1. Considerando un eje z hacia abajo, la ecuación de continuidad establece $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, así $\frac{dJ}{dz} = 0 \Rightarrow \vec{J} = A\hat{z}$

Además, se sabe que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, con σ la conductividad.

Para el capacitor de la izquierda: 

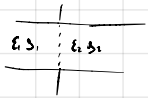
$\Rightarrow \vec{E_1} = \frac{A}{\sigma_1}\hat{z}$, $\vec{E_2} = \frac{A}{\sigma_2}\hat{z}$

Para la cte A considero que hay un potencial V_0 entre las placas $\Rightarrow V_0 = -\int_{2d}^{0} E\,dr \Rightarrow V_0 = -\int_{2d}^{d} E_1\,dz - \int_{d}^{0} E_2\,dz$

$$\Rightarrow V_0 = \int_{d}^{2d} \frac{A}{\sigma_1}\,dz + \int_{0}^{d} \frac{A}{\sigma_2}\,dz \Rightarrow V_0 = \frac{A}{\sigma_1}d + \frac{A}{\sigma_2}d \Rightarrow A = \frac{V_0\sigma_1\sigma_2}{d(\sigma_1+\sigma_2)}$$

Así, $\vec{J} = \frac{V_0\sigma_1\sigma_2}{d(\sigma_1+\sigma_2)}\hat{z}$; $\vec{E_1} = \frac{V_0\sigma_2}{d(\sigma_1+\sigma_2)}\hat{z}$; $\vec{E_2} = \frac{V_0\sigma_1}{d(\sigma_1+\sigma_2)}\hat{z}$

Para el campo $\vec{D}$ recordamos $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{D_1} = \frac{\varepsilon_1 V_0\sigma_2}{d(\sigma_1+\sigma_2)}\hat{z}$ $\vec{D_2} = \frac{\varepsilon_2 V_0\sigma_2}{d(\sigma_1+\sigma_2)}\hat{z}$

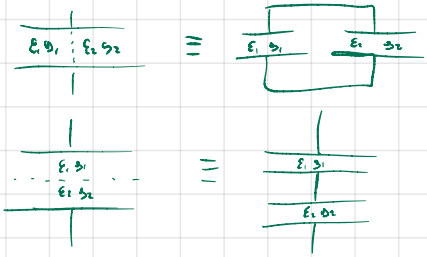
El capacitor de la derecha: 

★ Justo en la intersección ambos campos deben ser iguales por condición de Borde.

Se sabe que el voltaje en un capacitor rectangular es $V = Ed$, así que

$$\vec{E} = \frac{V_0}{2d}\hat{z} \qquad \vec{J_1} = \frac{\sigma_1 V_0}{2d}\hat{z} \qquad \vec{J_2} = \frac{\sigma_2 V_0}{2d}\hat{z}$$

$$\vec{D_1} = \frac{\varepsilon_1 V_0}{2d}\hat{z} \qquad \vec{D_2} = \frac{\varepsilon_2 V_0}{2d}\hat{z}$$

Mondeja, 

b) Para el de la derecha, las densidades de polarización son:

$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \Rightarrow \sigma_p = (\vec{D} - \varepsilon_0\vec{E})\cdot\hat{n}$ ($\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$)

$\Rightarrow \sigma_{P_1}(z=0) = \left(\frac{\varepsilon_1 V_0}{2d} - \varepsilon_0\frac{V_0}{2d}\right)\hat{z}\cdot(-\hat{z})$



$\Rightarrow \sigma_{P_1}(z=0) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$ //

Solo cambia $\hat{n}$

$\Rightarrow \sigma_{P_1}(z=2d) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$ //

$\sigma_{P_2}(z=0) = \left(\frac{\varepsilon_2 V_0}{2d} - \frac{V_0}{2d}\right)\hat{z}\cdot(-\hat{z}) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$ //

$\sigma_{P_2}(z=2d) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}$ //

Y las cargas libres ($Q = CV \Rightarrow \sigma_L A = \varepsilon\frac{A}{d}V \Rightarrow \sigma_L = \varepsilon\frac{V}{d} \Rightarrow \sigma_L = \varepsilon\frac{Ed}{d} \Rightarrow \sigma_L = \varepsilon E$)

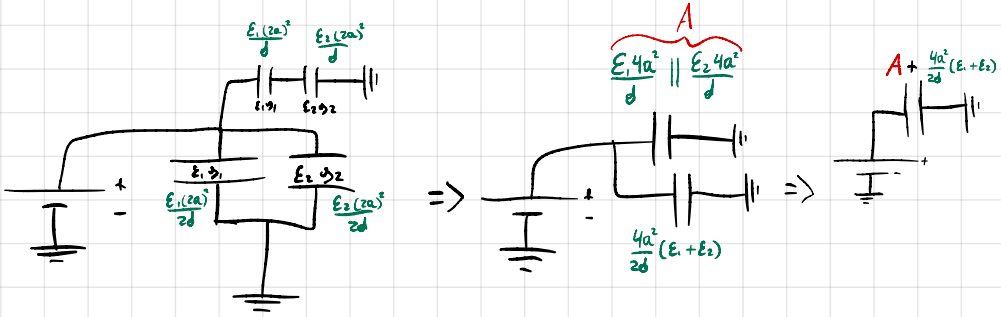
Así, $\sigma_{L_1}(z=0) = \frac{\varepsilon_1 V_0}{2d}$ $\quad \sigma_{L_1}(z=2d) = -\frac{\varepsilon_1 V_0}{2d}$

$\sigma_{L_2}(z=0) = \frac{\varepsilon_2 V_0}{2d}$ $\quad \sigma_{L_2}(z=2d) = -\frac{\varepsilon_2 V_0}{2d}$

Recuerda que



c) Reconociendo como circuito



d) La corriente total se puede obtener integrando $\vec{J}$, $\vec{J}_1$, y $\vec{J}_2$ para luego sumarlos.

$$I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} + \iint_S \vec{J}_1\cdot d\vec{s} + \iint_S \vec{J}_2\cdot d\vec{s}$$

$$= \iint_S J\,dx\,dy + \iint_S J_1\,dx\,dy + \iint_S J_2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2a}\int_0^{2a} J\,dx\,dy + \int_0^{2a}\int_0^{2a} J_1\,dx\,dy + \int_0^{2a}\int_0^{2a} J_2\,dx\,dy$$

* Como J, J_1, y J_2 NO dependen de $dx\,dy$, nos queda

$$= JA + J_1A + J_2A$$

$$I = \frac{V_0 a^2 \sigma_1\sigma_2}{d}\left(\frac{4}{\sigma_1+\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_1}\right)$$

Y la resistencia equivalente es $R = \frac{V_0}{I}$

$$\Rightarrow R = \frac{d}{a^2\sigma_1\sigma_2\left(\frac{4}{\sigma_1+\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_1}\right)} \quad //$$

2

a) Se tienen dos regiones, $a<r<b$ y $b<r<c$, donde se tendrán los respectivos $\vec{E}, \vec{D}, \vec{J}$. Todos estos vectores tienen dirección radial hacia afuera, ya que el interior estará a mayor potencial que el exterior.

Piden resistencia, así $R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{V_0}{I}$, debo encontrar I.

Como son 2 espacios, $\vec{J_i} = \sigma_i \vec{E_i}$, con $i = 1, 2$ según cada región

La corriente I es: $I = \iint_S \vec{J_i} \cdot \vec{ds} \Rightarrow I = J_i 2\pi r L$, con S el manto de un cilindro de radio r

Así, reemplazando $\vec{J_i}$ tenso: $I = \sigma_i \vec{E_i} 2\pi r L \Rightarrow \vec{E_i}(r) = \frac{I}{2\pi r L \sigma_i}$

Puedo encontrar I con el potencial, ya que $V_0 = -\int_c^a E_i \, dr \Rightarrow V_0 = \int_a^b E_1 \, dr + \int_b^c E_2 \, dr$

$$\Rightarrow V_0 = \int_a^b \frac{I}{2\pi r L \sigma_1} dr + \int_b^c \frac{I}{2\pi r L \sigma_2} dr \Rightarrow V_0 = \frac{I}{2\pi L}\left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}\right)$$

Y por ley de Ohm: $R = \frac{V_0}{I} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}\right)$

Otro Método: La resistencia para un objeto de largo L, sección A y conductividad σ es $R = \frac{L}{\sigma A}$

La resistencia en $a<r<b \Rightarrow dR = \frac{dr}{2\pi r L \sigma_1} \Rightarrow R_1 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi L \sigma_1}$

// // // $b<r<c \Rightarrow dR = \frac{dr}{2\pi r L \sigma_2} \Rightarrow R_2 = \frac{\ln(c/b)}{2\pi L \sigma_1}$

$$\Rightarrow R_{total} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}\right)$$

b) Ley de Gauss en materiales en la interfaz $\rightarrow r = b$



$$\Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q \Rightarrow \int_{Tapa1} D_1 \hat{r} \cdot ds(-\hat{r}) + \int_{Tapa2} D_2 \hat{r} \cdot ds \hat{r} = Q \Rightarrow Q = D_2 A - D_1 A \Rightarrow \sigma_L A = D_2 A - D_1 A \Rightarrow \sigma_L = D_2 - D_1$$

$$\Rightarrow \sigma_L = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 \Rightarrow \sigma_L = \varepsilon_2 \frac{I}{2\pi b L \sigma_2} - \varepsilon_1 \frac{I}{2\pi b L \sigma_1}$$, usando que $I = \frac{V_0}{R}$ se llega a: $\sigma_L = \left(\frac{V_0}{b}\right)\frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{\ln(b/a)\sigma_2 + \ln(c/b)\sigma_1}$

c) Sin conductividad no hay corriente, así que haciendo $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\Rightarrow \varepsilon_1 E_1 2\pi r L = Q_L$

El potencial es: $V_0 = -\int_c^a E_1 \, dr \Rightarrow V_0 = \int_a^b E_1 \, dr + \int_b^c E_2 \, dr$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{Q}{\varepsilon_1 2\pi L} \ln(b/a) + \frac{Q}{\varepsilon_2 2\pi L} \ln(c/b)$$

Así, $C = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow C = \dfrac{2\pi L}{\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(b/a) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln(c/b)}$ //

a) Recordar que $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \chi_1$ $\quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \chi_2$

Como es un material lineal, se cumple que $\vec{P}_{x<0} = \chi \vec{E}_{x<0}$

Así, $\vec{E}^{(1)}_{x<0} = \dfrac{P_1 \cos(\gamma)\,\hat{\imath} + P_1 \operatorname{Sen}(\gamma)\,\hat{\jmath}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}$

y $\vec{D}_{x<0}(1) = \varepsilon_1 \vec{E}^{(1)}_{x<0} \Rightarrow \vec{D}_{x<0}(1) = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}\left(P_1 \cos(\gamma)\hat{\imath} + P_1 \operatorname{Sen}(\gamma)\hat{\jmath}\right)$ //

De la misma manera, en $x>0$ se tiene

$$\vec{E}_{x>0} = \frac{P_2 \cos(\gamma_2)\,\hat{\imath} + P_2 \operatorname{Sen}(\gamma_2)\,\hat{\jmath}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}$$

$$\vec{D}_{x>0} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}\left(P_2 \cos(\gamma_2)\,\hat{\imath} + P_2 \operatorname{Sen}(\gamma_2)\,\hat{\jmath}\right)$$

b) $\sigma_p(x<0) = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$; $\sigma_P(x<0) = \vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{P}\cdot\hat{x} \Rightarrow \sigma_P(x<0) = P_1 \cos(\gamma_1)$ //

; $\sigma_P(x>0) = \vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{P}\cdot(-\hat{x}) \Rightarrow \sigma_{P(x>0)} = -P_2 \cos(\gamma_2)$

La condición de discontinuidad dice que

$$\lim_{x\to 0^-} \vec{D}\cdot\hat{x} - \lim_{x\to 0^+} \vec{D}\cdot\hat{x} = \sigma_F \quad \text{(No hay densidades libres)} \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} P_1 \cos(\gamma_1) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} P_2 \cos(\gamma_2)$$

$$\Rightarrow P_2 \cos(\gamma_2) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} P_1 \cos(\gamma_1) \quad (1)$$

Aplicando la otra condición de borde del Campo $\vec{E} \cdot S$

$$\lim_{x \to 0^-} \vec{E} \cdot S = \lim_{x \to 0^+} \vec{E} \cdot S$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} P_2 \operatorname{Sin}(\gamma_2) = \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} P_1 \operatorname{Sin}(\gamma_1)$$

$$\Rightarrow P_2 \operatorname{Sin}(\gamma_2) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} P_1 \operatorname{Sin}(\gamma_1) \quad (2)$$

El Modulo de $\vec{P_2}$ es:

$$P_2 = \sqrt{\left(P_2 \cos(\gamma_2)\right)^2 + \left(P_2 \operatorname{Sin}(\gamma_2)\right)^2}$$

Ingresando (1) y (2)

$$P_2 = P_1 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}\right)^2 \cos^2(\gamma_1) + \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}\right)^2 \operatorname{Sin}^2(\gamma_2)}$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \cos^2(\gamma_1) + \operatorname{Sin}^2(\gamma_2)} \quad //$$

Con un Angulo dado por

$$\frac{\operatorname{Sin}(\gamma_1)}{\cos(\gamma_2)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\operatorname{Sin}(\gamma_1)}{\cos(\gamma_1)} \Rightarrow \gamma_2 = \operatorname{TAN}^{-1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{TAN}(\gamma_1)\right) //$$