Solución Ayudantía 1

12 de Agosto 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

1 Electrostática

1.1 Ley de Coulomb - Resultados de Aprendizaje

Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☐ Aplicar la 2° Ley de Newton en conjunto con el DCL, incorporando la fuerza eléctrica en el análisis.
- ☑ Realizar un DCL para cada cuerpo del sistema en estudio, incorporando todas las fuerzas que actúan sobre él de acuerdo al sentido y dirección de cada una de ellas.
- ☑ Explicar los efectos electrostáticos que se pueden producir entre distintos cuerpos.
- ☑ Determinar la fuerza eléctrica en un sistema compuesto por dos cargas puntuales mediante la Ley de Coulomb.
- ☐ Utilizar las expresiones de fuerzas típicas, tales como el peso, el roce y la fuerza elástica en distintos contextos.
- ☑ Realizar descomposiciones y operaciones vectoriales en el espacio.
- ☑ Calcular el módulo, dirección y sentido de un vector.
- ☑ Usar funciones e identidades trigonométricas básicas, tales como el seno, coseno, tangente, entre otros.
- ☑ Reconocer características de polígonos y cuerpos geométricos, tales como el cuadrado, triángulo, cubo, entre otros.
- ☑ Conocer los valores y las unidades de medida de las constantes de Coulomb y de permitividad del vacío.

1.2 Campo Eléctrico - Resultados de Aprendizaje

Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Determinar el campo eléctrico generado por una distribución discreta de carga mediante su definición.
- ☐ Determinar el campo eléctrico generado por una distribución continua de carga mediante su definición en coordenadas cartesianas.
- ☑ Determinar el campo eléctrico generado por una distribución continua de carga mediante su definición en coordenadas cilíndricas.
- ☐ Determinar el campo eléctrico generado por una distribución continua de carga mediante su definición en coordenadas esféricas.
- ☐ Determinar la fuerza eléctrica experimentada por una distribución continua de carga.
- ☑ Aplicar el principio de superposición para campos eléctricos en un sistema compuesto por dos o más cuerpos.
- ☐ Evaluar el campo eléctrico en un punto del espacio, considerando su sentido y dirección.
- ☑ Identificar y utilizar un sistema de coordenadas pertinente al contexto.
- ☑ Identificar y diferenciar las densidades de carga según el contexto.
- ☐ Calcular la carga de un cuerpo mediante su definición, ya sea una densidad de carga uniforme o variable.
- ☑ Conocer e identificar las líneas de campo eléctrico correspondientes a cargas positivas y negativas.
- ☑ Conocer la unidad de medida para el campo eléctrico.

1.3 Ley de Coulomb - Generalidades

En primer lugar, la carga eléctrica será siempre un número entero del valor de la carga de un electrón:

$$e = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \tag{1}$$

Donde "C" es Coulomb, la unidad de medida para la carga.

Ahora, y para una distribución discreta de cargas, la fuerza sobre una carga "q_2" debido a una carga "q_1" ubicada a una distancia "r" se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{2}$$

Donde "ε_0" y "k_e" son la constante de permitividad del vacío y la constante de Coulomb, respectivamente:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} \tag{3}$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9\ \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2} \tag{4}$$

Finalmente, y gracias al principio de superposición, para un sistema de "N" cargas puntuales la fuerza total sobre la carga "Q" está dada por la suma de las fuerzas ejercidas por cada una de estas cargas:

$$\mathbf{F}_e(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N} q_j \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\,')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\,'|^3} \tag{5}$$

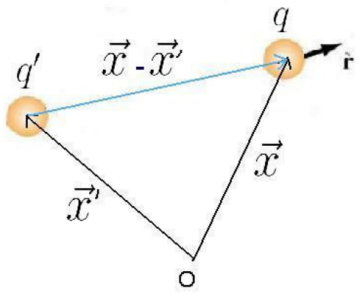


Figura 1. Diagrama de vectores para fuerza eléctrica entre dos cargas.

1.4 Ley de Coulomb - Cómo Utilizarlo Correctamente

Los pasos a seguir recomendados para aplicar la Ley de Coulomb son:

1. Considerar los signos de las cargas para determinar el sentido y dirección de la fuerza eléctrica, recordando que signos opuestos se atraen y que signos iguales se repelen.
2. Calcular el módulo de la fuerza asociada a cada par de cargas y ponderarlo de acuerdo a su descomposición vectorial en las coordenadas respectivas. Se recomienda representar gráficamente los vectores para comprenderlo de mejor manera.

1.5 Campo Eléctrico - Distribución Discreta de Carga

El campo eléctrico generado por una carga puntual "q" puede ser expresado como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{6}$$

Donde "r" es la distancia al punto deseado.
Luego, se puede reescribir la fuerza eléctrica como:

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \tag{7}$$

También, es posible utilizar esta última expresión en su forma diferencial.

Ahora, y gracias al principio de superposición, para un sistema de "N" cargas puntuales el campo eléctrico total sobre un punto en el espacio está dado por la suma de los campos eléctricos generados por cada una de estas cargas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N} q_j \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\,')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\,'|^3} \tag{8}$$

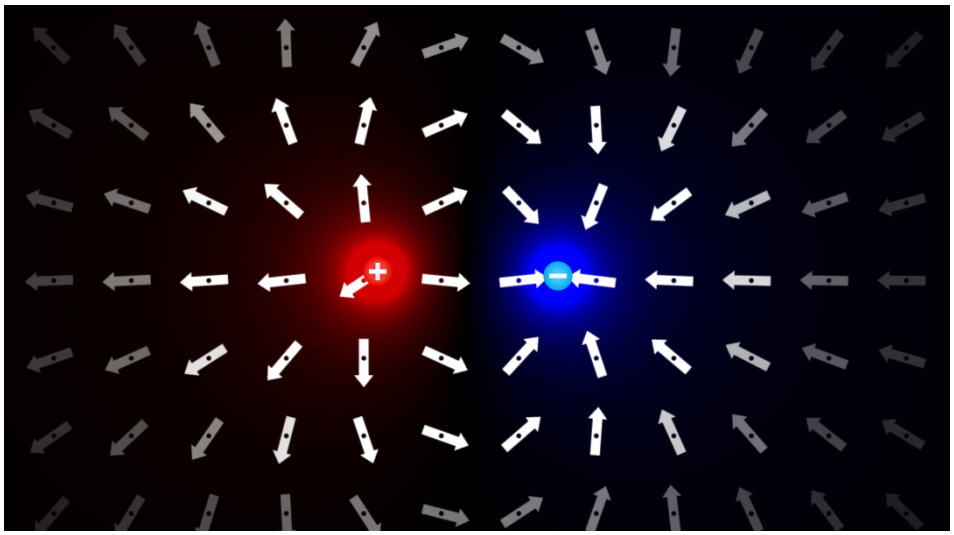


Figura 2. Líneas de campo eléctrico correspondientes a cargas positivas y negativas.

Por último, y como se puede observar, las líneas de campo eléctrico se originan en cargas positivas (hacia afuera) y terminan en cargas negativas (hacia dentro).
Pueden seguir experimentando con estos conceptos en Cargas y Campos Eléctricos.

1.6 Campo Eléctrico - Cómo Utilizarlo Correctamente I

Los pasos a seguir recomendados para aplicar el campo eléctrico por definición en distribuciones discretas de carga son:

1. Considerar los signos de las cargas para determinar el sentido y dirección de las líneas de campo eléctrico en el punto requerido.
2. Calcular el módulo del campo asociado a cada carga y ponderarlo de acuerdo a su descomposición vectorial en las coordenadas respectivas. Se recomienda representar gráficamente los vectores para comprenderlo de mejor manera.

1.7 Campo Eléctrico - Distribución Continua de Carga

Para una distribución continua de carga, el campo eléctrico está dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|^3}\, dq(\mathbf{x}\,') \tag{9}$$

Donde "$dq(\mathbf{x}\,')$" se refiere a la densidad de carga que posee el cuerpo, la cual puede ser:

Densidad	Relación Diferencial	Integral Campo Eléctrico
Lineal	$dq(\mathbf{x}\,') = \lambda(\mathbf{x}\,')\, dl'$	$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'\rvert^3}\, \lambda(\mathbf{x}\,')\, dl'$
Superficial	$dq(\mathbf{x}\,') = \sigma(\mathbf{x}\,')\, ds'$	$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'\rvert^3}\, \sigma(\mathbf{x}\,')\, ds'$
Volumétrica	$dq(\mathbf{x}\,') = \rho(\mathbf{x}\,')\, dv'$	$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'\rvert^3}\, \rho(\mathbf{x}\,')\, dv'$

Asimismo, se puede extender la definición de fuerza eléctrica a distribuciones continuas de carga:

$$\mathbf{F}_e(\mathbf{x}) = \int \mathbf{E}\, dq(\mathbf{x}) \tag{10}$$

Donde "$\mathbf{E}$" es el campo eléctrico experimentado por el objeto en estudio y "$dq(\mathbf{x})$" la densidad de carga del mismo.

1.8 Campo Eléctrico - Cómo Utilizarlo Correctamente II

Los pasos a seguir para aplicar el campo eléctrico por definición en distribuciones continuas de carga son:

1. Reconocer el tipo de densidad de carga asociado al cuerpo en estudio, según la dimensión en la que vive. Por ejemplo, un disco es bidimensional y, por lo tanto, su densidad sería superficial.
2. Luego, cambiar el diferencial de carga "$dq(\mathbf{x}\,')$" según el tipo de densidad y calcular el valor de la densidad de carga si es que no la entregan de manera explícita. En este paso se deberá utilizar el tipo de coordenada pertinente al problema y las relaciones entre los diferenciales, las cuales se pueden encontrar en la tabla del Anexo 2.2.
3. Después, y respetando el tipo de coordenadas en uso, se tendrá que construir "$\mathbf{x}$", el cual es un vector que se extiende desde el origen hasta el punto deseado. Siempre recuerden agregar el sentido y dirección de un vector.
4. Por último, y respetando el tipo de coordenadas en uso, se tendrá que construir "$\mathbf{x}\,'$", el cual es un vector que recorre desde el origen todo el cuerpo cargado. Siempre recuerden agregar el sentido y dirección de un vector.
5. No hay que olvidar los límites de integración, los cuales dependerán netamente del ejercicio en cuestión. Será más fácil guiarse por la figura que generalmente se encontrará a disposición.
6. Por último, solo quedaría integrar la expresión cuidadosamente. Recuerden que el campo eléctrico es un vector (por lo que también posee sentido y dirección) y que no es posible mezclar términos que pertenezcan a distintas coordenadas a la hora de integrar.

2 Anexos

2.1 Series de Taylor

Decimos que una función "$f(x)$" puede expandirse como una serie de potencias en torno a "a":

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \text{para todo } |x-a| < R \text{ con } R > 0$$

Ahora, y si la función "$f(x)$" puede derivarse infinitamente alrededor de "a", podemos expresarla como una serie de Taylor:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Más aún, y si $a = 0$, esta serie pasa a llamarse la serie de McLaurin de la función "$f(x)$":

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Ejemplo: Series más Utilizadas

Algunas de las series más comunes se muestran a continuación:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \qquad R = 1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \qquad R = \infty$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots, \qquad R = 1$$

Ejemplo: Aproximación por Grados

Sería muy poco conveniente usar toda la expresión asociada a la serie de potencia, por lo que se acostumbra utilizarlas hasta cierto "grado", el cual será igual al exponente más alto que acompañe a cualquiera de las "x". Por ejemplo, podríamos querer aproximar la expansión de "e^x" a primer orden (aún así, se incluyen todos los términos de orden inferior a este), tal como se muestra a continuación:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \approx 1 + \frac{x}{1!}$$

Si es que aún te cuesta, puedes seguir consultando estos conceptos en Series de Taylor y de McLaurin.

2.2 Coordenadas y Diferenciales

Conceptos	C. Cartesianas	C. Cilíndricas	C. Esféricas
Forma Vectorial	$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$
Componente	———	$\hat{\rho} = \cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\ \hat{\mathbf{y}}$ $\hat{\theta} = -\sin\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{y}}$	$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\ \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{z}}$
Diferencial Línea	$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho\ d\theta\hat{\theta} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{r}} + r\ d\theta\hat{\theta} + r\sin\theta\ d\phi\hat{\phi}$
Diferencial Superficie	$d\mathbf{S}_{x=cte} = dy\ dz\ \hat{\mathbf{x}}$ $d\mathbf{S}_{y=cte} = dx\ dz\ \hat{\mathbf{y}}$ $d\mathbf{S}_{z=cte} = dx\ dy\ \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}_{\rho=cte} = \rho\ d\theta\ dz\ \hat{\rho}$ $d\mathbf{S}_{\theta=cte} = d\rho\ dz\ \hat{\theta}$ $d\mathbf{S}_{z=cte} = \rho\ d\rho\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}_{r=cte} = r^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi\ \hat{\mathbf{r}}$ $d\mathbf{S}_{\theta=cte} = r\sin\theta\ dr\ d\phi\ \hat{\theta}$ $d\mathbf{S}_{\phi=cte} = r\ dr\ d\theta\ \hat{\phi}$
Diferencial Volumen	$dV = dx\ dy\ dz$	$dV = \rho\ d\rho\ d\theta\ dz$	$dV = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi$

Se debe notar que pueden haber distintas notaciones para el vector unitario ($\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$) y que la diferencial de volumen también se puede obtener mediante el cálculo de la matriz jacobiana. Finalmente, en las coordenadas esféricas se considera al ángulo "θ" como el que barre verticalmente desde arriba ($0 < \theta < \pi$), mientras que al ángulo "ϕ" como el que barre el "suelo" ($0 < \phi < 2\pi$).

2.2.1 "I1 2021-2", Problema 1, Facultad de Física

En los vértices de un triángulo equilátero de lado a se ubican 3 cargas de valor q, $-2q$ y $3q$, con $q > 0$. En el centro de gravedad del triángulo (intersección de las 3 alturas) se coloca una carga positiva de magnitud Q. Dando por conocidos los valores de q y a, determine la dirección y intensidad de la fuerza eléctrica sobre la carga Q.

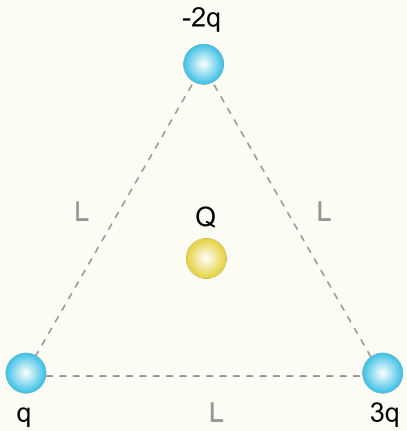


Figura 3. Esquema sobre cargas positivas y negativas.

Solución

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el sentido y intensidad de la fuerza eléctrica sobre la carga Q. Antes de ello, será necesario identificar las fuerzas que está experimentando el mismo, para luego representarlas gráficamente en un DCL según su dirección y sentido.

Luego, traduciremos matemáticamente el DCL en cada uno de los ejes definidos por el sistema de referencia sin olvidar el sentido de cada una de las fuerzas, para finalmente determinar la fuerza eléctrica total mediante el principio de superposición:

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Paso 1: DCL - Carga Q

La carga Q experimenta una fuerza eléctrica $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de repulsión (ambas cargas son positivas), mientras que $\mathbf{F}_2$ es una fuerza eléctrica de atracción (son partículas de cargas opuestas). Luego, el DCL se vería de la siguiente manera:

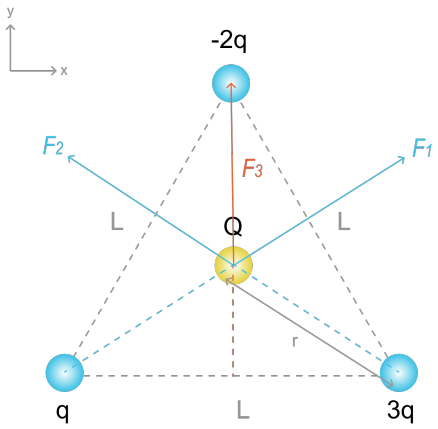


Figura 4. DCL sobre carga Q.

Se propone un sistema de referencia cartesiano.
A partir del triángulo equilátero, se puede obtener mediante trigonometría que:

$$r\cos(30^\circ) = \frac{L}{2}$$
$$r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Paso 2: Ley de Coulomb - F_1

La carga Q experimenta una fuerza eléctrica $\mathbf{F}_1$ de repulsión a partir de la carga q, dada por la Ley de Coulomb:

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Luego, la distancia entre ambas cargas y su descomposición vectorial (considerando un triángulo equilátero), se pueden expresar como:

$$\mathbf{F}_1 = k_e \frac{Qq}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2} (\cos(30^\circ)\ \hat{\mathbf{x}} + \sin(30^\circ)\ \hat{\mathbf{y}}) \tag{11}$$

Paso 3: Ley de Coulomb - F_2

La carga Q experimenta una fuerza eléctrica $\mathbf{F}_2$ de repulsión a partir de la carga $3q$, dada por la Ley de Coulomb:

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Luego, la distancia entre ambas cargas y su descomposición vectorial (considerando un triángulo equilátero), se pueden expresar como:

$$\mathbf{F}_2 = k_e \frac{3Qq}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2}(-\cos(30°)\ \hat{\mathbf{x}} + \sin(30°)\ \hat{\mathbf{y}}) \tag{12}$$

Paso 4: Ley de Coulomb - F_3

La carga Q experimenta una fuerza eléctrica $\mathbf{F}_3$ de atracción a partir de la carga $-2q$, dada por la Ley de Coulomb:

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Luego, la distancia entre ambas cargas y su descomposición vectorial (considerando un triángulo equilátero), se pueden expresar como:

$$\mathbf{F}_3 = k_e \frac{2Qq}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2}\ \hat{\mathbf{y}} \tag{13}$$

Paso 5: Fuerza Eléctrica - Principio de Superposición

Finalmente, y mediante el principio de superposición, la fuerza eléctrica sobre la carga Q será:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\
&= k_e \frac{Qq}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2}(\cos(30°)\ \hat{\mathbf{x}} + \sin(30°)\ \hat{\mathbf{y}}) + k_e \frac{3Qq}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2}(-\cos(30°)\ \hat{\mathbf{x}} + \sin(30°)\ \hat{\mathbf{y}}) + k_e \frac{2Qq}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2}\ \hat{\mathbf{y}} \\
&= k_e \frac{Qq}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2}(-2\cos(30°)\ \hat{\mathbf{x}} + (4\sin(30°) + 2)\ \hat{\mathbf{y}}) \\
&= k_e \frac{3Qq}{L^2}(-\sqrt{3}\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}})
\end{aligned} \tag{14}$$

Luego, la magnitud y dirección (i.e ángulo respecto a la horizontal) de la fuerza eléctrica serán:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\
&= \sqrt{(k_e \frac{3Qq}{L^2} \cdot -\sqrt{3})^2 + (k_e \frac{3Qq}{L^2} \cdot 4)^2} \\
&= k_e \frac{3Qq}{L^2}\sqrt{19} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{k_e \frac{3Qq}{L^2} \cdot 4}{k_e \frac{3Qq}{L^2} \cdot -\sqrt{3}}\right) \\
&= \arctan\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Nota: Si es posible colocar más cargas en el sistema, ¿De qué manera es posible mantener la carga Q en equilibrio? Recordemos que un cuerpo sin velocidad inicial se mantendrá en equilibrio traslacional si es que su aceleración es nula.

2.2.2 "Problemas de Electromagnetismo", 1.1.1, Sebastián Urrutia

Considerando la distribución de cargas puntuales de la figura, calcule el campo eléctrico en P.

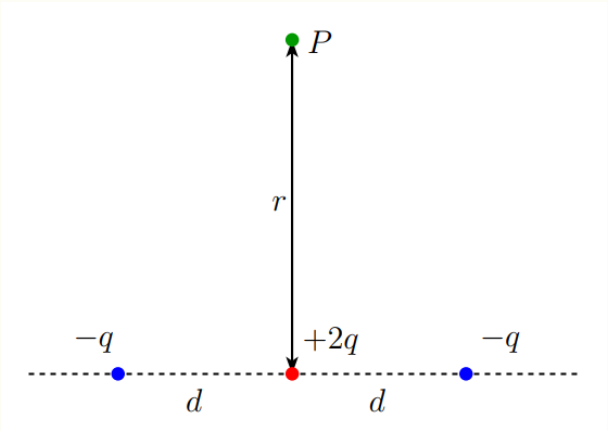


Figura 5. Esquema sobre la distribución de cargas puntuales.

Solución

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el campo eléctrico en el punto P, el cual puede ser expresado como la suma de los campos eléctricos generados por las distintas cargas mediante el principio de superposición. Por definición, el campo eléctrico de una carga puntual puede ser expresado como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Paso 1: Campos Eléctricos - Diagrama

En primer lugar, realizaremos un diagrama para ilustrar el sentido y dirección de los campos eléctricos de cada una de las cargas. Recordando la disposición de las líneas de campo para cargas positivas y negativas se tiene que:

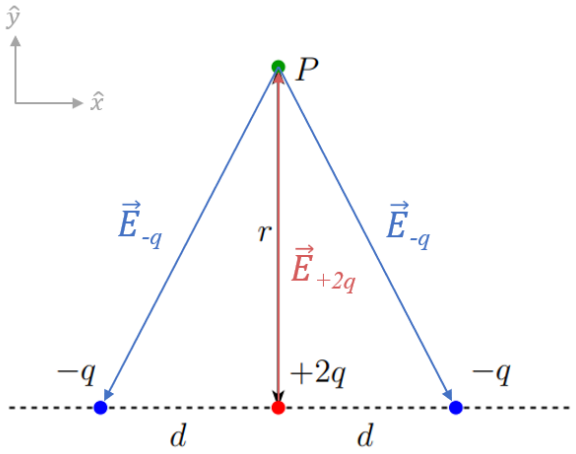


Figura 6. Diagrama sobre campos eléctricos generados por cada carga.

Se debe notar que el campo generado por cada carga se calculará según su sistema de referencia, o sea, desde su posición. Además, se utilizarán coordenadas cartesianas por la geometría del ejercicio.

Paso 2: Campo Eléctrico - Carga Izquierda $\mathbf{E}_{-q_1}$

Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo, respetando el sentido de las líneas de campo asociadas a la carga:

$$\mathbf{r}_{-q_1} = -d\hat{\mathbf{x}} - r\hat{\mathbf{y}}$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r}_{-q_1}| = \sqrt{d^2 + r^2}$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_{-q_1} &= \frac{\mathbf{r}_{-q_1}}{|\mathbf{r}_{-q_1}|} \\ &= \frac{-d\hat{\mathbf{x}} - r\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{d^2 + r^2}}\end{aligned}$$

Finalmente, el campo eléctrico vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{-q_1} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2 + r^2}\,\frac{-d\hat{\mathbf{x}} - r\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{d^2 + r^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-d\hat{\mathbf{x}} - r\hat{\mathbf{y}}}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{16}$$

El signo de la carga está implicíto en el vector $\mathbf{r}$,
por lo que solo se evaluó la magnitud de esta.

Paso 2: Campo Eléctrico - Carga Centro $\mathbf{E}_{+2q}$

Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo, respetando el sentido de las líneas de campo asociadas a la carga:

$$\mathbf{r}_{+2q} = r\hat{\mathbf{y}}$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r}_{+2q}| = r$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_{+2q} &= \frac{\mathbf{r}_{+2q}}{|\mathbf{r}_{+2q}|} \\ &= \frac{r\hat{\mathbf{y}}}{r} \\ &= \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

Finalmente, el campo eléctrico vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{+2q} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2}\ \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{\mathbf{y}}\end{aligned} \tag{17}$$

El signo de la carga está implicíto en el vector $\mathbf{r}$,
por lo que solo se evaluó la magnitud de esta.

Paso 3: Campo Eléctrico - Carga Derecha $\mathbf{E}_{-q_2}$

Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo, respetando el sentido de las líneas de campo asociadas a la carga:

$$\mathbf{r}_{-q_2} = d\hat{\mathbf{x}} - r\hat{\mathbf{y}}$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r}_{-q_2}| = \sqrt{d^2 + r^2}$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_{-q_2} &= \frac{\mathbf{r}_{-q_2}}{|\mathbf{r}_{-q_2}|} \\ &= \frac{d\hat{\mathbf{x}} - r\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{d^2 + r^2}}\end{aligned}$$

Finalmente, el campo eléctrico vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{-q_2} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2+r^2}\ \frac{d\hat{\mathbf{x}}-r\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{d^2+r^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\hat{\mathbf{x}}-r\hat{\mathbf{y}}}{(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{18}$$

El signo de la carga está implicíto en el vector $\mathbf{r}$,
por lo que solo se evaluó la magnitud de esta.

Paso 4: Campo Eléctrico - Principio de Superposición $\mathbf{E}_P$

Finalmente, el campo eléctrico en el punto P será la suma de los campos eléctricos generados por las distintas cargas mediante el principio de superposición:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_P &= \mathbf{E}_{-q_1} + \mathbf{E}_{+2q} + \mathbf{E}_{-q_2} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-d\hat{\mathbf{x}}-r\hat{\mathbf{y}}}{(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{\mathbf{y}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\hat{\mathbf{x}}-r\hat{\mathbf{y}}}{(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right)\ \hat{\mathbf{y}}\end{aligned} \tag{19}$$

Nota: La inexistencia del componente $\hat{\mathbf{x}}$ del campo eléctrico total también se puede justificar por la geometría (y simetría) del problema.

2.2.3 "Ejercicios Teoría Electromagnética ", 3.2.1, Fabián Cádiz

Consideremos un anillo con densidad lineal de carga constante y dada por λ. Calcule el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en un punto sobre el eje de simetría a distancia z del origen.

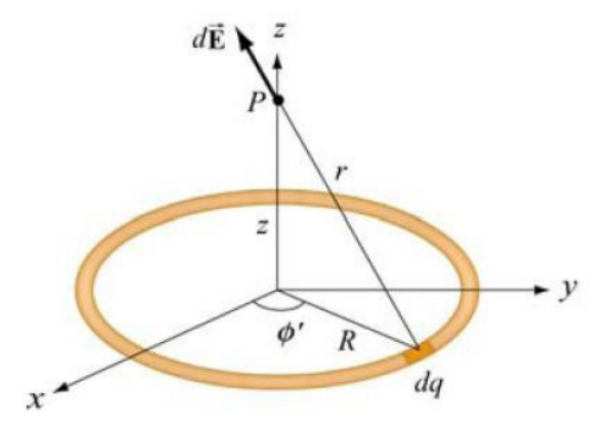


Figura 7. Esquema sobre el anillo.

Solución

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el campo eléctrico en el eje del anillo. Como la figura no posee ninguna simetría apta para la Ley de Gauss, se aplicará la definición de campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'|^3}\,\lambda(\mathbf{x}\,')\,dl'$$

Se nota que se usa la integral simple en virtud de la naturaleza del problema, puesto que el anillo se puede describir con solo una componente variable en coordenadas cilíndricas.

Paso 1: Componentes Campo Eléctrico - r

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el centro del anillo y se utilizarán coordenadas cilíndricas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ inicia en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo:

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}, \quad z \in \,]-\infty, \infty[$$

Donde "z" se refiere a cualquier punto del eje "z".

Paso 2: Componentes Campo Eléctrico - r $'$

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ inicia en el origen y recorre todo el cuerpo con carga:

$$\mathbf{r}\,' = R\hat{\mathbf{r}}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

Donde "R" es el radio del anillo y "$\hat{\mathbf{r}}$" la componente radial en coordenadas cilíndricas.

Paso 3: Componentes Campo Eléctrico - $\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'$

Con lo anterior, también se construyen las demás componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = z\hat{\mathbf{z}} - R\hat{\mathbf{r}}$$

Luego, el módulo del vector anterior será:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = \sqrt{z^2 + R^2}$$

Paso 4: Componentes Campo Eléctrico - dq

Considerando que la densidad de carga es lineal y que la única componente variable para el anillo es θ:

$$dq(\mathbf{x}\,') = \lambda(\mathbf{x}\,')\; dl' = \lambda \cdot R\; d\theta$$

Para ello se utilizó el diferencial de línea para coordenadas cilíndricas, omitiendo las componentes constantes y el sentido vectorial.

Paso 5: Campo Eléctrico - E

Finalmente, se utiliza la definición de campo eléctrico considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|^3}\;\lambda(\mathbf{x}\,')\; dl' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{z\hat{\mathbf{z}} - R\hat{\mathbf{r}}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\;\lambda \cdot R\; d\theta\end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos, y por temas de simetría, se puede obviar la parte asociada a la componente radial. De esta manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{z\hat{\mathbf{z}}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\;\lambda \cdot R\; d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z\hat{\mathbf{z}}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\;\lambda \cdot R \cdot 2\pi \\ &= \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\;\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Nota: La componente radial del campo se puede obviar además por razones matemáticas. Resolviendo la integral respectiva:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{-R\hat{\mathbf{r}}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\;\lambda \cdot R\; d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{-R(cos(\theta)\;\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\;\hat{\mathbf{y}})}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\;\lambda \cdot R\; d\theta \\ &= -\frac{R^2\lambda}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} cos(\theta)\;\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\;\hat{\mathbf{y}}\; d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$