctrico y magnético están en un desfase de $\pi/2$

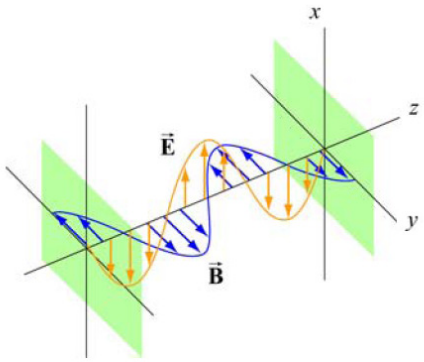
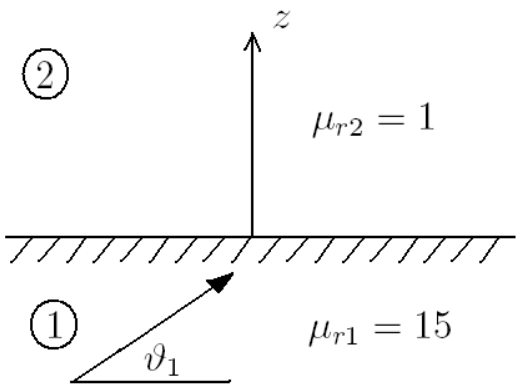


Fig. 16.1: Ondas estacionarias se pueden lograr al confinar ondas electromagnéticas entre dos planos perfectamente conductores

Problema

En la región 1 de la figura, $\vec{B}_1 = 1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j} + 0{,}4\hat{k}$ (T). Encuentre $\vec{H}_2$ ($\vec{H}$ en $z = +0$) y los ángulos entre los campos y una tangente a la superficie



Solución

Se tiene

$$\vec{B}_1 = 1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j} + 0{,}4\hat{k}$$

la componente normal del campo magnético a una superficie es siempre continua, es decir

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{z} = \vec{B}_2 \cdot \hat{z}$$

se desprende que el campo magnético en $z = 0+$ es de la forma

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{i} + B_{2y}\hat{j} + 0{,}4\hat{k}$$

Además, en la regiòn 1 la permeabilidad está dada por

$$\mu_1 = \mu_{r1}\mu_0 = 15\mu_0$$

de forma que el campo $\vec{H}$ en $z = 0-$ es

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{15\mu_0}\vec{B}_1 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j} + 0{,}4\hat{k}\right)$$

La componente tangencial de $\vec{H}$ es continua al atravesar una superficie **sin** densidad de carga superficial. Suponiendo que éste es el caso, el campo $\vec{H}$ en $z = 0+$ es de la forma

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j}\right) + H_{2z}\hat{k}$$

En resumen

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{i} + B_{2y}\hat{j} + 0{,}4\hat{k}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j}\right) + H_{2z}\hat{k}$$

Además

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2$$

luego

$$B_{2x} = \mu_0 H_{2x} = \frac{1{,}2}{15}$$

$$B_{2y} = \mu_0 H_{2y} = \frac{0{,}8}{15}$$

$$B_{2z} = \mu_0 H_{2z} = 0{,}4 \rightarrow H_{2z} = \frac{0{,}4}{\mu_0}$$

Finalmente

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j}\right) + \frac{0{,}4}{\mu_0}\hat{k}$$

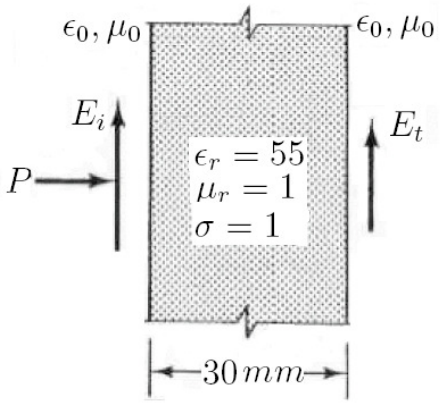
Problema

Un campo $\vec{E}$ de 500 Mhz viaja por el espacio libre e incide perpendicularmente sobre un medio parcialmente conductor como se ilustra en la figura. Si la amplitud del campo incidente es $\vec{E}_{i0} = 100\ V/m$, determine

a) Las amplitudes de las ondas una vez atravesado completamente el medio (E_{t0}, H_{t0})

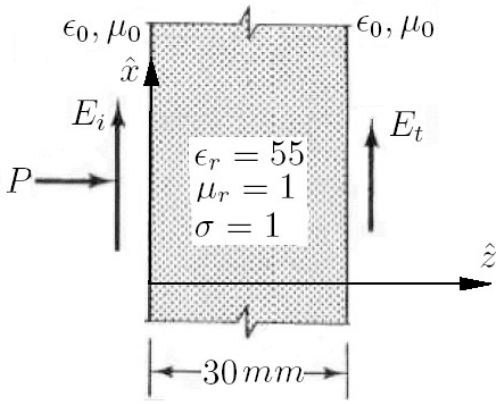
b) La potencia temporal que porta la onda incidente

c) La potencia temporal que porta la onda transmitida nuevamente al espacio



Solución

Definimos el eje $\hat{z}$ como se indica en la figura, donde el origen coincide con el extremo izquierdo del medio parcialmente conductor



La onda incidente está descrita por

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{i\left(5\times10^8 t - \beta z\right)} \hat{i}, z < 0$$

donde la constante de propagación en el vacío está dada por

$$\beta = \frac{w}{c} = 5 \times 10^8 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

Al incidir normalmente sobre el medio conductor, parte de la onda se refleja, y otra es transmitida hacia el medio. Si E_{m0} es la amplitud de la onda transmitida en la interfaz ($z = 0$), entonces se cumple

$$E_{m0} = E_{i0} \left(\frac{2\eta_m}{\eta_0 + \eta_m} \right)$$

donde η_m es la impedancia intrínseca del medio conductor

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon}} = \sqrt{\frac{i5 \times 10^8 \mu_0}{1 + i5 \times 10^8 55\epsilon_0}}$$

$$\eta_2 = 44{,}5594 + i13{,}2865$$

El que sea un número complejo implica que existirá un desfase entre la onda incidente y la onda transmitida al medio. η_0 es la impedancia intrínseca del vacío

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

Así, para $E_{i0} = 100$

$$E_{m0} = 21{,}3182 + i5{,}63173i = 22{,}0495e^{i0{,}258274}$$

Con esto, la onda transmitida al medio parcialmente conductor está descrita por

$$\vec{E}_m(t,z) = E_{m0}e^{-\alpha_m z}e^{i(wt-\beta_m z)}, 0 < z < 30 \times 10^{-3}$$

$$\vec{E}_m(t,z) = 22{,}0495e^{-\alpha_m z}e^{i\left(5\times10^8 t-\beta_m z+0{,}258274\right)}, 0 < z < 30 \times 10^{-3}$$

donde la constante de atenuación (α_m) en este medio está dada por

$$\alpha_m = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}-1\right)\right.}$$

$$\alpha_m = 5 \times 10^8 \sqrt{\left(\frac{\mu_0 55\epsilon_0}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{5 \times 10^8 55\epsilon_0}\right)^2}-1\right)\right.} = 24{,}26005$$

Así

$$\vec{E}_m(t,z) = 22{,}0495e^{-24{,}26005z}e^{i\left(5\times10^8 t-\beta_m z+0{,}258274\right)}, 0 < z < 30 \times 10^{-3}$$

La magnitud del campo en $z = 30 \times 10^{-3}$ es

$$E_{mt} = 22{,}0495e^{-24{,}26005\times30\times10^{-3}} = 10{,}6491$$

Si E_{t0} es la amplitud del campo eléctrico transmitido nuevamente al vacío, se cumple

$$E_{t0} = E_{mt} \mid \left(\frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_m}\right) \mid = 19{,}0375$$

la amplitud del campo $\vec{H}$ se relaciona con la del campo eléctrico según

$$\frac{E_{t0}}{H_{t0}} = \eta_0$$

$$H_{t0} = \frac{\eta_0}{E_{t0}} = 0{,}0504984$$

b) El promedio temporal del vector Poynting de la onda incidente es

$$\left\langle \vec{S}_i \right\rangle = \frac{E_{i0}^2}{2c\mu_0}\hat{k} = 13{,}2629\hat{k}(W/m^2)$$

c) Para la onda transmitida nuevamente al vacío

$$\left\langle \vec{S}_t \right\rangle = \frac{E_{t0}^2}{2c\mu_0}\hat{k} = 0{,}480681\hat{k}(W/m^2)$$

Problema

Se requiere que Ud. haga una estimación de la intensidad de campo eléctrico, en V/m, que requerirría generar un radar de 2 Ghz de penetración de suelo, con el objeto de detectar piezas metálicas de gran tamaño, enterradas a una profundidad de hasta 2 metros. Dependiendo de la composición y la humedad del terreno, este puede tener el siguiente rango de parámetros

$$10^{-4} \leq \sigma \leq 10^{-2}$$

$$3 \leq \epsilon_{rt} \leq 8$$

$$\mu_{rt} = 1$$

Por otra parte se estima que las piezas enterradas tienen el siguiente rango de parámetros

$$10^7 \leq \sigma_m \leq 6 \times 10^7$$

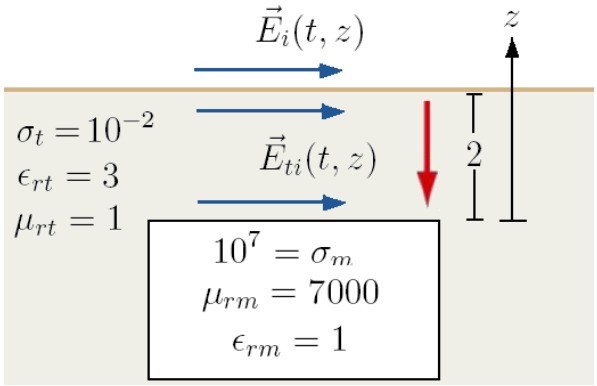
$$1 \leq \mu_{rm} \leq 7000$$

$$\epsilon_{rm} = 1$$

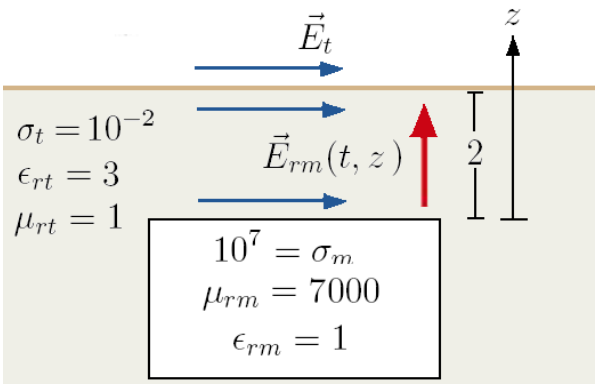
Se requiere saber que intensidad de campo eléctrico en V/m se requiere en el aire, sobre la superficie del terreno, para detectar en el aire sobre la superficie del terreno, un rebote del objeto metálico que tenga una amplitud de $1V/m$, asumiendo incidencia normal

Solución

Para estimar la intensidad mínima de campo eléctrico que debe generar el radar, debemos suponer la peor situación posible. Supondremos que hay una pieza metálica situada a 2 m de profundidad en la tierra. El caso menos favorable para la propagación en la tierra es cuando ésta presenta su máxima conductividad (mayor atenuación). Más aún, para que ésta se comporte como un buen conductor (atenuante) debe tenerse $\sigma_t >> w\epsilon_t$, de forma que consideramos el caso de mayor conductividad y menor constante dieléctrica.
La reflexión en la placa metálica será buena en la medida que η_m (impedancia intrínseca del metal) sea lo más pequeña posible. De esta forma, el peor de los casos para la reflexión en la pieza metálica ocurre cuando η_m toma su máximo valor posible, y entonces cuando posee la menor conductividad y la mayor permeabilidad magnética.



En la figura de arriba se aprecia una onda incidente $\vec{E}_i$ (campo emitido por el radar en la superficie), y una onda transmitida en la tierra $\vec{E}_{ti}$, que se propaga en dirección $-z$, esta onda será reflejada por la pieza metálica en $z = 0$



En esta figura se muestra el campo que se ha reflejado en el metal y se propaga hacia la superficie, que llamaremos $\vec{E}_{rm}$, y la onda recibida finalmente en la superficie, llamada $\vec{E}_t$. Sabemos que esta última tiene una magnitud de $E_t = 1\ (V/m)$. La magnitud de la onda reflejada en el metal se describe por

$$E_{rm}(z) = E_{r0}e^{-\alpha z}$$

donde α es el coeficiente de atenuación en la tierra

$$\alpha = w\sqrt{\left(\frac{\mu_t\epsilon_t}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma_t}{w\epsilon_t}\right)^2}-1\right)\right.}$$

con $w = 2\times 10^9$ Hz, $\sigma_t = 10^{-2}\ (S/m)$, $\mu_t = 4\pi 10^{-7} = \mu_0$, $\epsilon_t = \epsilon_{rt}\epsilon_0 = 3\times 8{,}854\times 10^{-12}$. Reemplazando estos valores

$$\alpha = 1{,}08742$$

Debido a las condiciones de contorno en la interfaz $(z = 2)$, se cumple

$$E_t = 1 = E\mid \frac{2\eta_0}{\eta_0+\eta_t}\mid$$

donde E es la magnitud del campo $\vec{E}_{rm}$ en $z = 2$, y η_0 es la impedancia intrínseca del aire, considerada igual a la del vacío.

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

y la impedancia intrínseca de la tierra

$$\eta_t = \sqrt{\frac{iw\mu_0}{\sigma_t + iw\epsilon_0\epsilon_{rt}}} = 217{,}434 + i3{,}2564$$

con esto se obtiene

$$E = \mid \frac{\eta_0+\eta_t}{2\eta_0}\mid = 0{,}788393 V/m$$

Además

$$E = E_{rm}(z=2) = E_{r0}e^{-\alpha 2} = E_{r0}e^{-1{,}08742\times 2}$$

de donde la magnitud de la onda reflejada en el metal en $z = 0$ es

$$E_{r0} = Ee^{1{,}08742\times 2} = 6{,}93842 V/m$$

Ahora, esta onda reflejada en el metal proviene de la onda $\vec{E}_{ti}$ que fue transmitida a la tierra. La magnitud de esta última se puede expresar como

$$E_{ti} = E_0 e^{\alpha z}$$

donde E_0 (magnitud en $z = 0$) está relacionada con E_{r0} mediante

$$E_{r0} = E_0 \mid \frac{\eta_m - \eta_t}{\eta_m + \eta_t} \mid$$

donde la impedancia intrínseca de la pieza de metal es

$$\eta_m = \sqrt{\frac{iw\mu_0\mu_m}{\sigma_m + iw\epsilon_0\epsilon_m}}$$

con $w = 2 \times 10^9$ Hz, $\sigma_m = 10^7$ (S/m), $\mu_m = 700$, $\epsilon_m = 1$ resulta

$$\eta_m = 2{,}35095 + i2{,}35095$$

Notar que es un complejo con fase $\pi/4$, que es lo que se obtiene para un buen conductor. Con todo esto

$$E_0 = E_{r0} \mid \frac{\eta_m + \eta_t}{\eta_m - \eta_t} \mid = 7{,}09235$$

Justo en $z = 2$, la magnitud de la onda transmitida a la tierra es

$$E_{ti}(2) = E_0 e^{\alpha z} = 7{,}09235 e^{1{,}08742 \times 2} = 62{,}4177 V/m$$

Si E_i es la magnitud de la onda que emite el radar en la superficie, entonces se cumple

$$E_{ti}(2) = E_i \mid \frac{2\eta_t}{\eta_t + \eta_0} \mid$$

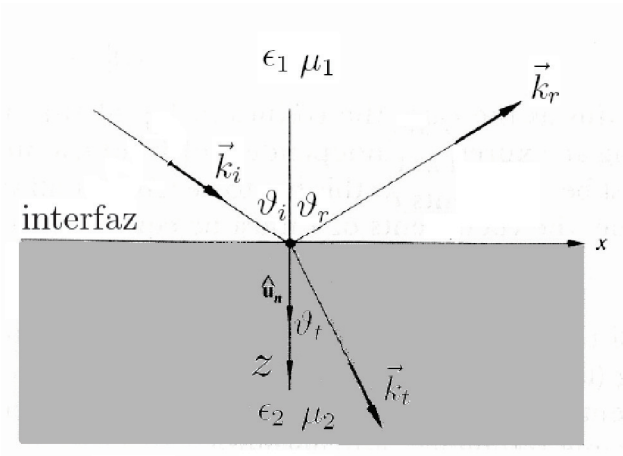
$$E_i = 62{,}4177 \mid \frac{\eta_t + \eta_0}{2\eta_t} \mid$$

$$E_i = 85{,}3109$$

Es decir, se requiere emitir un campo de magnitud aproximadamente $E_i = 85,3$ (V/m)

16.2. Reflexión y Refracción en la frontera de dos medios dieléctricos. Incidencia Oblicua

Un caso más general que el discutido en la sección de incidencia normal es el de la reflexión y refracción de una onda plana que incide oblicuamente por el plano de una zona interfacial de un dieléctrico. La situación está descrita por la siguiente figura



El sistema de coordenadas que utilizaremos se ilustra en la figura. Los medios sobre y bajo el plano $z = 0$ están caracterizados por permitividades y permeabilidades $\{\epsilon_1, \mu_1\}$ y $\{\epsilon_2, \mu_2\}$ respectivamente. Una onda plana con vector de onda $\vec{k}_i$ y frecuencia w incide desde el medio 1. La onda refractada y reflejada tienen vectores de onda $\vec{k}_t$ y $\vec{k}_r$, respectivamente, y $\hat{u}_n$ es un vector unitario normal dirigo desde el medio 1 al medio 2. (En el dibujo, concide con la dirección z). La onda incidente está descrita por

$$\vec{E}_i(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\left(wt - \vec{k}_i \cdot \vec{x}\right)}$$

$$\vec{H}_i(t, \vec{x}) = \frac{1}{\eta_1}\left(\frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\beta_1}\right)$$

donde $\vec{k}_i$ es la dirección de propagación de la onda incidente, cuya magnitud es $k_i = \beta_1 = \frac{w}{c_1} = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} w$. Además $\vec{E}_0$ debe tener una dirección perpendicular a $\vec{k}_i$ (las ondas electromagnéticas son transversales). Para la onda refractada

$$\vec{E}_t(t, \vec{x}) = \vec{E}_t e^{i\left(wt - \vec{k}_t \cdot \vec{x}\right)}$$

$$\vec{H}_t(t, \vec{x}) = \frac{1}{\eta_2}\left(\frac{\vec{k}_t \times \vec{E}_t}{\beta_2}\right)$$

con $k_t = \beta_2 = \frac{w}{c_2} = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} w$. Por último, la onda reflejada está descrita por

$$\vec{E}_r(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\left(wt - \vec{k}_r \cdot \vec{x}\right)}$$

$$\vec{H}_r(t, \vec{x}) = \frac{1}{\eta_1}\left(\frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\beta_1}\right)$$

notar que la magnitud del vector de onda reflejada es igual al de la incidente, $k_r = \beta_1$.

La existencia de condiciones de borde en la interfaz $z = 0$, que se deben satisfacer para todos los puntos en el plano en todo instante, implica que la variación espacial (y temporal) de

los campos debe ser la misma en $z = 0$. De esta forma, las ondas reflejadas y refractadas deben tener la misma frecuencia w que la incidente si las condiciones en la frontera se satisfacen para todo t. Además, debe tenerse que las 3 ondas deben tener la misma fase en $z = 0$

$$\left(\vec{k}_i \cdot \vec{x}\right)\Big|_{z=0} = \left(\vec{k}_t \cdot \vec{x}\right)\Big|_{z=0} = \left(\vec{k}_r \cdot \vec{x}\right)\Big|_{z=0}$$

De aquí se aprecia que los tres vectores de onda deben permanecer en un plano, llamado **plano de incidencia**. En la figura, corresponde al plano $x - z$. Esta condición se puede reescribir en términos de los ángulos de incidencia ϑ_i, de reflexión ϑ_r y de refracción ϑ_t. Notar que ningún vector de onda tiene componente según j, luego

$$\left(\vec{k}_i \cdot \vec{x}\right) = (k_{ix}x + k_{iz}z)\Big|_{z=0} = k_{ix}x = k_i \sin\vartheta_i x$$

análogo para el resto, así

$$k_i \sin\vartheta_i x = k_r \sin\vartheta_r x = k_t \sin\vartheta_t x$$
$$k_i \sin\vartheta_i = k_r \sin\vartheta_r = k_t \sin\vartheta_t$$

Como $k_i = k_r$, se obtiene que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión

$$\sin\vartheta_i = \sin\vartheta_r$$

Además, se obtiene la **ley de Snell**

$$k_i \sin\vartheta_i = k_t \sin\vartheta_t$$

$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_2}{\epsilon_1\mu_1}}$$
$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_2}{\epsilon_1\mu_1}} = \frac{c_1}{c_2}$$

16.2.1. Polarización paralela y perpendicular

$$\vartheta_i, \vartheta_r, \vartheta_t$$
$$\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t$$
$$\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{E}_t, \vec{H}_t$$