Solución Ayudantía 25

11 de Noviembre 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

1 Campos Electromagnéticos Variantes en el Tiempo

1.1 Campos Electromagnéticos Variantes en el Tiempo - Resultados de Aprendizaje

Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Calcular el flujo magnético a través de una superficie mediante su definición.
- ☑ Identificar y expresar matemáticamente el vector normal a la superficie del circuito a inducir.
- ☑ Determinar la fem inducida mediante la Ley de Faraday en circuitos estáticos.
- ☐ Determinar la fem inducida mediante la Ley de Faraday en circuitos en movimiento.
- ☑ Comprender teóricamente la inducción de una corriente a partir de la oposición al cambio temporal del campo magnético.
- ☑ Identificar el sentido de la corriente inducida en un circuito mediante la Ley de Lenz.
- ☑ Conocer la unidad de medida para el flujo magnético.

1.2 Ley de Faraday-Lenz

Se define el flujo de campo magnético a través de una superficie como:

$$\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

Si es que la superficie lo permite, también se puede decir que:

$$\Phi_B = B_\perp A \tag{2}$$

Donde "$B_\perp$" es la componente de "$\mathbf{B}$" ortogonal a la superficie.
La unidad del flujo magnético en el S.I es el "Weber":

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2 \tag{3}$$

La Ley de Faraday indica que la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado será:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{4}$$

Además, se puede expresar tanto de forma integral como diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{6}$$

Donde "S" es la superficie delimitada por la curva "L".

Los conductores también pueden sufrir diferencias de potencial en algunos de sus puntos si estos se encuentran moviéndose con velocidad "$\mathbf{v}$" en campos magnéticos constantes "$\mathbf{B}$". Luego, el campo eléctrico inducido estará dado por:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

De esta manera, el módulo de la fem será:

$$|\varepsilon| = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{7}$$

Si es que "$\mathbf{v}$" es perpendicular a "$\mathbf{B}$" y el largo de la espira es constante, entonces:

$$|\varepsilon| = Bvl$$

Por último, la Ley de Lenz enuncia que la corriente inducida en un circuito debido a la variación temporal del flujo magnético es siempre opuesta al crecimiento/decrecimiento del mismo.

1.2.1 "Ex 2023-2", Problema 11, Facultad de Física

Considere las dos bobinas de la figura.

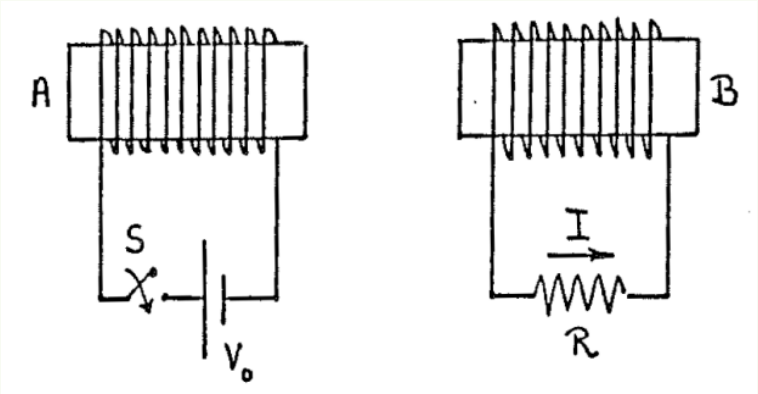


Figura 1. Esquema sobre las bobinas.

Suponga que se hacen los siguientes experimentos independientes con ellas:

I. El interruptor S está cerrado y se abre

II. El interruptor S está abierto y se cierra

III. Con el interruptor cerrado A se aleja de B

IV. Con el interruptor cerrado A se acerca a B

¿Para cuáles de los cuatro experimentos anteriores la corriente I que pasa por la resistencia R circulará en el sentido mostrado en la figura?

a) En los experimentos I y IV

b) En los experimentos II y III

c) Solamente en el experimento II

d) Solamente en el experimento I

Solución

Paso Único: Ley de Faraday-Lenz

Para que la corriente I circule en el sentido mostrado en la figura, la oposición a la variación de flujo magnético debe ingresar de izquierda a derecha en la bobina B. Mientras el interruptor esté cerrado, por el circuito A circulará una corriente de izquierda a derecha por la bobina A, generando un campo magnético que se cerrará de derecha a izquierda por regla de la mano derecha y que ingresará por la parte derecha de la bobina B.

Si es que la bobina A se aleja de B o el interruptor S está abierto y se cierra, la intensidad de corriente por A aumenta y/o la magnitud de campo magnético producido decae, logrando que la corriente circule en el sentido deseado por Ley de Lenz.

1.2.2 "Ex 2021-2", Problema 3, Facultad de Física

Una espira conductora, plana y circular de radio R se encuentra en reposo en un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, cuya dirección forma un ángulo ϕ con el plano de la espira, tal como se muestra en la figura. El campo magnético varía con el tiempo de acuerdo con $B = B_0 e^{-\alpha t}$.

a) Calcule la magnitud de la fem inducida en función del tiempo.

b) Determine el instante en que la fem inducida es igual a 1/10 de su valor inicial.

c) Determine si la dirección de la corriente inducida en la espira es a favor o en contra del movimiento de las manecillas del reloj al observar la espira desde arriba.

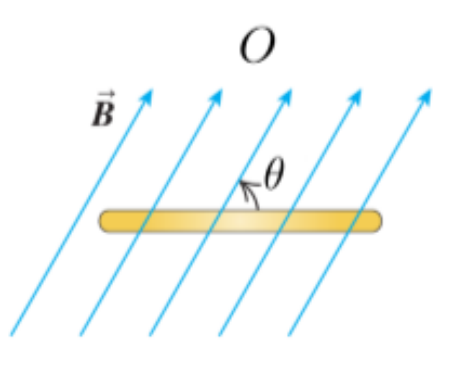


Figura 2. Esquema sobre la espira conductora.

Solución a), b) y c)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la magnitud de la fem inducida en función del tiempo, además del instante en que esta es igual a 1/10 de su valor inicial. El flujo de campo magnético a través de una superficie se puede expresar como:

$$\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Como el flujo magnético cambia a través del tiempo, se inducirá una fem en el circuito cerrado según la Ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Paso 1: Componentes Integral Flujo Magnético - $d\mathbf{S}$

Considerando que la única componente constante para la superficie de la espira es z, el diferencial superficial en cilíndricas será:

$$d\mathbf{S} = r\ dr d\theta\ \hat{\mathbf{z}}, \quad r \in [0, R],\ \theta \in [0, 2\pi] \tag{8}$$

Paso 2: Flujo Magnético - Φ_B

Luego, el flujo magnético a través de la espira debido al campo magnético externo se puede calcular como:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R B_0 e^{-\alpha t}(\cos\phi\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\ \hat{\mathbf{z}}) \cdot r\ dr d\theta\ \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Por propiedades de producto punto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= B_0 e^{-\alpha t} \sin\phi \int_0^{2\pi} \int_0^R r\ dr d\theta \\ &= B_0 e^{-\alpha t} \sin\phi \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \\ &= \pi R^2 B_0 e^{-\alpha t} \sin\phi\end{aligned} \tag{9}$$

Paso 3: Ley de Faraday - ε

Ahora, y como el flujo magnético cambia a través del tiempo, se inducirá una fem en el circuito cerrado según la Ley de Faraday:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(\pi R^2 B_0 e^{-\alpha t} \sin\phi) \\ &= -\pi R^2 B_0 e^{-\alpha t} \sin\phi \cdot -\alpha \\ &= \alpha\pi R^2 B_0 e^{-\alpha t} \sin\phi\end{aligned} \tag{10}$$

Entonces, el instante en que la fem inducida es igual a 1/10 de su valor inicial será:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t^\star) &= \frac{1}{10}\varepsilon(0) \\ \alpha\pi R^2 B_0 e^{-\alpha t^\star} \sin\phi &= \frac{1}{10}\alpha\pi R^2 B_0 e^{-\alpha\cdot 0} \sin\phi \\ e^{-\alpha t^\star} &= \frac{1}{10} \\ -\alpha t^\star &= \ln\left(\frac{1}{10}\right) \\ t^\star &= \frac{\ln 10}{\alpha}\end{aligned} \tag{11}$$

Paso 4: Ley de Lenz - ¿Cómo circula la corriente inducida?

El campo $\mathbf{B}$ ingresa por el mismo sentido que $d\mathbf{S}$ y disminuye a medida que transcurre el tiempo debido al factor $e^{-\alpha t}$, por lo que la magnitud del flujo magnético ϕ_B también disminuirá. Según la Ley de Lenz, la corriente inducida se opondrá a tal decrecimiento (¿cuál sería la acción que permite esto? ¿cómo debería ingresar un campo magnético 'imaginario' para frenar este cambio?), por lo que se concluye que esta circulará en sentido antihorario gracias a la regla de la mano derecha (vista la espira desde el punto O).

1.2.3 "Control 3 2022-1", Problema 3, Departamento de Física

Cuatro alambres conductores rectos, paralelos a los ejes de coordenadas y ubicados en el plano $x-y$, se mueven con velocidades constantes v, partiendo del origen, como muestra la figura. La resistencia por unidad de largo de cada alambre es r.

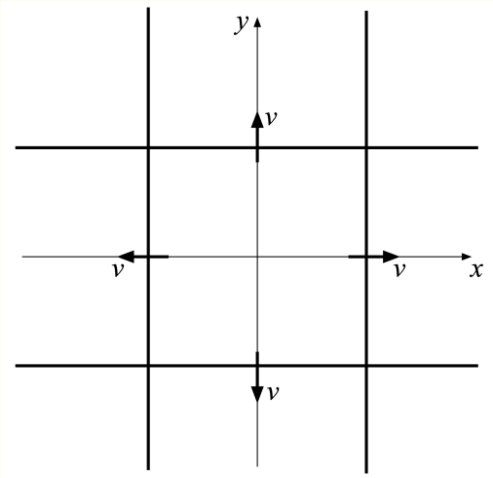


Figura 3. Esquema sobre alambres conductores.

Despreciando los efectos de la autoinductancia y considerando que existe un campo magnético dado por $\mathbf{B} = B_0 \cos(wt)\,\hat{\mathbf{z}}$:

a) Calcule el flujo magnético a través de la espira.

b) Determine la fem inducida sobre la espira.

c) Encuentre la resistencia total del circuito para cualquier instante t.

d) Determine la intensidad de corriente en el circuito para cualquier instante t.

Solución a), b), c) y d)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la intensidad de corriente en el circuito para cualquier instante t. Mediante la Ley de Ohm es posible calcular la resistencia del alambre:

$$V = IR$$

Además, el flujo de campo magnético a través de una superficie se puede expresar como:

$$\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Finalmente, y como el flujo magnético cambia a través del tiempo, se inducirá una fem en el circuito cerrado según la Ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Paso 1: Componentes Integral Flujo Magnético - $d\mathbf{S}$

Considerando que la única componente constante para la superficie de la espira es z, el diferencial superficial en cartesianas será:

$$d\mathbf{S} = dxdy\ \hat{\mathbf{z}}, \quad x \in [-vt, vt],\ y \in [-vt, vt]$$

Los límites estarán dados por la distancia entre cables paralelos, los cuales se pueden expresar como $d = vt$, pues la velocidad es constante (i.e es un movimiento rectilíneo uniforme).

Paso 2: Flujo Magnético - Φ_B

Luego, el flujo magnético a través de la espira debido al campo magnético externo se puede calcular como:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{-vt}^{vt}\int_{-vt}^{vt} B\hat{\mathbf{z}} \cdot dxdy\ \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Por propiedades de producto punto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int_{-vt}^{vt}\int_{-vt}^{vt} B_0 \cos(wt)\ dxdy \\ &= B_0 \cos(wt) \cdot \int_{-vt}^{vt}\int_{-vt}^{vt} dxdy \\ &= B_0 \cos(wt) \cdot (vt - (-vt))(vt - (-vt)) \\ &= B_0 \cos(wt) \cdot 2vt \cdot 2vt \\ &= 4v^2t^2 B_0 \cos(wt)\end{aligned} \tag{12}$$

Paso 3: Ley de Faraday - ε

Ahora, y como el flujo magnético cambia a través del tiempo, se inducirá una fem en el circuito cerrado según la Ley de Faraday:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(4v^2t^2 B_0 \cos(wt)) \\ &= -4v^2 B_0 \cdot \frac{d}{dt}(t^2 \cos(wt)) \\ &= -4v^2 B_0 \cdot (2t \cdot \cos(wt) + t^2 \cdot -\sin(wt) \cdot w) \\ &= -4v^2 B_0 \cdot (2t\cos(wt) - wt^2 \sin(wt))\end{aligned} \tag{13}$$

Paso 4: Resistencia - R

La resistencia por unidad de largo de cada alambre es r, por lo que la resistencia total de la espira vendrá dada por:

$$\begin{aligned} R_T &= 4 \cdot (r \cdot 2vt) \\ &= 8rvt \end{aligned}$$

Paso 5: Ley de Ohm - I

Finalmente, y utilizando la Ley de Ohm, se obtiene que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{R} \\ &= \frac{\varepsilon}{R_T} \\ &= \frac{-4v^2 B_0 \cdot (2t\cos(wt) - wt^2 \sin(wt))}{8rvt} \\ &= \frac{B_0 v}{r} \cdot (\frac{wt}{2}\sin(wt) - \cos(wt)) \end{aligned} \tag{14}$$