Examen

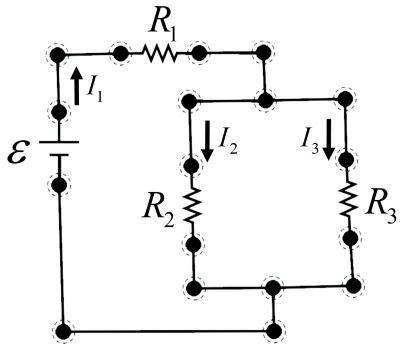
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesores: E. Arévalo, F. Castillo, M.A. Díaz,
A. Meza, A. Russomando y A. Varas
15 de diciembre, 2021, 18:30 hrs.

Importante:

- El examen tiene una duración de 2 horas.
- El examen es individual. Se permite el uso de apuntes personales y material impreso.
- No se puede usar ningún tipo de aparato electrónico. El uso de celulares, tabletas y dispositivos similares será sancionado.
- La copia será sancionada de acuerdo a las reglas de la universidad.
- Escriba de forma clara su nombre, RUN y sección en cada una de las hojas que entregue.
- Consultas solo de enunciado, durante la primera media hora de la evaluación.

Ej. 1 — (6 puntos)

Considere un circuito constituido por una FEM $\mathcal{E}$ y tres resistencias conectadas tal como se muestra en la figura. El valor de las resistencias y de la FEM se dan por conocidos. Las expresiones que se preguntan abajo deben ser dadas en términos de las resistencias R_1, R_2, R_3 y de $\mathcal{E}$.



a)Determine las expresiones de las corrientes I_1, I_2 e I_3 mostradas en la figura. (3 puntos)

b)¿Cuál es la expresión de la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia R_3? (1 punto)

c)¿Cuál es el valor de la potencia disipada por la resistencia R_3? (1 punto)

d)Si el valor de la resistencia R_2 fuera infinito, $R_2 = \infty$, ¿cuál sería el valor de la corriente que circula por la resistencia R_3? (1 punto)

Solución (Ej. 1) —
a)
Por las reglas de Kirchhoff se puede obtener que

$$I_1 = I_2 + I_3, \tag{1}$$

$$\mathcal{E} = R_1 I_1 + R_2 I_2, \tag{2}$$

$$\mathcal{E} = R_1 I_1 + R_3 I_3. \tag{3}$$

Nótese que restando de la ecuación (3) la ecuación (2) se obtiene que

$$R_2 I_2 = R_3 I_3. \tag{4}$$

Despejando la corriente I_2 de la ecuación (2) y la corriente I_3 de la ecuación (3) y sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - R_1 I_1}{R_2} + \frac{\mathcal{E} - R_1 I_1}{R_3}.$$

De esta última expresión se obtiene que

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}(1/R_2 + 1/R_3)}{1 + R_1/R2 + R_1/R3} = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3)}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}. \quad \text{1pt}$$

Sustituyendo la expresión de I_1 en la ecuación (2) se obtiene

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} - \frac{\mathcal{E}(R_1 + \frac{R_1R_3}{R_2})}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} = \frac{\mathcal{E}R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}. \quad \text{1pt}$$

Por último, sustituyendo la expresión de I_2 en la ecuación (4) se obtiene

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3} - \frac{\mathcal{E}(R_2R_1/R_3 + R_1)}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}. \quad \text{1pt}$$

b)

$$V_3 = R_3 I_3 = \frac{\mathcal{E}R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}. \quad \text{1pt}$$

c)

$$P_3 = R_3 I_3^2 = R_3 \left(\frac{\mathcal{E}R_2}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 R_2^2 R_3}{(R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2)^2}. \quad \text{1pt}$$

d)

La corriente I_3 se puede escribir de la forma

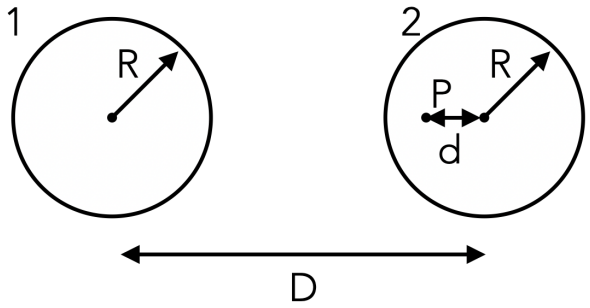
$$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3 + R_1 + R_3/R_2}$$

por tanto cuando $R_2 \to \infty$, I_3 toma la forma

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3 + R_1}. \quad \text{1pt}$$

Ej. 2 — (6 puntos)

Dos cilindros infinitos y paralelos, de radio $R = 30$ cm, están separados una distancia $D = 90$ cm (ver figura). Si el primer cilindro presenta una carga volumétrica uniforme $\rho_1 = 8\ \mu\text{C/m}^3$, y no hay campo eléctrico en un punto P a distancia $d = 9$ cm desde el eje del segundo cilindro, ¿cuál es la densidad de carga ρ_2 (supuesta uniforme) del segundo cilindro?



Solución (Ej. 2) —

Aprovechamos de la simetría del problema con Gauss, se puede calcular el campo eléctrico de un cilindros indefinido. Consideramos el campo por un radio menor del radio del cilindro y por un radio mayor del radio del cilindro.
$\Phi_C = \int_C E_0 \hat{n} dS = 2\pi r L E_0(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ 2pt
Asi que $Q_{int} = \rho\pi r^2 L$ si r<R, y $Q_{int} = \rho\pi R^2 L$ si r>R

De aca se puede recabar el campo electrico:
$E_{int} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$ si r<R, $E_{ext} = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$ si r>R 2pt

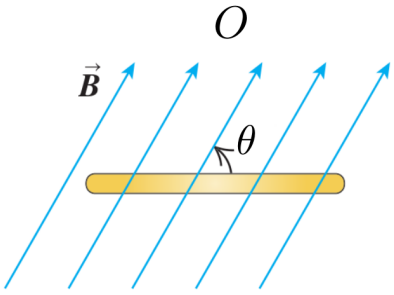
Y estas ecuaciones se pueden usar para ambos cilindros. Con el principio de superposición ahora podemos solucionar el problema
$E_1(D-d) = E_2(d)$

$\frac{\rho_1 R^2}{2\epsilon_0(D-d)} = \frac{\rho_2 d}{2\epsilon_0}$

$\rho_2 = \rho_1 \frac{R^2}{d(D-d)} = 9{,}87\mu C$ 2pt

Ej. 3 — (6 puntos)

Una espira conductora, plana y circular, de radio R se encuentra en reposo en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, cuya dirección forma un ángulo θ con el plano de la espira, tal como se muestra en la figura. El campo magnético varía con el tiempo de acuerdo con $B = B_0 e^{-\alpha t}$.



a) Calcule la magnitud de la fem inducida en función del tiempo. (2.0 puntos)

b) Determine el instante en que la fem inducida es igual a 1/10 de su valor inicial. (2.0 puntos)

c) Determine si la dirección de la corriente inducida en la espira a favor o en contra del movimiento de las manecillas del reloj al observar la espira desde arriba (punto O). (2.0 puntos)

Solución (Ej. 3) —

a) La magnitud de la fem inducida está dada por:

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \qquad \text{0.5pt}$$

Sea $\vec{A}$ un vector perpendicular a la espira (hacia arriba en la figura) cua magnitud corresponde al área de la espira, entonces:

$$|\mathcal{E}| = A\sin\theta\left|\frac{dB}{dt}\right| = (\pi R^2)\sin\theta\,(\alpha B_0)\left(e^{-\alpha t}\right) \qquad \text{1.5pt}$$

b) La magnitud de la fem inducida está dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{10}\mathcal{E}_0 = \frac{1}{10}\left[(\pi R^2)\sin\theta\,(\alpha B_0)\right] \qquad \text{0.5pt}$$

Así:

$$(\pi R^2)\sin\theta\,(\alpha B_0)\left(e^{-\alpha t}\right) = \frac{1}{10}\left[(\pi R^2)\sin\theta\,(\alpha B_0)\right] \quad \rightarrow \quad \ln\frac{1}{10} = -\alpha t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\ln 10}{\alpha} \qquad \text{1.5pt}$$

c) El campo $\vec{B}$ está *en la dirección* de $\vec{A}$, por lo tanto $\Phi_B > 0$. Además el campo $\vec{B}$ es cada vez más débil a medida que t aumenta, por lo tanto la magnitud de Φ_B también disminuye y por lo tanto $d\Phi_B dt < 0$ y de acuerdo a la ley de Faraday $\mathcal{E} > 0$. 1.5pt
Así, la dirección de la corriente inducida en la espira es positiva, es decir, en contra del movimiento de las manecillas del reloj (vista la espira desde el punto O). 0.5pt

Ej. 4 — (6 puntos)

Considere los siguientes alambres, todos ubicados en el plano xy. El primero es un alambre recto e infinito en $x = 0$ y $z = 0$. Este alambre lleva una corriente $I > 0$ en la dirección $+\hat{y}$. El segundo alambre también es recto e infinito, está en $x = L$ y $z = 0$, y lleva una corriente I en la dirección opuesta $-\hat{y}$. A una distancia d del segundo alambre hay una espira cuadrada de lado a, cuyos vértices están en: (1) $x = L + d$, $y = 0$, $z = 0$, (2) $x = L + d + a$, $y = 0$, $z = 0$, (3) $x = L + d + a$, $y = a$, $z = 0$, (4) $x = L + d$, $y = a$, $z = 0$. La corriente I varía en el tiempo, es decir, $\dot{I} \neq 0$, de una forma no especificada.

Calcule la f.e.m. ε inducida en la espira y su inductancia. Indique el sentido de la corriente inducida en la espira para los casos en que la corriente I disminuye con el tiempo y aumenta con el tiempo.

Solución (Ej. 4) —

La magnitud del campo magnético producido por un alambre recto e infinito con corriente I depende de la distancia r al alambre:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{5}$$

Entonces, el flujo ϕ_1 producido por el primer alambre en la espira cuadrada es,

$$\phi_1 = \int_{r=L+d}^{L+d+a} a\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{r=L+d}^{L+d+a}\frac{dr}{r} = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r\Big|_{r=L+d}^{L+d+a} = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{L+d+a}{L+d} \tag{6}$$

Este flujo tiene dirección $-\hat{z}$. 1.0pt .
El flujo ϕ_2 que produce el segundo alambre en la espira es,

$$\phi_2 = \int_{r=d}^{d+a} a\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{r=d}^{d+a}\frac{dr}{r} = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r\Big|_{r=d}^{d+a} = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d} \tag{7}$$

Este flujo tiene dirección $+\hat{z}$. 1.0pt . El flujo total ϕ en la dirección $+\hat{z}$ es la diferencia,

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\big[\ln\frac{d+a}{d} - \ln\frac{L+d+a}{L+d}\big] = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{(d+a)(L+d)}{d(L+d+a)} \tag{8}$$

1.0pt .
La f.e.m. inducida es,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -a\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi}\ln\frac{(d+a)(L+d)}{d(L+d+a)} \tag{9}$$

1.0pt .
La inductancia es,

$$L = a\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{(d+a)(L+d)}{d(L+d+a)} \tag{10}$$

1.0pt .
La corriente inducida tiene el sentido de las manecillas del reloj cuando la corriente crece ($\dot{I} > 0$), y el sentido contra las manecillas del reloj cuando la corriente decrece ($\dot{I} < 0$). 1.0pt .