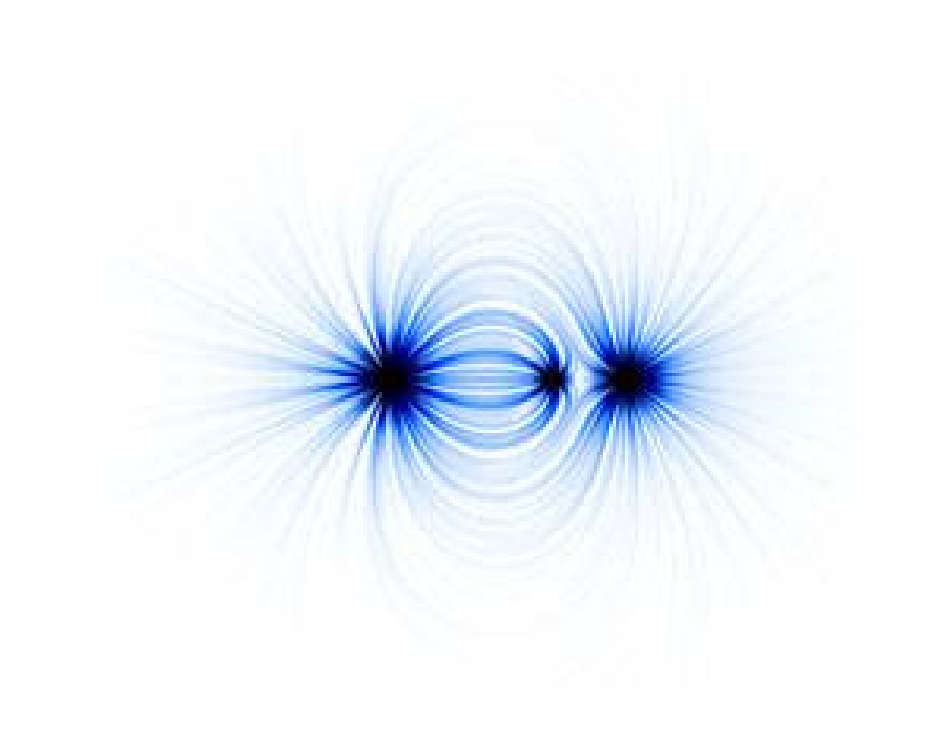
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física

Teoría Electromagnética

Con ejercicios resueltos



Fabián Cádiz

Parte I

Electrostática

Capítulo 1

Elementos de Cálculo vectorial

1.1. Álgrebra de Vectores en R^3

Esta es una lista de identidades elementales del álgebra vectorial, que se supondrán bien conocidas

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_z)\,\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0$$

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{C}$$

1.2. Cálculo diferencial en R^3

Sea $f : [R^3] \to R$ una función real. También es llamada **campo escalar**, pues a cada punto del espacio (R^3) le asocia un número real (un escalar). Ejemplo de un campo escalar puede ser la temperatura en cierta región del espacio $T : [\Omega \subseteq R^3 \to R]$

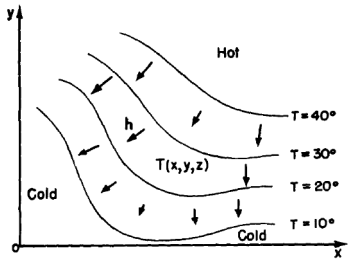


Fig. 1.1: $T(x, y, z)$ representa un campo escalar sobre Ω

Además de la existencia de campos escalares, también existen **campos vectoriales**. La idea es bien simple, a cada punto del espacio se le asocia un vector. En R^3, el tipo de campos vectoriales que nos interesarán son de la forma $\vec{F} : [\Omega \subseteq R^3] \to R^3$.

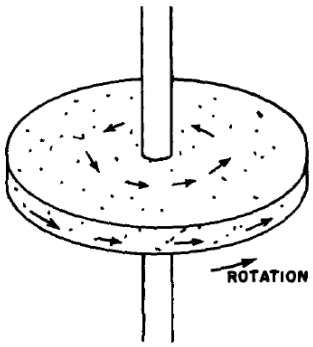


Fig. 1.2: La velocidad de los átomos de un objeto que rota es un ejemplo de campo vectorial

1.2.1. Derivadas de un campo escalar

Si f es un campo escalar diferenciable (y por lo tanto una función continua) sobre un dominio $D \subseteq R^3$, entonces está definido el **Gradiente** de f

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \right)$$

El gradiente es un campo **vectorial**, pues a cada punto en D le asocia un vector. Es inmediato notar que el gradiente es perpendicular a curvas en donde el campo escalar f es constante, como las curvas que se muestran en la figura 1. (Llamadas isotermas en el caso de que el campo escalar sea la temperatura). En efecto, la curva

$$f(x,y,z) = C$$

puede ser parametrizada

$$f(x(t), y(t), z(t)) = C$$

Derivando con respecto a t, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0$$

y entonces el gradiente es perpendicular a la dirección tangente a la curva. Más aún, si $\hat{u}$ es un vector unitario, se define la **derivada direccional** de f en la dirección $\hat{u}$ como

$$D_{\hat{u}} f(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) \cdot \hat{u}$$

Se puede demostrar que la derivada direccional se maximiza en la dirección del gradiente, es decir, el gradiente entrega la dirección de máxima variación de f.

1.3. $\vec{\nabla}$ como un operador

Conviene considerar al gradiente como algo independiende de que función se está derivando. Llamamos $\vec{\nabla}$ al operador

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Por supuesto que este operador así escrito no significa nada. El operador $\vec{\nabla}$ debe operar sobre una función, por ejemplo

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Tiene completo sentido en este caso. Hemos "multiplicado" al operador por una cantidad escalar. Hay que tener ciertas precauciones con este tipo de notación, por ejemplo, del álgebra de vectores es sabido que si α es un escalar

$$\alpha \vec{A} = \vec{A} \alpha$$

sin embargo, $f\vec{\nabla}$ no tiene sentido por si mismo, en efecto, es un nuevo operador

$$f\vec{\nabla} = \left(f\frac{\partial}{\partial x}, f\frac{\partial}{\partial y}, f\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

1.3.1. Divergencia y Rotor

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

debe ser un escalar, y por lo tanto puede tener un sentido físico. Entendiendo $\vec{\nabla}$ como un operador vectorial, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

A esta cantidad escalar asociada a un campo vectorial se le llama **divergencia** de $\vec{F}$.

Veamos que más es posible definir a partir del operador gradiente. ¿Qué ocurre con $\vec{\nabla} \times \vec{F}$?. Por supuesto que el resultado debe ser un campo vectorial, de hecho, muy útil en el análisis de funciones vectoriales. Desarrollando este producto cruz según el álgebra de vectores

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right)_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right)_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right)_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

A esta combinación se le llama **rotor**. En resumen, hemos definido las siguientes cantidades

$$\vec{\nabla} f \rightarrow \text{Vector}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rightarrow \text{Escalar}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \rightarrow \text{Vector}$$

1.3.2. Segundas derivadas

Hasta ahora hemos definido cantidades que involucran únicamente primeras derivadas. Veamos que ocurre con las siguientes combinaciones

$$(a)\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)$$

$$(b)\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)$$

$$(c)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$$

$$(d)\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$$

$$(e)\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$$

Veamos la primera de ellas, es claro que debe obtenerse un campo escalar. Desarrollando

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Se ve que esto se puede reescribir como

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)f=\vec{\nabla}^2 f$$

Vemos a $\vec{\nabla}^2$ como un nuevo operador, y como aparece mucho en física, tiene un nombre. Es llamado **Laplaciano**

$$\text{Laplaciano}\rightarrow\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

debido a que el Laplaciano es un operador escalar, podría aplicarse sobre un vector

$$\vec{\nabla}^2\vec{F}$$

por supuesto esto significa que el operador Laplaciano opera sobre cada componente de $\vec{F}$

$$\vec{\nabla}^2\vec{F}=\left(\vec{\nabla}^2F_x,\vec{\nabla}^2F_y,\vec{\nabla}^2F_z\right)$$

Veamos que ocurre con la expresión (b). Notemos que tiene la siguiente forma

$$\vec{A}\times\left(\vec{A}f\right)=\left(\vec{A}\times\vec{A}\right)f=0$$

Esperamos que

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)$$

sea cero para cualquier campo escalar f . Podemos verificarlo tomando alguna de las componentes

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f]_x = \vec{\nabla}_z \left(\vec{\nabla} f\right)_y - \vec{\nabla}_y \left(\vec{\nabla} f\right)_z$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f]_x = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

Del mismo modo se muestra para las demás componentes

La expresión (c) es por supuesto un campo vectorial

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$$

Sin embargo, no hay nada muy especial que decir acerca de él. Es simplemente un campo vectorial que podría aparecer en el futuro

La expresión (d) tiene la forma

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0$$

Es decir, esperamos que

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$$

Para cualquier campo vectorial $\vec{F}$. Es así, y es fácil de verificar

Por último, veamos que sucede con la expresión (e)

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$$

Ésta tiene la forma de

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\vec{C}$$

Podríamos seguir utilizando esta expresión y escribir

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F}$$

El último término es el Laplaciano

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$$

En resumen, hemos encontrado

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{\nabla}^2 f \rightarrow \text{Laplaciano sobre f, campo escalar}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) \rightarrow \text{Campo vectorial}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F} \rightarrow \text{campo vectorial}$$

1.3.3. Dos teoremas adicionales

En muchos problemas físicos, sucede que un determinado campo vectorial $\vec{F}$ tiene rotor nulo. Es decir

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Hemos visto que el rotor de un gradiente es siempre cero. Podría ser ciento entonces, que $\vec{F}$ fuera el gradiente de algún campo escalar, de esta forma su rotor sería siempre nulo. Lo interesante es que esto es siempre así, y enunciaremos el siguente teorema

Si

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Existe un campo escalar ψ, tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\psi$$

Del mismo modo, hemos visto que la divergencia de un rotor es siempre cero. Luego, si la divergencia de un campo vectorial $\vec{F}$ es nula, podria tenerse que $\vec{F}$ fuera el rotor de un campo vectorial. De ser así, estaría garantizado que su divergencia sea nula. En efecto, enunciamos el segundo teorema

Si

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

Existe un campo vectorial $\vec{A}$, tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

1.4. Cálculo Integral en R^3

1.4.1. Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\vec{F} : [\Omega \subseteq R^3] \to R^3$

Consideremos una curva Γ contenida en Ω. Sea $\vec{x}_0, \vec{x}_1, ...\vec{x}_n$ una partición de Γ, $(\overline{x_k}, \overline{y_k})$ un punto en el trazo de Γ que va de $\vec{x}_{k-1}$ a $\vec{x}_k$, y $\Delta\vec{x}_k = \vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}$. Se define la integral de línea de $\vec{F}(\vec{x})$ por

$$\int_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} \vec{F}(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \cdot \Delta\vec{x}_k$$

Esto se puede reescribir como

$$\int_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} \vec{F}(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \cdot \frac{\Delta\vec{x}_k}{\mid \Delta\vec{x}_k \mid} \mid \Delta\vec{x}_k \mid = \int_\Gamma ds\hat{T}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

donde $\hat{T}(\vec{x})$ es la tangente unitaria a la curva Γ en $\vec{x}$. Así

$$\int_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int_\Gamma ds\hat{T}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

La integral de línea de un campo vectorial sobre una curva Γ corresponde a sumar las proyeccciones de $\vec{F}(\vec{x})$ en la dirección tangente a la curva en todo punto.

1.4.2. Integral de superficie de un campo vectorial

Sea $\vec{F} : [\Omega \subseteq R^3] \to R^3$ y S una superficie contenida en Ω. Se define la integral de flujo del campo $\vec{F}$ sobre S como

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \iint_S dS(\vec{x})\hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

corresponde a sumar la proyección del campo $\vec{F}$ sobre la normal a la superficie S en cada punto.

1.4.3. Teorema de la Divergencia

Sea $\Omega \subseteq R^3$ una región. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo y diferenciable en Ω. Entonces

$$\iiint_\Omega d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \oiint_{\delta\Omega} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

1.4.4. Teorema de Stokes

Sea S una superficie en R^3. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo y diferenciable en una región que contiene a S. Entonces

$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})\right) = \oint_{\delta S} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

donde δS es el contorno de S (una curva en R^3)

Capítulo 2

Introducción

Este curso trata sobre los fundamentos de la teoría Electromagnética, una teoría realmente exitosa y que es capaz de explicar y predecir una gran cantidad de fenómenos. Una de las dificultades en su construcción fue la gran cantidad de fenómenos complejos, que en un principio aparentemente no tenían relación unos con otros. Sin embargo uno de los mayores logros de la electrodinámica es mostrar que en realidad están todos relacionados, además de permitir la creación de nuevas aplicaciones, que no aparecen de forma inmediata en la naturaleza y que han cambiado la vida de todo el mundo. Absolutamente toda la teoría se encuentra resumida en un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales, llamadas **Ecuaciones de Maxwell**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{\rho(t,\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{x}) = \mu_0\vec{J}(t,\vec{x}) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x})$$

Éstas 4 ecuaciones resumen todos los resultados empíricos acumulados durante años por los estudios de los físicos Coulomb, Gauss, Ampère, Faraday y muchos otros. Fueron presentadas en 1873 por el matemático inglés **James Clerk Maxwell**[1]. Además de explicar todos los fenómenos eléctricos y magnéticos conocidos hasta la época, muestran que electricidad y magnetismo no son fenómenos independientes, y explica la forma en como ambos se relacionan. Las ecuaciones de Maxwell fueron capaces de predecir la creación de ondas electromagnéticas de energía cuya velocidad de propagación teórica coincidía con la velocidad de la luz (hecho que corroboró Heinrich Hertz en 1887). Hoy se sabe que la luz es un tipo de onda electromagnética, luego, todas las leyes de la óptica, también son explicadas de forma consistente por las ecuaciones de Maxwell. Esto fue un gran suceso pues logró mostrar que fenómenos que parecían totalmente diferentes provenían de los mismos principios físicos. Radiación infraroja, luz visible, radiación ultravioleta, rayos x, rayos gama, son todos diferentes tipos de ondas oscilatorias, y sólo se diferencian en sus frecuencias. Todas reciben el nombre de radiación, debido a que propagan (irradian) energía.
En este curso se pretenden desarrollar las bases empíricas para las ecuaciones de Maxwell, mediante la introducción del campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$.

[1] A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, James Clerk Maxwell

Primeramente estudiaremos el caso estático, en donde los campos no tienen dependencia temporal. En este caso las ecuaciones de Maxwell se transforman en:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}$$

Notemos que ahora hay 2 ecuaciones para cada campo totalmente independientes entre sí, en otras palabras, electricidad y magnetismo son fenómenos absolutamente independientes mientras los campos sean estáticos. Las dos primeras ecuaciones corresponden a la Electrostática, mientras que las 2 últimas a la Magnetostática. Desarollaremos las ideas y principios fundamentales de ambos casos estáticos, para luego estudiar los campos variantes en el tiempo y derivar las ecuaciones de Maxwell.



Fig. 2.1: James Clerk Maxwell

James Maxwell (1831-1879) Físico Escocés. Es el creador de la electrodinámica moderna y el fundador de la teoria cinética de los gases. Sus teorías constituyeron el primer intento de unificar dos campos de la física que, antes de sus trabajos, se consideraban completamente independientes: la electricidad y el magnetismo (conocidos como electromagnetismo). Además, en el año 1859 Maxwell formuló la expresión termodinámica que establece la relación entre la temperatura de un gas y la energía cinética de sus moléculas.

Capítulo 3

Electrostática

Una de las propiedades fundamentales de la materia corresponde a lo que se conoce como carga eléctrica. Esta propiedad es el origen de las fuerzas eléctricas. Considere un sistema de dos cargas puntuales y en reposo, q_1 y q_2, separadas por una distancia r en el vacío. Por dos cargas puntuales, nos referimos por supuesto a objetos cuyo diámetro máximo es muchísimo menor que la separación entre ellos.
Las fuerza entre cargas estáticas fue estudiada por Charles Augustin de **Coulomb**, (Físico e Ingeniero francés), encontrando una gran similitud entre la forma de las fuerzas electrostáticas y las de gravitación, pero notando que, a diferencia de la fuerza gravitacional, las fuerzas electrostáticas también pueden ser repulsivas.

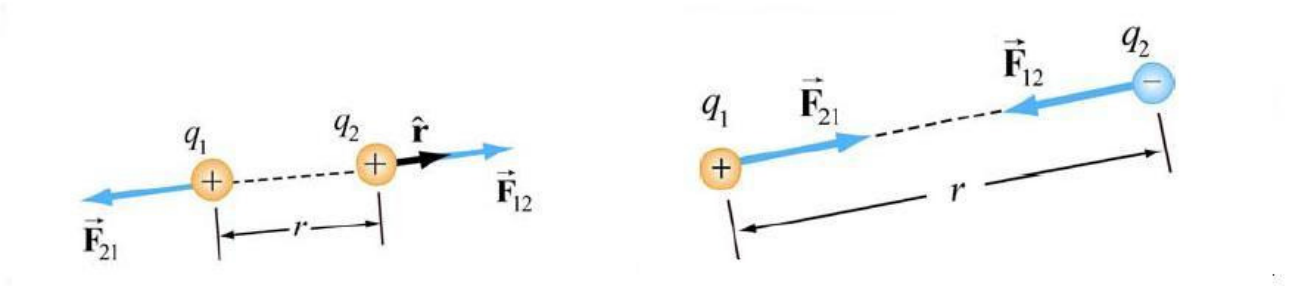
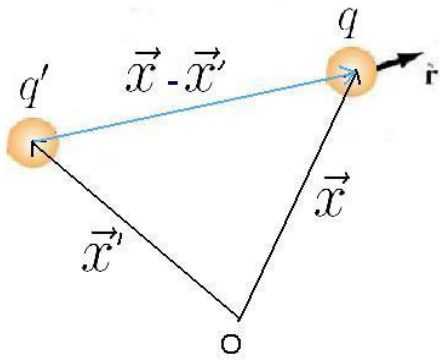


Fig. 3.1: Fuerza entre cargas puntuales puede ser repulsiva y atractiva

La fuerza que ejerce q' sobre q está dada por la **ley de Coulomb**

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{|\ \vec{x}-\vec{x}'\ |^3}(\vec{x}-\vec{x}')$$



Es decir, la fuerza electrostática es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Notar que la dirección

$$\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

va siempre desde la carga q' hacia la carga q. El signo de la fuerza estará determinado entonces por el producto de las cargas, así, si ambas son iguales, la fuerza será repulsiva, mientras que si son de signo opuesto, la fuerza será atractiva.

En el sistema S.I., la constante de proporcionalidad está dada por

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} = 8,9875 \times 10^9 Nm^2/C^2$$

Donde ϵ_0 se conoce como la **permitividad del vacío**.

Similarmente, la fuerza sobre q' debido a q está dada por $\vec{F}_{q'} = -\vec{F}_q$, como debe ser por la tercera ley de Newton. La ley de Coulomb describe perfectamente las fuerzas entre 2 cargas puntuales, luego, resulta de interés estudiar qué sucede cuando hay más de dos cargas presentes. Supongamos que existen N cargas q_j con $j = 1, 2, ...N$. Supongamos que hay una carga q en la posición $\vec{x}$ y que la posición de la carga q_j es $\vec{x}_j$. La fuerza que ejercen las N cargas sobre q está dada por el **principio de superposición**

$$\vec{F}_q = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_j}{\mid \vec{x} - \vec{x}_j \mid^3} (\vec{x} - \vec{x}_j)$$

Es decir, la suma de cada fuerza por separado. El principio de superposición implica que la fuerza neta entre 2 cargas es **independiente** de la prescencia de otras cargas. Esto es cierto siempre y cuando las cargas estén en posiciones fijas (recordar que son fuerzas electrostáticas). Podrán notar inmediatamente, que como estamos considerando cargas estáticas que se ejercen fuerzas entre sí, deben necesariamente existir fuerzas externas que las mantengan en equilibrio. Supondremos entonces que las cargas están forzadas a mantenerse en su posición, de forma que las leyes que hemos establecido hasta ahora son válidas.



Fig. 3.2: Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

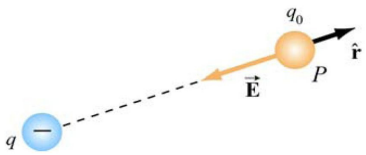
3.1. Campo Eléctrico

La fuerza electrostática, como la fuerza gravitacional, es una fuerza que actúa a distancia, es decir, no requiere que los objetos estén en contacto entre sí. Entonces, si tenemos 2 cargas puntuales, digamos, q y q_0, podemos medir la fuerza que ejerce q sobre q_0. A q_0 se le llamará **carga de prueba**, y la posicionaremos en diferentes lugares del espacio y mediremos la fuerza que siente debido a la presencia de la carga fija q. En este sentido, se piensa que q genera algo en todo el espacio que debe ser independiente de si colocamos o no la carga de prueba q_0. Se dice que una carga eléctrica genera un **campo eléctrico** (matemáticamente descrito por un campo vectorial) en todo el espacio, el cual es capaz de actuar sobre otras cargas.

Justamente para cuantificar la magnitud del campo creado por la carga, podemos medir la fuerza que experimenta una carga positiva de prueba q_o en algún punto del espacio.
El campo eléctrico $\vec{E}$ se define formalmente como

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0}$$

Es decir, el campo existe en todo el espacio y es independiente de la carga de prueba. La sutileza de elegir una carga de prueba infinitamente pequeña es para que el campo producido por q_0 no altere de ninguna forma a la fuente del campo que queremos cuantificar.



Diremos entonces con este nuevo enfoque que la carga q es una fuente (crea) un campo eléctrico $\vec{E}$ que ejerce una fuerza $\vec{F}_{q_0} = q_0\vec{E}(\vec{x})$ sobre una carga q_0 ubicada en $\vec{x}$
Usando la definición de Campo Eléctrico y la Ley de Coulomb, se obtiene que el campo eléctrico a una distancia r de la carga puntual q está dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es la dirección radial desde la carga q

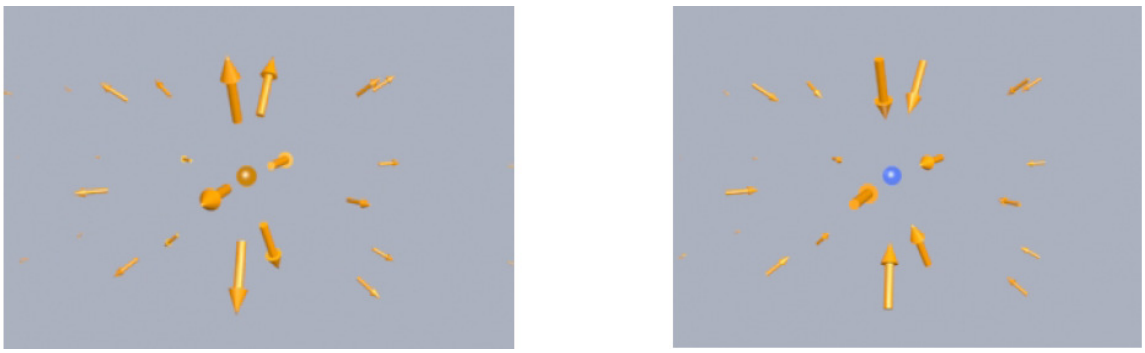


Fig. 3.3: Representación gráfica del campo vectorial $\vec{E}$ para una carga positiva(izq) y negativa (der)

Lógicamente, el principio de superposición es también válido para el campo eléctrico, bajo las mismas condiciones mencionadas anteriormente. Así, el campo en $\vec{x}$ de una distribución discreta de N cargas puntuales ubicadas en q_j,$j = 1, 2, ...N$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{\mid \vec{x} - \vec{x}_j \mid^3} (\vec{x} - \vec{x}_j) \tag{3.1}$$

La ley de Coulomb y el principio de superposición son las leyes empíricas fundamentales de la Electrostática. Más adelante, veremos que las ecuaciones de Maxwell para el campo Electrostático

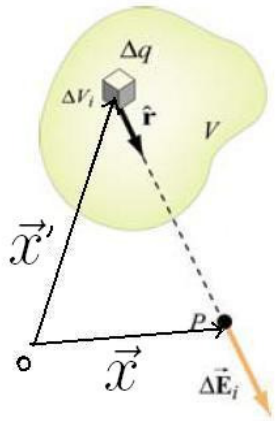
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

contienen exactamente la misma información que acabamos de presentar (y por supuesto, contienen muchísima información adicional!), pero de una forma mucho más general, simple y elegante.

3.2. Distribuciones continuas de carga - Integrales de Coulomb

Se pueden extender estas ideas para cuando se tiene una gran cantidad de cargas distribuídas en una región del espacio. Supongamos una distribución continua de carga encerrada en un volumen V, por ésto entendemos una región del espacio en donde se puede definir una densidad volumétrica de carga en cada punto, digamos $\rho(\vec{x})$ $(C\ /\ m^3)$



En el caso de obtener una distribución continua de carga, se utiliza una partición del volumen V en celdas de volumen infinitesimal d^3x'. En la posición $\vec{x}'$, se encuentra un pequeño volumen con carga dada por

$$dq(\vec{x}') = d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Como esta es una carga infinitesimal, el campo que genera en $\vec{x}$ será el de una carga puntual

$$d\vec{E}(\vec{x}') = \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Para obtener el campo generado por toda la distribución de carga, basta con sumar (integrar) sobre el volumen V las contribuciones individuales de cada elemento de volumen, luego

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d^3x'\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}(\vec{x} - \vec{x}')$$

En el caso de obtener una superficie S de carga, en donde para cada $\vec{x}'$ en S se tiene una densidad superficial de carga (que denotaremos $\sigma(\vec{x}')$ para diferenciarla de una densidad volumétrica), se obtiene

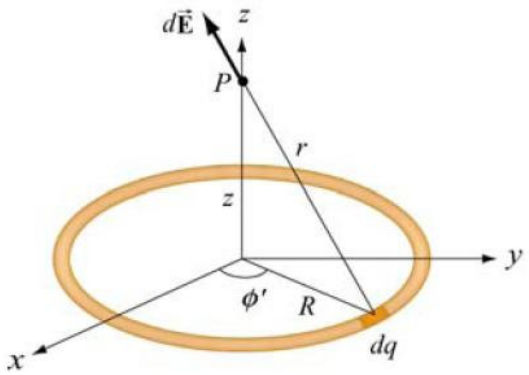
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{ds'\sigma(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}(\vec{x} - \vec{x}')$$

Por último, para una distribución lineal Γ, en donde para cada $\vec{x}'$ en Γ se tiene una densidad lineal de carga, denotada $\lambda(\vec{x}')$ entonces el campo en $\vec{x}$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Gamma \frac{dx'\lambda(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}(\vec{x} - \vec{x}')$$

Éstas son las integrales de Coulomb y son una extensión al caso de una distribución discreta de cargas, a distribuciones continuas en el espacio

Ejemplo: Campo de un anillo de carga
Consideremos un anillo con densidad lineal de carga constante y dada por λ. El objetivo es calcular el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en un punto sobre el eje de simetría a distancia z del origen



Un elemento diferencial de longitud sobre el anillo está dado por $dl = Rd\phi$ donde ϕ es el ángulo polar. Este elemento posee una carga $dq = \lambda dl = \lambda R d\phi$, de forma que el campo eléctrico en un punto $\vec{x}$ debido a esta carga infinitesimal está dado por la ley de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = \frac{d\phi R\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

donde $\vec{x}'$ es la posición del elemento de carga, en este caso

$$\vec{x}' = R\hat{r} = R\left(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi j\right)$$

de forma que el campo total se obtiene integrando sobre todo el anillo (abarcando todo el rango de ϕ)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\vec{x} - R\hat{r}}{\mid \vec{x} - R\hat{r} \mid^3}$$

ahora, se desea el campo en un punto sobre el eje simetría del anillo, a distancia z del origen, de forma que

$$\vec{x} = z\hat{k}$$

y queda

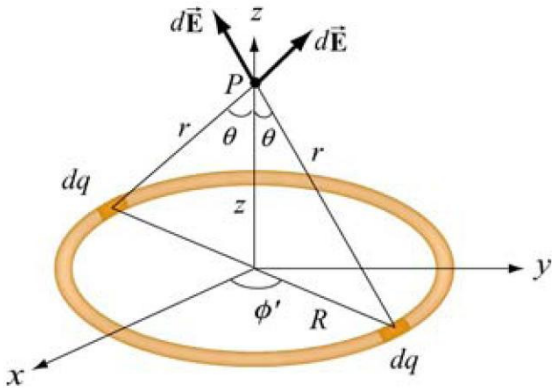
$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \frac{z\hat{k} - R\hat{r}}{\mid z\hat{k} - R\hat{r} \mid^3}$$

por supuesto que

$$\mid z\hat{k} - R\hat{r} \mid = \left(z^2 + R^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \frac{z\hat{k} - R\cos\phi\hat{i} - R\sin\phi\hat{j}}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

De estas tres integrales (en $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$), la única que no es nula es la según $\hat{k}$. Esto es fácil de ver apelando a la simetría de la distribución de carga



$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Rz}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{2\pi R}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

esto se puede escribir de otra forma considerando que $Q = 2\pi R\lambda$ es la carga total del anillo

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

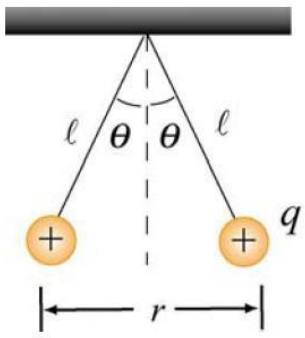
Si z es suficientemente grande en comparación con las dimensiones del anillo ($z >> R$), entonces

$$\vec{E}(z\hat{k}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\hat{k}$$

que sería el campo a distancia z de una carga puntual Q en el origen

Problema

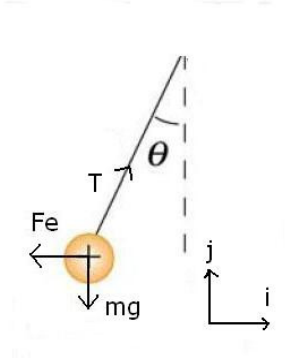
Dos pequeñas esferas de igual masa m y carga q, cuelgan por 2 hilos sin masa, sin carga y de largo l. Cada esfera forma un ángulo ϑ con el eje vertical, como se muestra en la figura



Calcule la carga q

Solución

Debido a la simetría del sistema, bastará con hacer análisis de fuerzas para una de las cargas. Consideramos el equilibrio entre las tres fuerzas que actúan: la fuerza de repulsión (las dos cargas son de igual signo) electrostática F_e, la tensión sobre el hilo T, y la fuerza gravitacional mg.



De la segunda ley de Newton para la esfera

$$F_x = Tsin\vartheta - Fe = ma_x = 0$$

$$F_y = Tcos\vartheta - mg = ma_y = 0$$

Como el sistema se encuentra en equilibrio, $a_x = a_y = 0$, entonces la primera ecuación equivale a

$$T\sin\vartheta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde r es la separación entre las 2 cargas

$$q^2 = 4\pi\varepsilon_0 T\sin\vartheta r^2$$

O equivalentemente,

$$q = \pm r\sqrt{4\pi\varepsilon_0 T\sin\vartheta}$$

Del equilibrio de fuerzas para el eje vertical obtenemos

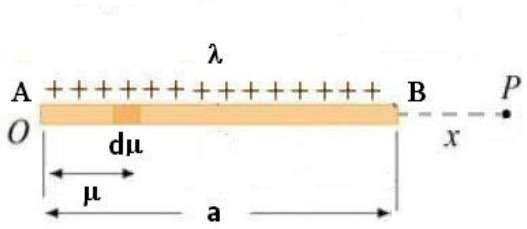
$$T = \frac{mg}{cos\theta}$$

Y además, $r = 2l \sin \vartheta$. Finalmente se obtiene

$$q_{eq} = \pm 2lsin\vartheta\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mgtg\vartheta} = \pm 4lsin\vartheta\sqrt{\pi\epsilon_0 mgtan\vartheta}$$

Problema

Se tiene una línea homogénea de carga con densidad lineal λ, y de longitud finita a. Calcular el campo eléctrico en el punto P a distancia x del extremo



Solución

Tomamos un pequeño elemento $d\mu$ de la línea de carga, situado a una distancia μ del punto A, y obtenemos el campo eléctrico en el punto P debido a este elemento diferencial

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda d\mu}{(a+x-\mu)^2}\hat{i}$$

Y el campo eléctrico total se obtiene integrando para toda la línea de carga. Esto es

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{\lambda d\mu}{(a+x-\mu)^2}\hat{i}$$

Sea $z = a + x - \mu$, así, $dz = -d\mu$ y el campo queda

$$\vec{E} = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{a+x}^{x}\frac{dz}{z^2}\hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z}\Big|_{a+x}^{x}\hat{i} = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0(a+x)}\right)\hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda(x+a)-\lambda x}{4\pi\epsilon_0 x(x+a)}\hat{i} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 x(x+a)}\hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x(x+a)}\hat{i}$$

Con Q la carga total de la línea.

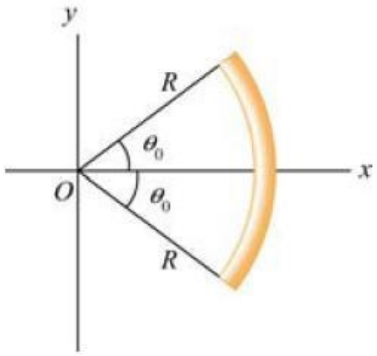
Notar que si $x \gg a$

$$\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{i}$$

que concuerda con el campo de una carga puntual

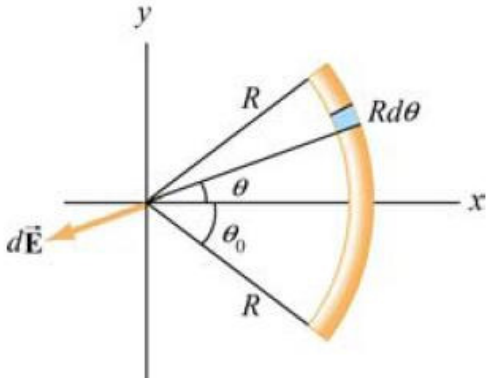
Problema

Una barra delgada con densidad de carga uniforme λ se dobla con la forma de un arco de círculo de radio R. El arco subiende un ángulo total $2\vartheta_0$, simétrico con respecto al eje x, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el campo eléctrico $\vec{E}$ en el origen O?. Vea que sucede cuando $\vartheta_0 \to \pi$



Solución

Considere un elemento diferencial de longitud $dl = Rd\vartheta$, que forma un ángulo ϑ con respecto al eje x. La cantidad de carga que contiene este elemento es $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$



Su contribución al campo eléctrico en O es

$$d\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2}(-\cos\vartheta\hat{i} - \sin\vartheta\hat{j}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda d\vartheta}{R}(-\cos\vartheta\hat{i} - \sin\vartheta\hat{j})$$

Integrando para ϑ entre $-\vartheta_0$ y ϑ_0, se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} d\vartheta(-\cos\vartheta\hat{i} - \sin\vartheta\hat{j})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}(-\sin\vartheta\hat{i} + \cos\vartheta\hat{j})\Big|_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda\sin\vartheta_0}{R}\hat{i}$$

Vemos que el campo eléctrico solo tiene componente en el eje x, lo que concuerda con la simetría del problema.

Si tomamos el límite cuando $\theta_0 \to \pi$, el arco se transforma en un anillo circular. Ya que $\sin\theta = 0$, la ecuación anterior implica que el campo eléctrico en el centro de un anillo de carga es nulo. Esto se esperaría por argumentos de simetría. (Comparar además con el campo de un anillo de carga calculado en este capítulo)

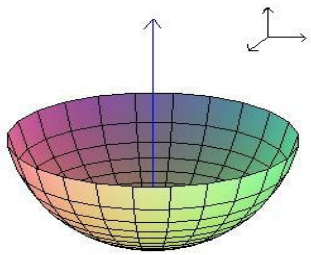
Por otro lado, para ángulos muy pequeños, $\sin\vartheta_0 \approx \vartheta_0$, recuperamos el caso de una carga puntual

$$\vec{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda\theta_0}{R}\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda\vartheta_0 R}{R^2}\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{i}$$

Donde la carga total del arco es $Q = \lambda l = \lambda(2R\vartheta_0)$

Problema

Un recipiente hemisférico no conductor de radio interior a tiene una carga total Q repartida uniformemente en su superficie interior. Encuentre el campo eléctrico en el centro de curvatura



Solución

Tomamos como origen el centro de curvatura de la semiesfera. A partir de esto podemos determinar la contribución de un elemento diferencial de carga en la superficie al campo eléctrico en el eje que pasa por el centro de curvatura, que coincide con la direccion $\hat{k}$ (El campo $\vec{E}$, por simetría, solo tendrá componente en $\hat{k}$).

$$d\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\sigma ds'$$

Un elemento diferencial de superficie sobre la esfera está dado por

$$ds = a^2 \sin\vartheta d\vartheta d\phi$$

y como la carga está distribuída uniformemente, la densidad superficial es simplemente

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Con esto, podemos determinar el campo total integrando sobre toda la superficie

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}a^2\int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \frac{Q}{2\pi a^2}\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Evaluando en $\vec{x}$= 0 obtenemos el campo en el centro de curvatura

$$\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{Q}{2\pi a^2}\frac{-\vec{x}'}{|-\vec{x}'|^3}a^2\sin\vartheta d\theta d\phi$$

$$\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{2\pi a^2}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{-\vec{x}'}{|-\vec{x}'|^3}a^2\sin\vartheta d\theta d\phi$$

El vector $\vec{x}'$ que recorre la superficie está dado por

$$\vec{x}' = a\cos\vartheta\hat{k} + a\sin\vartheta\cos\phi\hat{i} + a\sin\vartheta\sin\phi\hat{j}$$

Por el argumento de simetría, solo interesa la componente según $\hat{k}$. De todas formas se puede verificar calculando explícitamente las integrales en $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Con esto

$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-a\cos\vartheta}{a^3} a^2 \sin\vartheta d\vartheta \hat{k}$$

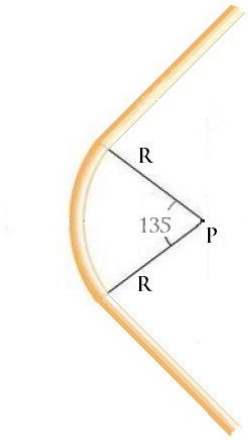
$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \hat{k} = \frac{Q}{8\epsilon_0 \pi a^2} \int_{\pi/2}^{\pi} -\sin(2\vartheta) d\vartheta \hat{k}$$

Finalmente el campo en el centro de curvatura es

$$\vec{E}(0) = \frac{Q}{8\epsilon_0 \pi a^2} \hat{k}$$

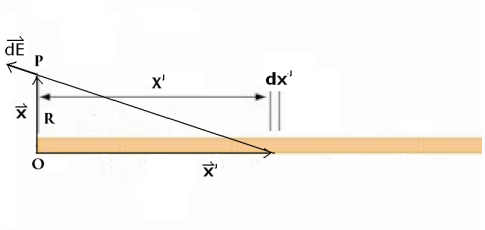
Problema

Considere un alambre muy delgado como el de la figura, éste está compuesto por dos rectas infinitas y un arco de círculo de 135 grados. El alambre tiene una densidad lineal de carga λ constante. Encuentre el campo eléctrico producido en el punto P



Solución

Este problema se resuelve mediante integrales de Coulomb y el principio de superposición. Descomponemos el problema en subproblemas más simples, una distribución de carga lineal y otra en un arco de círculo (ya visto en el problema anterior). Resolvamos entonces el problema de una distribución lineal infinita de carga



Un elemento de longitud dx' a distancia x' del origen genera una contribución al campo en P dada por

$$d\vec{E}(P) = \frac{dx'\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3}$$

donde $\vec{x} = R\hat{j}$ es el vector posición del punto P, y $\vec{x}' = x'\hat{i}$ el vector que recorre la distribución de carga (parámetro x'). Por el principio de superposición, el campo eléctrico en P se obtiene sumando sobre toda la distribución

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty dx'\frac{R\hat{j}-x'\hat{i}}{(x'^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty dx'\frac{x'}{(x'^2+R^2)^{3/2}}\hat{i} + \frac{R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dx'}{(x'^2+R^2)^{3/2}}\hat{j}$$

Calculemos primero la integral

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx'x'}{(x'^2+R^2)^{3/2}}$$

con el trivial cambio de variable $u = x'^2$, $du = 2x'dx'$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{(u+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty du(u+R^2)^{-3/2} = -2*\frac{1}{2}(u+R^2)^{-1/2}\Big|_0^\infty$$

$$I_1 = \frac{1}{R}$$

Ahora, obtenemos

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx'}{(x'^2+R^2)^{3/2}}$$

y utilizamos la conocida sustitución $x' = R\tan\vartheta$, $dx' = Rsec^2\vartheta d\vartheta$. Con esto la integral queda de la forma

$$I = \int \frac{d\vartheta Rsec^2\vartheta}{(R^2\tan^2\vartheta + R^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta Rsec^3\vartheta}{R^3 sec^3\vartheta} = \frac{1}{R^2}\int \frac{d\vartheta}{sec\vartheta} = \frac{1}{R^2}\int d\vartheta\cos\vartheta$$

$$I = \frac{1}{R^2}\sin\vartheta$$

Utilizando que $x'/R = \tan\vartheta$

$$\sin\vartheta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+R^2}}$$

de forma que

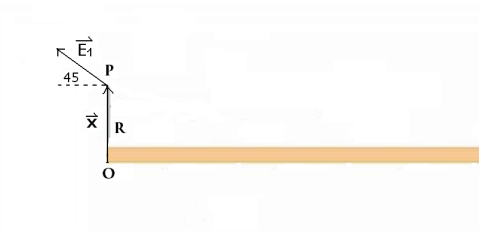
$$I_2 = \frac{1}{R^2}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+R^2}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{R^2}\lim_{x'\to\infty}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+R^2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{R^2}\lim_{x'\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1^2+(R/x')^2}} = \frac{1}{R^2}$$

Luego el campo eléctrico debido al alambre en el punto P es

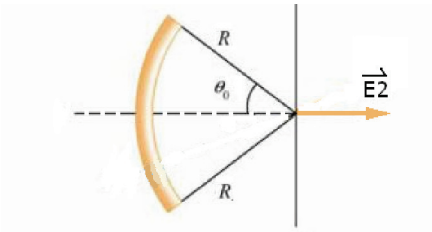
$$\vec{E}_1(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-\lambda}{R}\hat{i} + \frac{\lambda}{R}\hat{j}\right)$$

$$\vec{E}_1(P) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i}+\hat{j})\right)$$

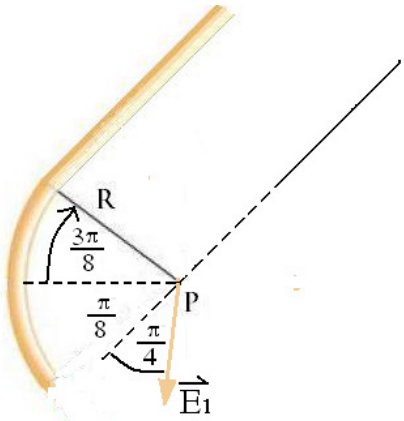


La contribución del sector de arco de círculo ya fue obtenida en un problema anterior, uego es inmediato que

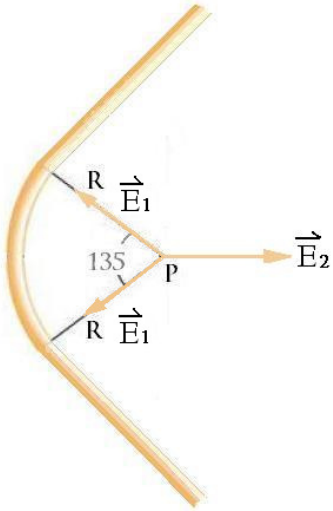
$$\vec{E}_2(P) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\hat{i}$$



Finalmente, el campo total en P se obtiene por superposición. Veamos que ocurre con el campo que produce el segmento rectilíneo superior



El campo $\vec{E}_1$ en P forma un ángulo de $3\pi/8$ con la horizontal. De esta forma, la superposición de los 3 campos es como sigue



$$\vec{E}(P) = \left(\mid \vec{E}_2 \mid -2 \mid \vec{E}_1 \mid \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\hat{i}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\lambda}{R}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 2\frac{\lambda}{R}\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\hat{i}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\hat{i}$$

Problema

Se pide calcular el campo eléctrico a distancia r del centro de una distribución uniforme de carga ρ_0 localizada dentro de una esfera de radio R, mediante la integral de Coulomb, o sea, calcule

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

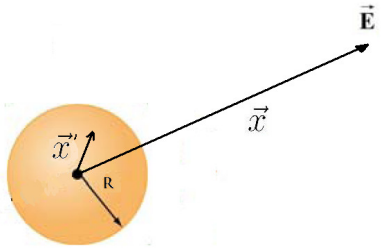
puesto que

$$\rho(\vec{x}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{si} \mid \vec{x}' \mid \leq R \\ 0 & \text{si} \mid \vec{x}' \mid > R \end{cases}$$

para $r > R$

Solución

Ubiquemos el centro de la esfera en el origen



Sea $\vec{x}$ un punto a distancia r del origen

$$\vec{x} = r\hat{r}$$

y $\vec{x}'$ un punto dentro de la distribución de carga

$$\vec{r}' = r'\hat{r}'$$

El campo eléctrico está dado por la **integral de Coulomb** sobre la distribución de carga

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{R} dr' r'^2 \frac{\hat{r}r - \hat{r}'r}{\mid \hat{r}r - \hat{r}'r' \mid^3}$$

De la simetría de la distribución de carga, es claro que el campo eléctrico será sólo función de la distancia r y su dirección será radial, es decir

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\hat{r}$$

esto nos permite además orientar el vector $\vec{x}$ según la dirección $\hat{k}$, de forma que

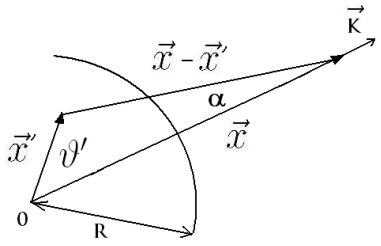
$$\mid \hat{r}r - \hat{r}'r' \mid = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'\right)^{1/2}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{R} dr' r'^2 \frac{\hat{r}r - \hat{r}'r}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'\right)^{3/2}} = E(r)\hat{r}$$

$$E(r) = \hat{r} \cdot \vec{E} = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{R} dr' r'^2 \frac{r - r'\cos\vartheta'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'\right)^{3/2}}$$

Hasta ahora, esta expresión es absolutamente general. Sin embargo, el valor de la integral dependerá si el punto $\vec{x}$ se encuentra dentro o fuera de la distribución

Campo externo, $r > R$



se tiene

$$r = r'\cos\vartheta' + \mid \vec{x} - \vec{x}' \mid \cos\alpha$$

Sea $s = \mid \vec{x} - \vec{x}' \mid$, luego

$$\frac{r - r'\cos\vartheta'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'\right)^{3/2}} = \frac{s\cos\alpha}{s^3} = \frac{\cos\alpha}{s^2}$$

de la relación

$$r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta' = s^2$$

se puede obtener para $\cos\vartheta'$

$$\cos\vartheta' = \frac{r^2 + r'^2 - s^2}{2rr'}$$

y utilizando el teorema del coseno para r'

$$r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha = r'^2$$

de aquí obtenemos que

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + s^2 - r'^2}{2rs}$$

Por último

$$\frac{\partial}{\partial s}\cos\vartheta' = -\sin\vartheta' \frac{d\vartheta'}{ds} = -\frac{2s}{2rr'} = -\frac{s}{rr'}$$

Luego

$$\int_0^R dr' \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' r'^2 \frac{r - r'\cos\vartheta'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'\right)^{3/2}}$$

$$= \int_0^R dr' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \frac{s}{rr'} r'^2 \frac{r^2 + s^2 - r'^2}{2rs^3} = \int_0^R dr' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \frac{r'}{2r^2}\left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2r^2}\int_0^R dr' r' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2}\right)$$

y

$$\int_{r-r'}^{r+r'} ds \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2}\right) = \int_{r-r'}^{r+r'} ds + (r^2 - r'^2)\int_{r-r'}^{r+r'} \frac{ds}{s^2}$$

$$= (r + r') - (r - r') + \frac{r^2 - r'^2}{-2 + 1}\left(\frac{1}{r + r'} - \frac{1}{r - r'}\right)$$

$$= 2r' - (r^2 - r'^2)\frac{(r - r') - (r + r')}{r^2 - r'^2} = 4r'$$

Así

$$\frac{1}{2r^2}\int_0^R dr' r' \int_{r-r'}^{r+r'} ds \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{s^2}\right) = \frac{2}{r^2}\int_0^R dr' r'^2 = \frac{2R^3}{3r^2}$$

de forma que

$$E(r) = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^R dr' r'^2 \frac{r - r'\cos\vartheta'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'\right)^{3/2}} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Así, para $r > R$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

si $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ es la carga total de la esfera, entonces

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

es decir, fuera de la esfera, el campo eléctrico es igual al campo de una carga puntual de carga total Q ubicada en el origen

La integral de Coulomb para $r < R$ es levemente más compleja, y para calcularla resulta útil manejar los conceptos sobre integrales de ángulo sólido. El valor pedagógico de este cálculo no es espantar al lector del estudio de la electrostática, sino de mostrar explícitamente que, aunque la geometría del problema es muy sencilla, la integral para el campo eléctrico no lo es. Esto por supuesto motiva a desarrollar más herramientas matemáticas para el cálculo de campos eléctricos, que en muchos casos facilitarán la vida (Comparar en el próximo capítulo con el cálculo mediante la Ley de Gauss). De todas formas, integrar bien es un arte en muchos casos, muy util

3.3. Apéndice Matemático sobre la Delta de Dirac

En cursos de Electrodinámica, es muy utilizada la delta de Dirac $\delta(x)$, que satisface

$$\delta(x) = 0, x \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = 1$$

Semejante función no existe en el análisis ordinario. La $\delta(x)$ de Dirac es una **función generalizada** (o distribución de Schwarz).

Funciones Generalizadas

Utilizaremos funciones complejas $f(x)$ de cuadrado integrable bajo el producto interno dado por

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)g(x)$$

Sea

$$\{g_n(x), n = 1, 2, 3, ...\}$$

una sucesión de funciones de cuadrado integrable, esto es

$$(g_n, g_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx[g_n(x)]^2 < \infty$$

Llamaremos **función de prueba** cualquier función $f(x)$ de cuadrado integrable

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx[f(x)]^2 < \infty$$

Definimos la **Función Generalizada g(x)** asociada a la sucesión $\{g_n(x)\}$ como

$$\boxed{g(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \{g_n(x)\}}$$

Este símbolo se define mediante el límite de las integrales, es decir, $g(x)$ es una función generalizada asociada a la sucesión $\{g_n(x)\}$ si

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x)f(x)$$

para cualquier función de prueba $f(x)$

Nota 1 Por la desigualdad de Schwarz

$$(g_n, f)^2 \leq (g_n, g_n)(f, f) < \infty$$

vemos que toda sucesión de funciones de cuadrado integrable define una función generalizada

Nota 2 En rigor, las funciones generalizadas están definidas detrás de la integral, no es necesario que la sucesión sea convergente en el sentido ordinario, esto quiere decir que no es necesario que se tenga

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

para que la función generalizada exista. g(x) existe rigurosamente en el límite de las integrales

3.3.1. Delta de Dirac $\delta(x)$

El ejemplo mas ilustre y sobresaliente de función generalizada es la delta de dirac, que será fundamental para el desarollo de muchas teorías de la física, así como del Análisis de Señales (Disciplina de la Ingeniería Eléctrica). Existen varias sucesiones que definen a la delta de Dirac, comenzaremos con una sucesión de la forma

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -1/n \\ n/2 & -1/n < x < 1/n \\ 0 & x > 1/n \end{cases}$$

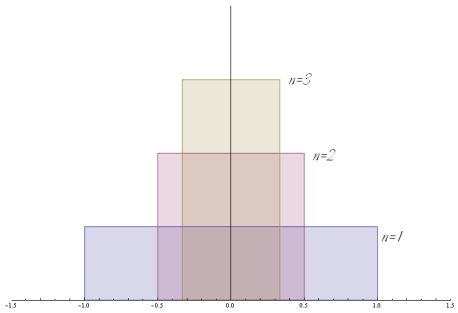


Fig. 3.4: Primeras 3 funciones dadas por la sucesión $\delta_n(x)$

Notar que a medida que aumenta n, la función se asemeja a un rectángulo cada vez más angosto en torno al origen y de mayor amplitud. Sin embargo, siempre el área bajo $\delta_n(x)$ es uno. Físicamente usaremos la delta de Dirac para modelar distribuciones de carga que son nulas excepto en un punto del espacio

Veamos que en efecto $\delta_n(x)$ define una sucesión de funciones de cuadrado integrable

$$(\delta_n(x), \delta_n(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx[\delta_n(x)]^2 = \int_{-1/n}^{1/n} dx \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right) = \frac{n}{2}$$

Además

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta_n(x) = \int_{-1/n}^{1/n} dx(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}\frac{2}{n} = 1$$

Veamos que ocurre con

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta_n(x)f(x)$$

donde $f(x)$ es cualquier función de cuadrado integrable. Se tiene que

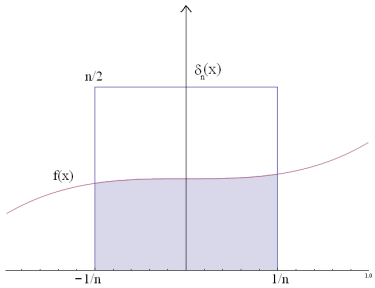


Fig. 3.5: Utilizando el teorema del valor medio integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta_n(x)f(x) = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} dxf(x) = \frac{n}{2}\frac{2}{n}f_n = f_n$$

donde f_n es el valor de la función para algún x entre $-1/n < x < 1/n$. De esta forma, es claro que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta_n(x)f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n = f(0)$$

En resumen, la sucesión $\delta_n(x)$ define la función generalizada $\delta(x)$, llamada **delta de Dirac**, cuyas propiedades fundamentales son

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)f(x) = f(0)$$

$$\delta(x) = 0, x \neq 0$$

Del mismo modo, podemos interpretar $\delta(x - x_o)$ en base a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x - x_0) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x - x_0)f(x) = f(x_o)$$

$$\delta(x - x_0) = 0, x \neq x_0$$

Nota

No existe ninguna función ordinaria con éstas propiedades, pero sí existe una función generalizada! Ahora que se tiene en claro el significado de las integrales recién mencionadas, se puede tratar la delta de Dirac como una función ordinaria, sin olvidar el significado real de ésta. Físicamente, la Delta puede representar una señal o **Impulso** de gran amplitud y de extensión infinitamente pequeña. Por ejemplo, $\delta(t - t_o)$ puede representar un sonido o una fuerza de gran amplitud que ocurre en el instante $t = t_o$, y de extensión prácticamente nula en el tiempo (Un aplauso o el impulso que actúa sobre una pelota cuando rebota contra una pared). En electricidad y magnetismo, $\rho = q\delta(x - x_o)\delta(y - y_o)\delta(z - z_0)$ representará la densidad volumétrica de una carga puntual q ubicada en (x_0, y_0, z_0), es decir, es nula en todo el espacio excepto en el punto (x_o, y_0, z_0)

Igualdad de Funciones Generalizadas

Dos funciones generalizadas

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\{g_n(x)\}$$

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\{h_n(x)\}$$

son iguales si y sólo si, con cualquier función $f(x)$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx[g(x) - h(x)]f(x) = 0$$

Es decir

$$g(x) \doteq h(x) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx[g(x) - h(x)]f(x) = 0$$

Anteriormente mostramos como una sucesión de funciones rectangulares $(\delta_n(x))$ definen a $\delta(x)$. De igual forma, se puede construír la delta de Dirac con una sucesión de Gaussianas

$$h_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

de forma que

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \{h_n(x)\}$$

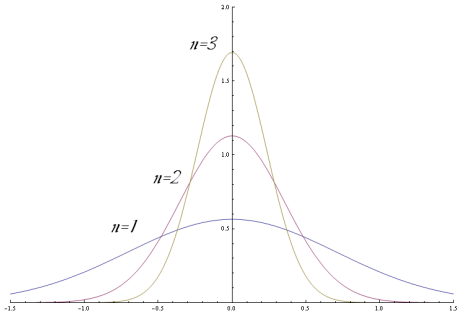


Fig. 3.6: Construcción de $\delta(x)$ mediante una sucesión de Gaussianas

Este tipo de funciones nos es familiar, sabemos que siempre una distribución Gaussiana tiene como integral total 1 (es una distribución de Probabilidad). Para demostrar que esta sucesión define igualmente a la delta basta con demostrar que

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\{\delta_n(x) - \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}\}f(x) = 0$$

3.4. Propiedades de la delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)f(x) = f(0)$$

$$\delta(x)f(x) = f(0)\delta(x)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{\mid a \mid}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta'(x)f(x) = -f'(0)$$

$$\delta(x - x') = 0, x \neq x$$

$$\int_{a}^{b} dx'\delta(x - x') = 1, a < x < b$$

$$\delta(x - x') = \delta(x' - x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'\delta(x - x')f(x') = f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx''\delta(x'' - x')\delta(x'' - x) = \delta(x' - x)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x - x_i)}{\mid f'(x) \mid_{x=x_i}}$$

donde x_i son los ceros simples de $f(x)$

Delta de Dirac en 3 dimensiones

Se define

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

la cual cumple

$$\iiint_V d^3x'\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \end{cases}$$

$$\iiint_{R^3} d^3x'\delta(\vec{x} - \vec{x}') = 1$$

$$\iiint_{R^3} d^3x'\delta(\vec{x} - \vec{x}')f(\vec{x}') = f(\vec{x})$$

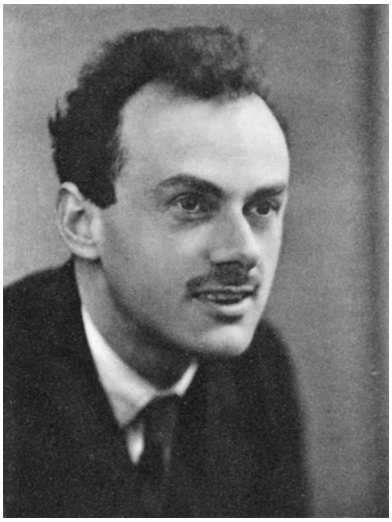


Fig. 3.7: Paul Dirac

Paul Dirac(1902-1984) Físico Inglés. Se graduó de Ingeniero Eléctrico en 1921, posteriormente estudió matemáticas y fue recibido en la Universidad de Cambridge. En 1926 desarrolló una versión de la mecánica cuántica en la que unía el trabajo previo de Werner Heisenberg y de Erwin Schrödinger en un único modelo matemático que asocia cantidades medibles con operadores que actúan en el espacio vectorial de Hilbert y describe el estado físico del sistema. Por este trabajo recibió un doctorado en física por Cambridge. En 1928, trabajando en los spines no relativistas de Pauli, halló la ecuación de Dirac, una ecuación relativista que describe al electrón. Este trabajo permitió a Dirac predecir la existencia del positrón, la antipartícula del electrón

Problema

Muestre que una distribución discreta de cargas q_i, $i = 1, 2, ...N$ ubicada en los puntos $\vec{x}_i$, $i = 1, 2, ...N$ es consistente con una distribución volumétrica de carga

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Solución

Para ver que la distribución de carga se puede escribir de esta forma, se debe verificar que el campo eléctrico que genera es el correcto. En efecto

$$\vec{E}(\vec{x}) = \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \iiint_{R^3} d^3x' \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Si la distribución es finita (N es un número finito) podemos intercambiar la integral con la suma (y nos aseguramos que no se espante ningún matemático)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \iiint_{R^3} d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}_i') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{\mid \vec{x} - \vec{x}_i \mid^3}$$

que es el campo correcto generado por la distribución de carga

Problema

Demuestre la propiedad

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\mid f'(x) \mid_{x=x_i}}$$

donde x_i son los ceros simples de $f(x)$

Solución

Sea la sucesión de funciones de cuadrado integrable

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -1/n \\ n/2 & -1/n < x < 1/n \\ 0 & x > 1/n \end{cases}$$

$\delta(x)$ es la función generalizada asociada a la sucesión $\delta_n(x)$

$$\delta(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \{\delta_n(x)\}$$

Ahora usaremos el hecho de que dos funciones generalizadas

$$g(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \{g_n(x)\}$$

$$h(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \{h_n(x)\}$$

son iguales si y solo si , con cualquier función de prueba $f(x)$ se tiene

$$\int_\infty^\infty dx \, (g(x) - h(x)) \, f(x) = 0$$

Se define la función generalizada

$$g(x) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\mid \frac{df}{dx} \mid_{x=x_i}}$$

donde x_i son los ceros simples de f. Por supuesto

$$g(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \{g_n(x)\}$$

con

$$g_n(x) = \sum_i \frac{\delta_n(x - x_i)}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x_i}}$$

Sea $y(x)$ una función de prueba

$$\int_{-\infty}^\infty dx g_n(x) y(x) = \int_{-\infty}^\infty dx \sum_i \frac{\delta_n(x - x_i)}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x_i}} y(x)$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx g_n(x) y(x) = \sum_i \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\delta_n(x - x_i)}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x_i}} y(x) = \sum_i \int_{x_i - 1/n}^{x_i + 1/n} dx \frac{n/2}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x_i}} y(x)$$

Por el teorema del valor medio integral

$$\int_{-\infty}^\infty dx g_n(x) y(x) = \sum_i \frac{n/2}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x^*}} (2/n) \, y(x^*)$$

con $x^* \in [-1/n + x_i, 1/n + x_i]$. Con esto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) y(x) = \sum_i \frac{y(x_i)}{\mid \frac{df}{dx} \mid_{x=x_i}}$$

Ahora, veamos que ocurre con la función generalizada

$$h(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \{h_n(x)\}$$

con

$$h_n(x) = \delta_n[f(x)]$$

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & f(x) < -1/n \\ n/2 & -1/n \leq f(x) \leq 1/n \\ 0 & f(x) > 1/n \end{cases}$$

sea $I_j = [x_{1j}, x_{2j}]$, $j = 1, 2, ...$ tal que $\forall$x $\in I_j$, $-1/n \leq f(x) \leq 1/n$ $(x_{2j} \geq x_{1j})$ y tal que

$$I_j \bigcap I_i = \phi$$

$\forall i \neq j$ (intervalos disjuntos). Así, por el teorema del valor medio integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h_n(x) y(x) = \sum_i \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} dx \frac{n}{2} y(x) = \sum_i \frac{n}{2} y(x_i^*) \left(x_{2i} - x_{1i}\right)$$

con $x_i^* \in I_i$. Además, está garantizada la existencia de un $x_i' \in I_i$ tal que

$$\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x_i'} = \frac{\mid 2/n \mid}{x_{2i} - x_{1i}} = \frac{2/n}{x_{2i} - x_{1i}}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h_n(x) y(x) = \frac{(2/n)\,(2/n)\, y(x_i^*)}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x_i'}}$$

Si $n \to \infty$, $I_j = x_j$ tal que $f(x_j) = 0$. Así

$$\lim_{n\to\infty} dx h_n(x) y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) y(x) = \frac{y(x_i)}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x} = x_i}$$

Por lo tanto, se ha demostrado la igualdad entre las funciones generalizadas

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\mid \frac{df(x)}{dx} \mid_{x=x_i}}$$

Capítulo 4

Ley de Gauss

En el capítulo anterior hemos visto las leyes empíricas fundamentales de la electrostática en el espacio vacío (sin un medio material presente), las cuales se pueden resumir en lo siguiente 1) Las cargas eléctricas estáticas son **fuentes de campos eléctricos**, los cuales actúan sobre otras cargas



2) El campo de una carga puntual está dado por la **Ley de Coulomb**, esto es, su magnitud es proporcional a la magnitud de la carga y decrece según el inverso del cuadrado de la distancia 3) Si hay más de una carga presente, el campo total será la suma vectorial de los campos debido a cada carga individual (**Principio de Superposición**)

Estas leyes son toda la electrostática! Si combinamos la ley de Coulomb y el principio de superposición, no necesitamos (en teoría) saber nada más. A partir de estas leyes vimos además que si se tiene una distribución continua de carga encerrada en un volumen V, el campo eléctrico en un punto $\vec{x}$ se obtiene evaluando la integral de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Más adelante no utlizaremos demasiado ésta fórmula, la escribimos sólo para enfatizar el hecho de que hemos resuelto completamente el problema de la electrostática en que **conocemos** exactamente la distribución espacial de todas las cargas. Es decir, conocemos $\rho(\vec{x}')$ en todo el espacio.

Problema que hemos resuelto: Dadas las cargas, ¿cómo son los campos?
Nuestra respuesta es : Resuelva esta integral

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d^3x'\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

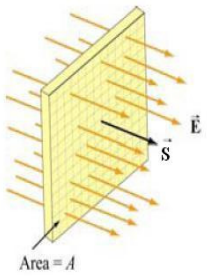
Así que aparentemente no hay nada más que resolver, todo se trata de calcular integrales en 3 dimensiones. (que en la práctica pueden ser nada de sencillas). Con las integrales de Coulomb podemos encontrar de forma relativamente sencilla los campos producidos por un plano de carga, de una línea de carga, de una cáscara esférica de carga, o de alguna otra distribución más o menos simple.

El gran problema es, que en muchas situaciones reales de la electrostática, la distribución es más compleja, o peor aún, no conocemos inicialmente cómo están distribuídas las cargas, luego las cosas se nos complican. Las posiciones de las cargas pueden depender del campo eléctrico, y el campo eléctrico a su vez dependerá de la posición de las cargas. Por ejemplo, veremos más adelante que si acercamos un cuerpo cargado a un conductor (es un material que cumple ciertas propiedades) , los electrones en el conductor se moverán hasta alcanzar un equilibrio electrostático. La densidad de carga ρ puede ser conocida en parte, (la carga que hemos acercado), pero habrá otra parte debida a las cargas que se mueven en el conductor que definitivamente no conocemos inicialmente. Y para calcular la integral de Coulomb, toda la distribución de carga se debe conocer.

Luego, deberemos introducir otras leyes y herramientas matemáticas necesarias para resolver los problemas de Electrostática, y veremos que la situación no siempre es tan fácil como se podría pensar

4.1. Ley de Gauss de la Electrostática

Comensaremos por definir una cantidad escalar llamada **flujo de un campo vectorial**.

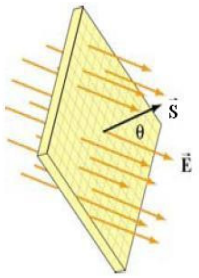


Considere la superficie plana de la figura. Se define $\vec{S} = S\hat{n}$ como el vector de área, cuya magnitud es el área de la superficie, S, y apunta en la dirección normal $\hat{n}$ (perpendicular en todo punto a la superficie). Si la superficie se encuentra sumergida en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ que apunta siempre en la misma dirección de $\hat{n}$ (perpendicular a la superficie S), el flujo sobre la superficie es la proyección de $\vec{E}$ sobre el vector $\vec{S}$

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = \vec{E} \cdot \hat{n}S = ES$$

Ahora, si el campo eléctrico sigue siendo uniforme pero forma un ángulo ϑ con $\hat{n}$, el flujo será

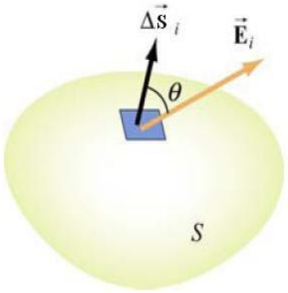
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = ESCos\vartheta$$



Es decir, el flujo de un campo vectorial sobre una superficie mide en cierta forma la componente normal a la superficie. Notar que según la definición del vector normal $\hat{n}$, el flujo eléctrico es positivo si las líneas de campo eléctrico están saliendo a través de la superficie, y será negativo si las líneas entran a través de la superficie.

Generalización
Hemos definido el flujo del campo eléctrico sobre una superficie muy simple (plana). Además hemos supuesto que el campo es uniforme (magnitud y dirección constantes). En general,una superficie S puede ser curva, y el campo eléctrico $\vec{E}$ puede variar sobre la superficie (tanto en magnitud como en dirección).

Nos resultará de particular interés aquellas superficies que son **cerradas**. Una superficie cerrada es aquella que envuelve completamente a un volumen (es el contorno de un volumen). Para calcular el flujo del campo sobre una superficie cerrada, se divide la superficie en una suma de elementos de área infinitesimales, $\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i \hat{n}_i$, como se ve en la figura.



El flujo a través de $\Delta\vec{S}_i$ es

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = E_i \Delta S_i Cos\theta$$

El flujo total a través de la superficie se obtiene sumando sobre todos los elementos de superficie. (A la Riemann) Tomando el límite cuando $\Delta S_i \to 0$ se obtiene la **integral de flujo**

$$\Delta\Phi_E = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Le **ley de Gauss** establece que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por ella. Más concretamente

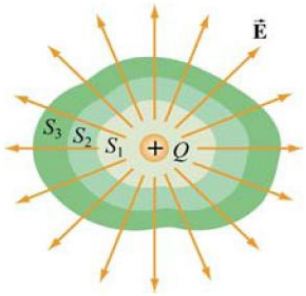
$$\Phi_E = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

o, escribiendo de forma explícita la carga encerrada por S

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Esta ley es consecuencia directa de la Ley de Coulomb y la geometría Euclídea. Notar que campos eléctricos creados por cargas fuera de la superficie no contribuyen al flujo total. Es decir, el flujo sobre una superficie cerrada sólo depende de la carga encerrada por ella.

La forma de la superficie puede ser elegida arbitrariamente. Para las superficies de la figura, el mismo resultado se obtiene para el flujo eléctrico ($\Phi_E = Q/\epsilon_0$).

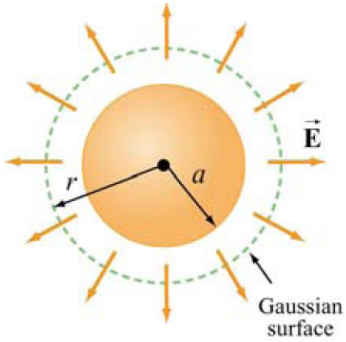


La ley de Gauss es extremadamente útil en muchos casos. Hay que notar, que a partir de la Ley de Gauss es posible recuper la Ley de Coulomb, es decir, conociendo la ley de Gauss uno podría determinar la forma de los campos. Hay que notar además, que **hay casos en los cuales esta ley no es práctica**, es útil sólo en problemas donde la integral de flujo es simple de calcular.

Ejemplo: Campo de una distribución esférica homogénea de carga
Tal como en el capítulo 1, se desea obtener el campo eléctrico de una distribución de carga

$$\rho(\vec{x}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \mid \vec{x}' \mid \leq R \\ 0 & \text{si } \mid \vec{x}' \mid > R \end{cases}$$

donde el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de la distribución de carga. Una forma de resolver esto es evaluando la integral de Coulomb (no muy recomendable). Otra, es considerando la evidente simetría esférica del campo eléctrico, es claro que éste sólo puede depender de la distancia r al origen. Además, su dirección debe coincidir con la dirección radial $\hat{r}$. De esta forma, para obtener el campo exterior, escogemos una superficie Gaussiana esférica de radio $r > R$, como se muestra en la figura



El flujo del campo eléctrico sobre esta superficie es

$$\Phi = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \oiint_S dS\hat{r} \cdot E(r)\hat{r} = E(r) \oiint_S dS$$

$$\Phi = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde Q es la carga total de la distribución

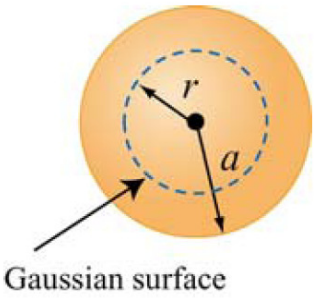
$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

es decir, igual al de una carga puntual Q en el origen. En términos de la densidad ρ_0

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$$

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Mismo resultado obtenido en el capítulo anterior (ahora de forma mucho más simple). Ahora, para el campo interno, nuevamente escogemos una superficie Gaussiana de radio $r < R$



Nuevamente el flujo es

$$\Phi = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

donde q_{in} es la carga **encerrada** por la superficie S, en este caso

$$q_{in} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$$

de forma que

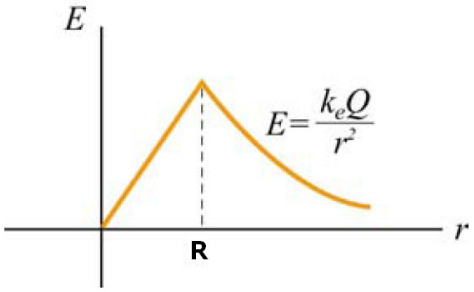
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}$$

es decir, el campo eléctrico en el interior de la distribución es lineal en r. Finalmente

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } \mid \vec{x} \mid \leq R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } \mid \vec{x} \mid > R \end{cases}$$

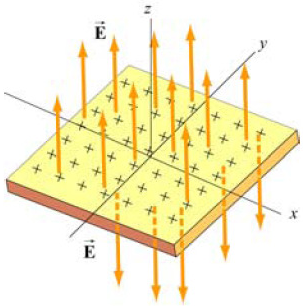
Notar que el campo es continuo en $\mid x \mid = R$



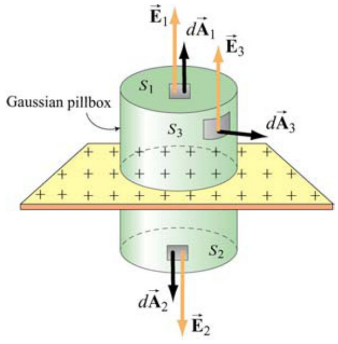
pero no es diferenciable en dicho punto!

Ejemplo: Plano infinito de carga

Consideremos un plano infinito en $X - Y$ con densidad superficial de carga uniforme σ. Se desea determinar el campo eléctrico en todo el espacio



Debido a que la carga está distribuída uniformemente en la superficie, el campo eléctrico $\vec{E}$ debe ser perpendicular al plano , $\vec{E} = E\hat{k}$. Además, la magnitud del campo es constante en planos paralelos al plano de carga. Elegimos como superficie Gaussiana un cilindro (llamado por muchos autores como caja de píldoras)



el flujo sobre esta superficie es

$$\Phi = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \iint d\vec{S}_1 \cdot \vec{E}_1 + \iint d\vec{S}_2 \cdot \vec{E}_2 + \iint d\vec{S}_3 \cdot \vec{E}_3$$

donde se ha dividido la superficie cerrada en la superficies S_1 y S_2 (tapas), y en S_3 (manto). Claramente el flujo sobre este último es cero, pues el campo es perpendicular en todo punto al vector normal a S_3. Con esto

$$\Phi = \oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = \iint d\vec{S}_1 \cdot \vec{E}_1 + \iint d\vec{S}_2 \cdot \vec{E}_2$$

S_1 y S_2 están a la misma distancia del plano infinito, luego, en ambas superficies la magnitud del campo debe ser la misma, digamos, E, luego

$$\Phi = \oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = E\left(\iint dS_1 + \iint dS_2\right) = 2AE$$

donde A es la superficie total de S_1 y S_2. Por la ley de Gauss, el flujo del campo eléctrico es

$$\Phi = 2AE = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

donde la carga encerrada por esta superficie es

$$q_{in} = \sigma A$$

de forma que

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

en notación vectorial

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

notar que el campo tiene una discontinuidad en $z = 0$

$$\lim_{z\to 0^+} \vec{E}(z) - \lim_{z\to 0^-} \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Veremos que el campo eléctrico siempre es discontinuo al atravesar una superficie cargada

Problema

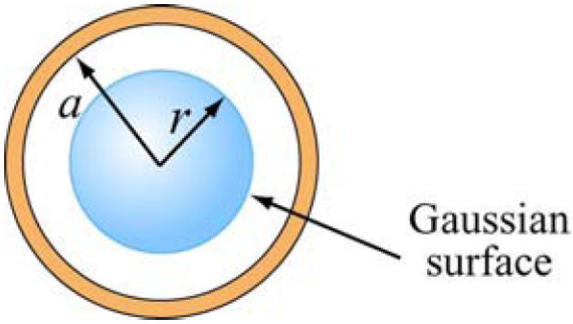
Se tiene una cáscara esférica de radio a y de carga Q distribuída uniformemente sobre su superficie. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Por la simetría esférica de la distribución de carga, y utilizando un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el centro de la distribución, se tiene que el campo eléctrico debe ser de la forma

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Para $r < a$, elegimos una superficie Gaussiana esférica de radio r, como se muestra en la figura



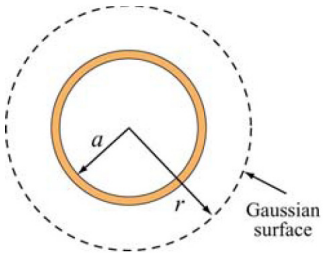
de la ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Es claro que en este caso no hay carga encerrada por la superficie, de forma que

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = 0 \rightarrow E(r) = 0$$

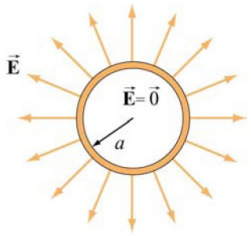
Para $r > a$, nuevamente elegimos una superficie Gaussiana esférica de radio r



$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

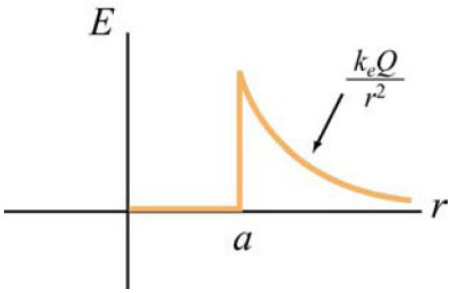
$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

es decir, para $r > a$ el campo es igual al de una carga puntual Q en el origen.



$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \mid \vec{x} \mid < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } \mid \vec{x} \mid > a \end{cases}$$

El campo es discontinuo en $r = a$ (siempre lo es al atravesar una superficie cargada)



Notar que

$$\lim_{r\to a+} E(r) - \lim_{r\to a-} E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

donde σ es la densidad superficial de carga. Notar que se obtuvo lo mismo en la interfaz de un plano cargado (En efecto, es un resultado general)

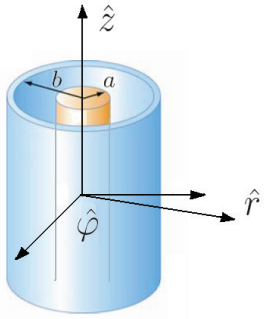
Problema

Considere un cable coaxial muy largo, el cable está compuesto por un cilindro sólido interior, de radio a que lleva una densidad de carga volumétrica ρ (constante) y por un cilindro exterior hueco de radio b $(b > a)$ que lleva una densidad de carga superficial σ, esta densidad es tal que el cable es eléctricamente neutro. Encuentre el campo eléctrico producido por el cable en todo el espacio



Solución

Establecemos un sistema de coordenadas cilíndricas en el centro del cable



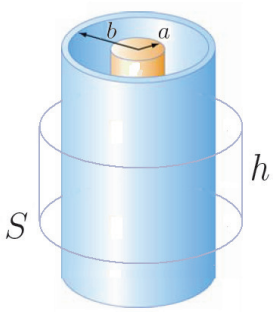
Distinguimos tres regiones,I, II y III dadas por $r > b$, $a < r < b$ y $r < a$ respectivamente. Por simetría, el campo (de existir) en la región I debe ser radial, y su magnitud únicamente función de r (La figura posee una clara simetría azimutal, es decir, es invariante ante una rotación del ángulo polar φ). Por ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

donde S es cualquier superficie cerrada y Q_{int} la carga encerrada por ésta

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Debemos encontrar una superficie con las siguientes características: $\vec{E}(\vec{x}')//\hat{n}(\vec{x}')$ y $\mid \vec{E}(\vec{x}') \mid$ constante $\forall \vec{x}' \in S$. Dada la simetría del problema usamos como superficie un cilindro de radio $r > b$ y altura h S



Luego

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \iint_{Manto} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') + \iint_{Tapas} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}')$$

Para todo $\vec{x}'$ en el manto, $d\vec{S}(\vec{x}') = dS(\vec{x}')\hat{n}(\vec{x}') = rd\varphi dz\hat{r}(\varphi)$, y $\vec{E}(\vec{x}') = E(r)\hat{r}(\varphi)$, de forma que

$$\iint_{Manto} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r) \iint_{Manto} dS(\vec{x}') = 2\pi rhE(r)$$

Por otro lado, para todo $\vec{x}'$ en las tapa superior, $d\vec{S}(\vec{x}') = rd\varphi dr\hat{z}$, y en la tapa inferior $d\vec{S}(\vec{x}') = -rd\varphi dr\hat{z}$, mientras que $\vec{E}(\vec{x}') = E(r)\hat{r}(\varphi) \perp d\vec{S}(\vec{x}')$, luego

$$\iint_{Tapas} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0$$

con esto

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = E(r)2\pi rh$$

pero como el cable es neutro, $Q_{int} = 0$. Luego

$$E(r)2\pi rh = 0 \rightarrow E(r) = 0, r > b$$

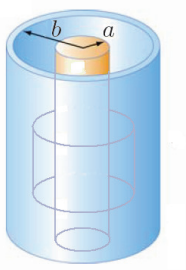
Notar que

$$Q_{int} = \pi a^2 h\rho + \sigma 2\pi bh = 0$$

luego

$$\sigma = -\frac{\rho a^2}{2b}$$

En la región II: $a < r < b$, la simetría nuevamente implica la naturaleza radial del campo eléctrico (al igual que su dependencia en r y no en φ). Nuevamente utilizamos como superficie cerrada un cilindro de radio r y altura h



$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

Por los mismos argumentos utilizados anteriormente, la integral de flujo se reduce a

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = E(r) 2\pi r h$$

y

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \rho \iiint_{V(S)} d^3x' = \rho \pi a^2 h$$

entonces

$$E(r) 2\pi r h = \rho \frac{\pi a^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \hat{r}$$

si $r \in [a, b]$

Por último, para la región III: $r < a$, se escoge nuevamente un cilindro de radio r y altura h. Los mismos argumentos de simetría son válidos aquí para determinar el campo eléctrico. Resulta

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

y

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}) = E(r) 2\pi r h$$

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \rho \iiint_{V(S)} d^3x' = \rho \pi r^2 h$$

entonces

$$E(r) 2\pi r h = \rho \frac{\pi r^2 h}{\epsilon_0}$$

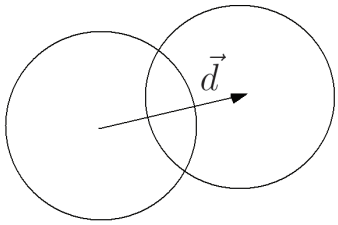
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

En resumen (notar discontinuidad al atravesar la superficie cargada $r = b$)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & \text{si } 0 \leq r < a \\ \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } b < r \end{cases}$$

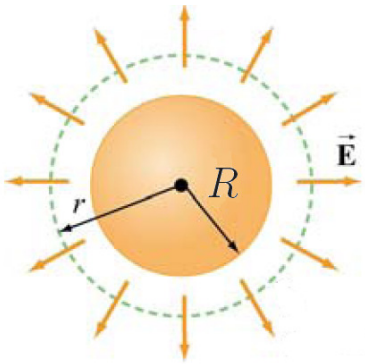
Problema

Considere dos esferas no concéntricas de radio R. La primera de ellas lleva una densidad volumétrica de carga ρ y la segunda $-\rho$. Los centros de las esferas están a distancia menor que $2R$. si $\vec{d}$ es el vector que va del centro de la esfera positiva al centro de la negativa, demuestre que el campo eléctrico en la intersección de las esferas es constante, y encuentre su valor



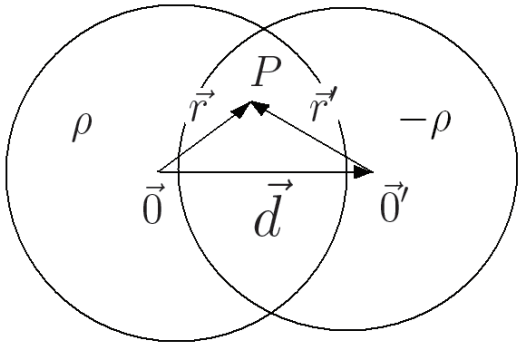
Solución

Este problema se resuelve por superposición y recordando la forma del campo eléctrico generado por una distribución homogénea y esférica de carga (resuelto anteriormente)



$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

donde r es la distancia al centro de la distribución. Ahora, sea P un punto arbitrario dentro de la región de la intersección



El campo en P producido por la distribución de carga positiva es

$$\vec{E_1} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$$

y el de la distribución de carga negativa

$$\vec{E_2} = \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\vec{r'}$$

Por el principio de superposición, el campo eléctrico en P está dado por

$$\vec{E}(P) = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\vec{r'}$$

Pero

$$\vec{d} + \vec{r'} = \vec{r}$$

de forma que

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{d}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\left(\vec{r} - \vec{d}\right)$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{d}$$

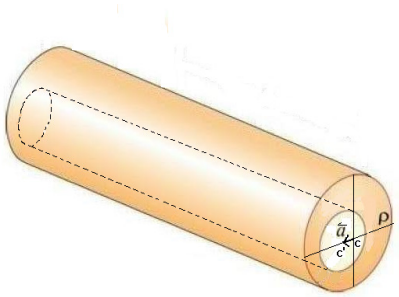
P fue escogido de manera arbitraria, luego, para todo $\vec{x}$ dentro de la distribución, el campo eléctrico es uniforme y está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{d}$$

notar que es paralelo a la dirección que une ambos centros

Problema

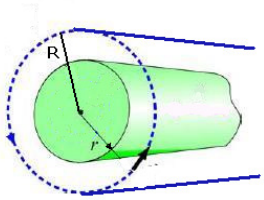
Se tiene un cilindro de radio R muy largo y con densidad de carga homogénea ρ. Se ha suprimido un cilindro con eje paralelo con el mismo largo y radio $R/2$. El vector que une el centro del cilindro con el centro de la cavidad es $\vec{a}$ para una sección transversal. Se pide obtener la expresión del campo eléctrico en un punto cualquiera de la cavidad que no pertenezca a la recta que une los centros del cilindro y de la cavidad



Solución

Este problema se puede resolver de forma muy simple utilizando el principio de superposición. Evidentemente podemos considerar el problema del cilindro lleno con densidad ρ, y superponer un cilindro menor con densidad $-\rho$. Primero, debemos encontrar una expresión para el campo eléctrico al interior de un cilindro muy largo de radio R.

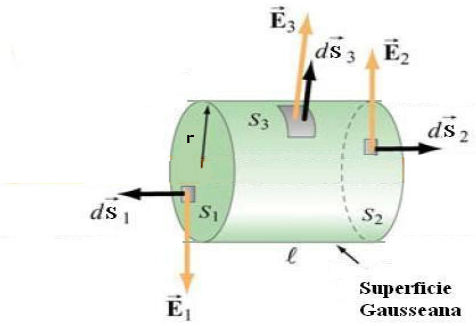
Debido a la simetría, es evidente que el campo eléctrico al interior del cilindro debe ser radial y constante a una cierta distancia r del centro.



Luego, utilizamos como superficie de Gauss un cilindro de radio r y largo L.

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Ahora, notemos que el cilindro lo podemos dividir en 3 superficies



Luego la ley de Gauss queda

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \iint_S d\vec{S}_1 \cdot \vec{E}_1 + \iint_S d\vec{S}_2 \cdot \vec{E}_2 + \iint_S d\vec{S}_3 \cdot \vec{E}_3$$

Notar que en todos los puntos de la superficie S_1 el campo eléctrico es perpendicular al vector normal. Lo mismo sucede con la superficie S_2, luego, las dos primeras integrales de flujo son nulas. Se tiene entonces

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \iint_S d\vec{S}_3 \cdot \vec{E}_3 = \iint_S E_r \hat{r} \cdot dS_3 \hat{r}$$

$$E(r) \iint_S dS_3 = E(r) 2\pi r L$$

Ahora, la carga encerrada por la superficie de Gauss es

$$Q_{in} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

donde $V(S)$ es el volumen encerrado por S. Como ρ es constante,

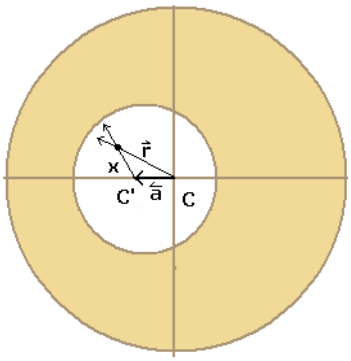
$$Q_{in} = \rho \iiint_V d^3x' = \rho \pi r^2 L$$

Luego la ley de Gauss queda

$$E(r) 2\pi r L = \rho \pi r^2 L$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{2}$$

Ahora, eligiendo un punto P dentro de la cavidad, tendremos que el campo total será la suma vectorial del campo eléctrico debido a un cilindro homogéneo de carga y del campo debido a un cilindro homogéneo de carga negativa, tal como indica la figura



$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r}{2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho x}{2} \hat{r}'$$

donde

$$\hat{r}' = \frac{(\vec{r} - \vec{a})}{x} = \frac{(r\hat{r} - \vec{a})}{x}$$

Sumando ambos campos

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2}\hat{r} - \frac{\rho x}{2}\frac{(r\hat{r} - \vec{a})}{x}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2}\hat{r} - \frac{\rho r\hat{r}}{2} + \frac{\rho\vec{a}}{2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{a}}{2}$$

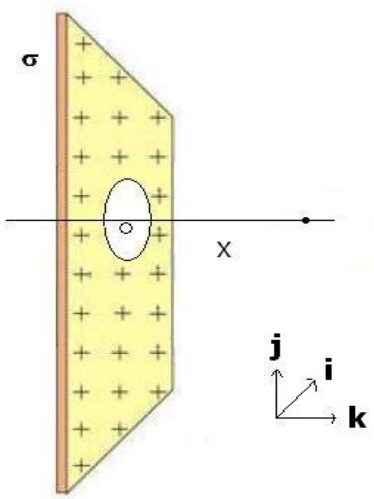
El campo en todo punto de la cavidad es uniforme y paralelo al vector $\vec{a}$

Problema

Considere un plano infinito de carga con densidad superficial $\sigma > 0$. Se practica un orificio circular de radio R.

a) Calcule el campo eléctrico en cualquier punto de abscisa x perteneciente al eje del orificio

b) A lo largo del eje del orificio se coloca una línea de carga de largo a, densidad lineal $\lambda > 0$ y cuyo punto más próximo se encuentra a distancia μ del centro del orificio. Calcule la fuerza de repulsión que experimenta la línea de carga.

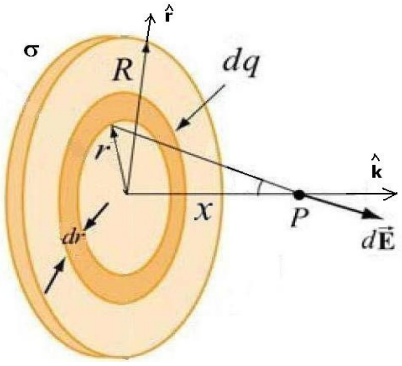


Solución

Una forma natural de solucionar este problema es utilizando el principio de superposición. Esto es, considerar al plano con un orificio como la suma de un plano completo con un disco de densidad superficial $-\sigma$. Ya se vió que el campo debido a un plano infinito de carga es homogéneo y está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{k}$$

Ahora, para calcular el campo en el eje de un disco, de radio R y densidad σ



Un elemento de superficie del disco está dado por $dA = rdrd\phi$, que tiene asociado un elemento diferencial de carga, dado por $dq = \sigma dA = \sigma r dr d\phi$.

Así, el campo eléctrico en P debido a este elemento de superficie será

$$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(\vec{x}-\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3}$$

donde $\vec{x} = x\hat{k}$, $\vec{x}' = r(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$ así

$$\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid = (r^2 + x^2)^{1/2}$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = x\hat{k} - r(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})$$

Con esto la contribución al campo total en P debido al elemento de superficie es

$$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma r dr d\phi(x\hat{k} - r\hat{r})}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Así, el campo eléctrico total en P debido al disco completo será

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr \frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}}\hat{k} - \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})\int_0^R dr\frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

La segunda integral es 0, y esto se puede mostrar calculándola directamente o usando el argumento de simetría, ya que es evidente que el campo eléctrico resultante en el eje solo tendrá componente en $\hat{k}$. Sea $u = r^2 + x^2$, así, $du = 2rdr$, con esto

$$\vec{E}_2 = 2\pi\frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0}\int_{x^2}^{R^2+x^2}\frac{du}{2u^{3/2}}\hat{k}$$

Donde el factor 2π sale de integrar $d\phi$ entre 0 y 2π. Finalmente

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} - 2u^{-1/2}\Big|_{x^2}^{x^2+R^2}\hat{k} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{1}{x}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-\sigma x + \sigma\sqrt{R^2 + x^2}}{2\epsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)\hat{k}$$

Notar que si $R \to \infty$ se recupera el campo de un plano infinito

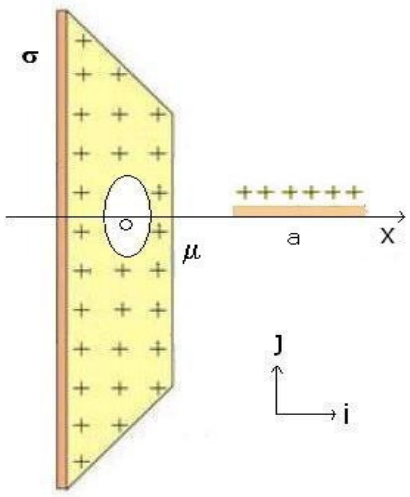
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}\hat{k}$$

Finalmente el campo eléctrico total en P, será la suma de $\vec{E}_1$ y -$\vec{E}_2$, ya que el disco tiene densidad de carga $-\sigma$

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1\right)\hat{k}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\hat{k}$$

b)



Para calcular la fuerza sobre el alambre de carga, bastará con tomar un elemento diferencial de longitud dx y obtener la fuerza electrostática que actúa sobre éste

$$d\vec{F} = dq\vec{E}(x) = \lambda dx\vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+x^2}}dx\hat{k}$$

Con lo que la fuerza total sobre la línea de carga será

$$F = \int_{\mu}^{\mu+a} dx\left(\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{k}$$

Sea $z = R^2 + x^2$, con lo que $dz = 2xdx$. Finalmente

$$\vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{4\epsilon_0}\int_{R^2+\mu}^{R^2+(\mu+a)^2}\frac{dz}{\sqrt{z}}\hat{i} = \frac{\sigma\lambda}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(\mu+a)^2}-\sqrt{R^2+\mu^2}\right)\hat{k}$$

Problema

Considere la siguiente distribución volumétrica de carga en coordenadas esféricas

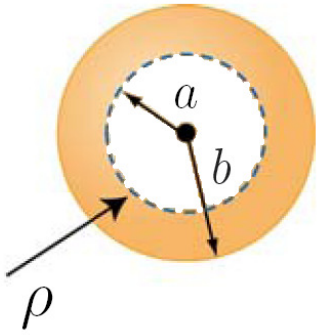
$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}, a \leq r \leq b$$

Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Se tiene la distribución de carga dada por

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}, a \leq r \leq b$$



Consideremos las distribuciones auxiliares

$$\rho_1(r) = \frac{k}{r^2}, 0 \leq r \leq b$$

$$\rho_2(r) = -\frac{k}{r^2}, 0 \leq r \leq a$$

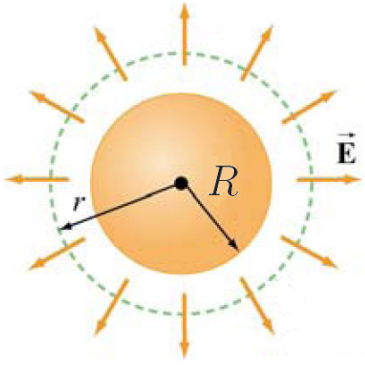
Es fácil ver que

$$\rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r)$$

Luego, podemos calcular por separado ambos campos eléctricos para luego superponerlos. Consideremos entonces, el problema

$$\rho' = \frac{k'}{r^2}, 0 \leq r \leq R$$

Sea la región del espacio en que $r > R$. Dada la simetría esférica de la distribución, escogemos como superficie Gaussiana S una esfera concéntrica al origen y de radio $r > R$



El flujo a través de S será

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2$$

La carga encerrada por esta superficie es

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{R} dr r^2 \frac{k'}{r^2} = 4\pi R k'$$

Por ley de Gauss

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi R k'}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Rk'}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}, r > R$$

Ahora, para $r < R$, nuevamente se utiliza una superficie esférica de radio r y se resuelve en forma análoga a la anterior, lo único que varía es la carga encerrada

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2$$

esta vez la carga encerrada es la carga contenida en todo el volumen de la superficie de Gauss

$$Q = \iiint_{S(V)} d^3x' \rho(\vec{x}') = 4\pi r k'$$

entonces

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi r k'}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{k'}{\epsilon_0 r}\hat{r}$$

Ahora, superponemos los campos generados por ρ_1 y ρ_2. Si $r > b > a$

$$\vec{E} = \frac{bk}{\epsilon_0 r^2}\hat{r} + \frac{(-k)a}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Si $a < r < b$

$$\vec{E}(r) = \frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{r} + \frac{(-k)a}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{k}{\epsilon_0 r} - \frac{ak}{\epsilon_0 r^2}\right)\hat{r}$$

Por último, para

$$r < a$$

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{k}{\epsilon_0 r} - \frac{k}{\epsilon_0 r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = 0$$

En resumen

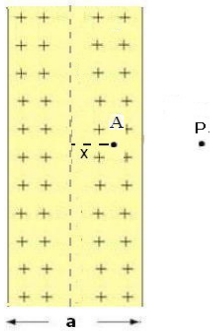
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \left(\frac{k}{\epsilon_0 r} - \frac{ak}{\epsilon_0 r^2}\right)\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si} r > b > a \end{cases}$$

Notar que este problema se podría haber resolvido fácilmente utilizando directamente la ley de Gauss. Sin embargo, utilizar el principio de superposición facilita mucho el cálculo en algunos otros casos

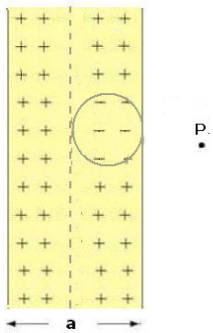
Problema

Dos planos infinitos y paralelos, a distancia a uno del otro, delimitan una región del espacio que contiene una distribución continua y uniforme de carga eléctrica cuya densidad volumétrica es ρ constante.

a) Calcular el campo eléctrico en el punto A a distancia x del plano central y el campo en un punto exterior P a distancia r del plano central



b) Ahora en la distribución de carga anterior se reemplaza una esfera como en la figura por una distribución con carga de densidad uniforme $-\rho$. Calcular el campo en el centro de la esfera , y en un punto P exterior a distancia x del plano central



Solución

Para encontrar el campo eléctrico al interior de la distribución, podemos utilizar la Ley de Gauss. Notar que como la región esta limitada por planos infinitos, por un argumento de simetría el campo $\vec{E}$ solo tendrá componente en la dirección $\hat{i}$.

Notar además, que para $x > 0$, el campo tendrá dirección $\hat{x}$, mientras que si $x < 0$, el campo tendrá dirección $-\hat{x}$. Utilizando un cilindro como superficie de Gauss, de radio x , se tiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

En este caso sólo habrá flujo a través de las tapas del cilindro, puesto que el campo es horizontal y perpendicular a la normal del cilindro sobre el manto. Luego

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(x)2S$$

donde S es el área de cada tapa. Ahora, la carga encerrada por este cilindro será simplemente

$$q_{in} = \rho V = \rho 2xS$$

Con esto

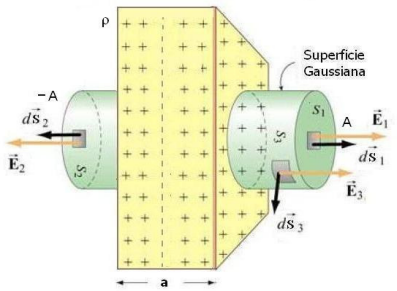
$$2SE(x) = \frac{\rho 2xS}{\epsilon_0}$$

$$E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

Finalmente, para $\mid x \mid < a/2$

$$\vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}\hat{i}$$

Ahora, para obtener el campo en un punto exterior a distancia $r > a/2$ del plano central, volvemos a utilizar la ley de Gauss, como se aprecia en la figura



Nuevamente sólo habrá flujo por S_1 y S_2, luego

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot d\vec{E}(\vec{x}') = E(r)\left(\iint_{S_1} dS_1 + \iint_{S_2} dS_2\right)$$

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} = E(r)2S$$

la carga encerrada por el cilindro será

$$q_{in} = \rho a S$$

Luego

$$E(r)2S = \frac{\rho a S}{\epsilon_0}$$

de donde se obtiene, para $\mid r \mid > a/2$

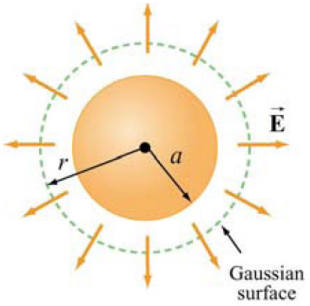
$$\vec{E} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}\hat{i}$$

Notar que no depende de la distancia al plano central.

b) Por el principio de superposición, este problema equivale a considerar la distribución de carga de la parte a) más una esfera de densidad volumétrica de carga -2ρ.
El campo en el centro de la esfera, debido a la esfera misma es nulo, por simetría. Así, el campo total en el centro será, simplemente $\vec{E}(a/4)$ donde $\vec{E}$ es el campo interior creado por la distribución entre planos calculado anteriormente.

$$\vec{E}_{centro} = \frac{\rho a}{4\epsilon_0}\hat{i}$$

Ahora, para obtener el campo en el punto P, calculemos primero el campo debido a la esfera de carga usando la Ley de Gauss,



$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \oiint_S dS\hat{r} \cdot E(r)\hat{r} = E(r) \oiint_S dS$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2$$

y la carga encerrada por la superficie de Gauss es

$$q_{in} = -2\rho\frac{4\pi(a/4)^3}{3} = -\rho\frac{\pi a^3}{24}$$

Con esto

$$E(r) = -\frac{\rho a^3}{96r^2\epsilon_0}$$

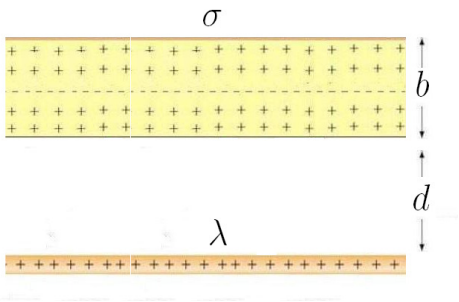
Esto corresponde al campo debido a la esfera, donde r es la distancia entre el punto P y el centro de la esfera. En este caso, el centro de la esfera se encuentra en $x = a/4$, con lo que el campo total en P sera

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}\hat{i} - \frac{\rho a^3}{96\epsilon_0(x - a/4)^2}\hat{i}$$

con $\mid x \mid > a/2$

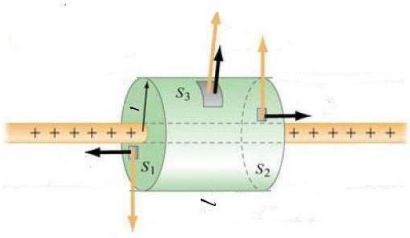
Problema

Calcule la fuerza por unidad de largo que se ejercen una huincha muy larga de ancho b y densidad de carga σ y un alambre igualmente largo con densidad lineal de carga λ, puesto en el mismo plano que la huincha a distancia d del borde inferior, como muestra la figura



Solución

Podemos optar por calcular la fuerza que ejerce la distribución lineal de carga sobre la distribución plana, o viceversa. Utilizaremos la primera opción, y para ello necesitamos obtener el campo eléctrico generado por la distribución lineal. Esto ya ha sido resuelto anteriormente con ley de Gauss, considerando la simetría cilíndrica del campo eléctrico en presencia de una distribución linal infinita de carga



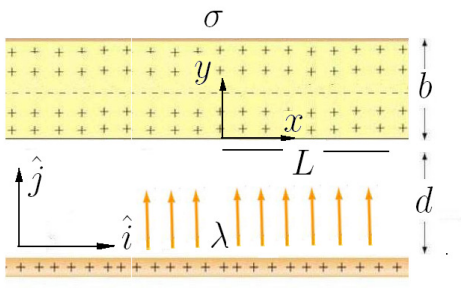
Si la superficie Gaussiana es un cilindro de radio r y largo h, y utilizando coordenadas cilíndricas

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi r \int_0^h dz \hat{r}(\varphi) \cdot \vec{E}(r)\hat{r}(\varphi) = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

y entonces

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

De esta forma, en el plano que contiene a ambas distribuciones, y definiendo las direcciones $\hat{i}$, $\hat{j}$ (como se indica en la figura)



el campo eléctrico generado por la distribución lineal tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{j}$$

donde r es la distancia vertical entre $\vec{x}$ y el alambre. Fijando el origen de coordenadas según lo indicado en la figura, calculemos la fuerza que se ejerce sobre una porción de largo L de la distribución plana de carga con densidad σ. Un elemento de área de coordenadas (x, y) posee una carga dada por

$$dq(x, y) = \sigma dxdy$$

y el campo eléctrico en dicho punto debido a la distribución lineal es

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d + y)}\hat{j}$$

Luego, la fuerza que se ejerce sobre este elemento de área es

$$d\vec{F}(x, y) = dxdy\sigma\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d + y)}\hat{j}$$

consideremos la distribución dada por $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq b$. La fuerza neta sobre esta porción es

$$\vec{F} = \int_0^L dx \int_0^b \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0(d + y)}\hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0}\int_0^b \frac{1}{d + y}\hat{j} = \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0}\ln(d + y)\Big|_0^b\hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{d + b}{d}\right)\hat{j}$$

y la fuerza por unidad de largo es

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{d + b}{d}\right)\hat{j}$$

Capítulo 5

El potencial Electrostático

Vimos anteriormente que el campo Electrostático generado por una distribución de carga se escribe en su forma más general como una integral de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x'\rho(\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Hemos establecido además una relación interesante entre el flujo del campo sobre una superficie cerrada y la carga encerrada por ésta (Ley de Gauss). Esta relación es consistente con la ley de Coulomb y establece que el flujo del campo eléctrico sobre cualquier superficie cerrada S es

$$\oiint_S d\vec{S}' \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V(S)} d^3x'\rho(\vec{x}')$$

Ahora, veremos una segunda ley muy importante en electrostática, y para enunciarla demostraremos el siguiente lema

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Demostración
Esta es trivial considerando que

$$\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid = \left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}$$

y

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\hat{k}$$

veamos que ocurre con la componente según $\hat{i}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\hat{i} = -\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^2}\frac{\partial}{\partial x}\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid \hat{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\hat{i} = -\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^2}\frac{1}{2}\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{-1/2}2(x-x')\hat{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\hat{i} = -\frac{x-x'}{\mid x-x' \mid^3}\hat{i}$$

El cálculo es análogo para las demás componentes, y se demuestra que

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

¿Qué tendrá que ver esto con electrostática? No es difícil reconocer el parecido del campo vectorial

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

con el campo electrostático, puesto que en su forma más general puede ser escrito como

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x'\rho(\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Utilizando el lema recién demostrado, esto se reescribe como

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x'\rho(\vec{x}')\vec{\nabla}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x'\rho(\vec{x}')\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

Se obtiene que el campo eléctrico es menos el gradiente de un campo escalar. Se define el **potencial electrostático** de una distribución de cargas como

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x'\frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

y el campo eléctrico cumple

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

Notar que es inmediato que el potencial de una carga puntual ubicada en $\vec{x}'$ estará dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

Potencial de una distribución discreta

Supongamos que se tiene una distribución discreta de cargas q_j, $j = 1, 2, ...N$ ubicadas en las posiciones $\vec{x}_j$, $j = 1, 2, ...N$. El potencial de ésta distribución se puede obtener fácilmente a partir del potencial de una sola carga utilizando el principio de superposición

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_j}{\mid \vec{x}-\vec{x}_i \mid}$$

por supuesto, esto es consistente con la densidad de carga en términos de la delta de Dirac

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$$

en efecto, de la definición para el potencial

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}\sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\vec{x}' - \vec{x}_i)$$

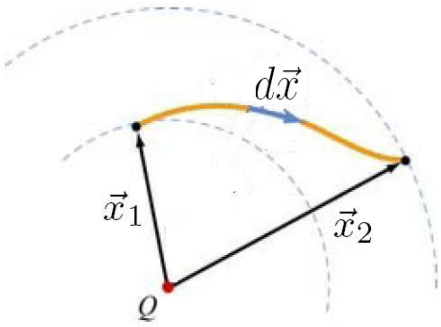
$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\delta(\vec{x}' - \vec{x}_i)}{\mid \vec{x} - \vec{x}_i \mid} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\mid \vec{x} - \vec{x}_i \mid}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} \frac{q_j}{\mid \vec{x} - \vec{x}_i \mid}$$

5.1. Interpretación Física del Potencial

Supongamos que se tiene una distribución de carga en el espacio, ésta generará un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$. Consideremos el trabajo efectuado **contra** las fuerzas del campo al trasladar cuasiestáticamente una carga puntual q desde un punto $\vec{x}_1$ hasta el punto $\vec{x}_2$, siguiendo una trayectoria cualquiera Γ. Por cuasiestáticamente, se entiende que no se altera la energía cinética al mover a la carga. Esto se puede lograr exclusivamente si la **fuerza neta** sobre la carga es cero (recordar Teorema del Trabajo). De esta forma, debemos ejercer una fuerza de igual magnitud y contraria a la fuerza electrostática que actúa sobre la carga. Esto es

$$W = -\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot q\vec{E}(\vec{x})$$



Podría ser que este trabajo dependiera de la trayectoria utilizada para ir desde $\vec{x}_1$ hasta $\vec{x}_2$. Sin embargo, como

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

$$W = -\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot q\vec{E}(\vec{x}) = q\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

Utilizando la parametrización de la curva Γ: $\vec{x} = \vec{x}(l')$, donde $l \in [0, l]$

$$W = q\int_0^l dl' \frac{d\vec{x}}{dl'} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{x}(l'))$$

$$W = q\int_0^l dl' \frac{d\phi(\vec{x}(l'))}{dl'} = q\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = q\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

Finalmente hemos obtenido

$$W = -q\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = q\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

Independiente de la curva Γ!

Si tomamos una carga unitaria, $q = 1$, la interpretación de éste resultado es como sigue: *El trabajo necesario para mover una carga unitaria cuasiestáticamente desde el punto x_1 hasta el punto x_2 contra el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre x_2 y x_1*

Ahora, notemos que

$$\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = -\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

Por lo tanto, sobre una trayectoria cerrada

$$\oint d\vec{x}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = 0$$

el campo eléctrico es **conservativo**. Obsérvese que este resultado físico es consecuencia de Coulomb y la geometría Euclídea

Notar que $U(\vec{x}) = q\phi(\vec{x})$ es la **Energía Potencial** de una carga q en la posicion $\vec{x}$. En efecto, la fuerza asociada a esta interacción es

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$$

Otro enfoque para la electrostática

La introducción del campo escalar ϕ presenta muchas ventajas para resolver matemáticamente el problema de la electrostática. Como vimos, si **conocemos** la distribución de carga, es decir, conocemos explícitamente $\rho(\vec{x})$, podemos calcular el campo resolviendo las integrales de Coulomb. Sin embargo, como ya se dijo anteriormente, éstas integrales pueden ser complicadas, un método alternativo sería resolver las integrales de Coulomb para el potencial

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3}\frac{d^3x'\rho(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

Notar que calcular esta integral es notoriamente más simple que calcular la integral para el campo eléctrico. En primer lugar, no aparece ninguna cantidad vectorial. En segundo lugar, el potencial sólo depende del inverso de la distancia a la fuente, en cambio el campo eléctrico depende del cuadrado de la distancia. Notemos que una vez obtenido el potencial en todo el espacio, determinar el campo eléctrico es muy sencillo, sólo basta con evaluar $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, y todos sabemos que derivar es mucho más sencillo que integrar.

Ahora, aún no hemos dicho nada sobre qué hacer cuándo la distribución de carga no es conocida, eso lo veremos más adelante, pero justamente el potencial electrostático es una herramienta muy poderosa a la hora de resolver ese tipo de problemas más complejos.

5.2. Energía Potencial de una distribución de carga discreta

El trabajo necesario para traer una carga q cuasiestáticamente desde el infinito hasta un punto $\vec{x}$ es, simplemente

$$W = q\phi(\vec{x})$$

suponiendo que el potencial en el infinito es cero (Esto se cumple si, por ejemplo, toda la carga está localizada dentro de un volumen finito). Luego, esta carga ha adquirido una energía potencial igual a $U(\vec{x}) = q\phi(\vec{x})$. De la misma forma, una distribución de carga tiene una energía potencial asociada, ya que un trabajo se debe realizar para mantener la distribución en su lugar.

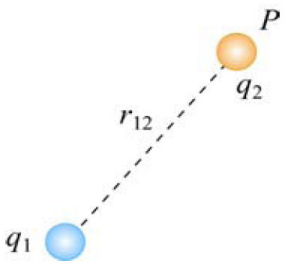
Calculemos la energía potencial de un sistema electrostático de cargas puntuales. Para ello inicialmente traemos una carga q_1 hasta un punto cualquiera $\vec{x}_1$. El trabajo necesario para esto es nulo, ya que inicialmente no existe un campo eléctrico alguno que ejerza una fuerza sobre q_1. Con esto

$$W_1 = 0$$

y el sistema en este estado posee una energía potencial igual a

$$U = W_1 = 0$$

Ahora, para traer una carga q_2 hasta un punto $\vec{x}_2$, como se aprecia en la figura



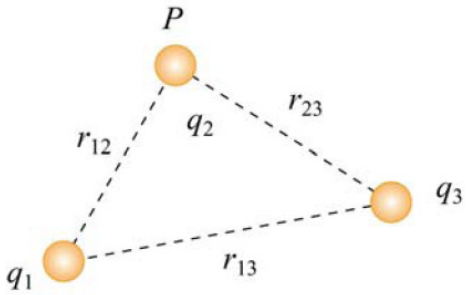
se requiere hacer un trabajo igual a

$$W_2 = \phi(x_2)q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\mid \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \mid}q_2$$

Con esta configuración, el sistema tiene asociada una energía potencial dada por

$$U = W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\mid \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \mid}q_2$$

Ahora, para traer una tercera carga q_3, como se ve en la figura



el trabajo necesario será

$$W_3 = q_3\phi(\vec{x}_3) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{\mid \vec{x}_1 - \vec{x}_3 \mid} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{\mid \vec{x}_2 - \vec{x}_3 \mid}\right) q_3$$

En síntesis, el trabajo necesario para formar esta configuración de 3 cargas a distancias r_{12}, r_{13}, r_{23} es

$$U = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}}q_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}q_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}q_2$$

Y es igual a la energía potencial total de esta configuración, que se puede reescribir como

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_2q_1}{r_{21}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_3q_1}{r_{31}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_3q_2}{r_{32}})$$

$$U = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{21}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r_{31}}\right)q_1 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r_{32}}\right)q_2 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right)q_3\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\left(\phi(\vec{x}_1)q_1 + \phi(\vec{x}_2)q_2 + \phi(\vec{x}_3)q_3\right)$$

Donde $\phi(\vec{x}_i)$ no es más que el potencial en la posición de la carga i debido a las demás cargas. En general, para un sistema de N cargas, se tiene que la energía potencial asociada al sistema es

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\phi(\vec{x}_i)$$

Esto se puede extender al caso continuo, donde la energía potencial de una distribución continua de carga es, equivalentemente

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \phi(\vec{x}')dq(\vec{x}') = \frac{1}{2}\iiint_V d^3x'\rho(\vec{x}')\phi(\vec{x}')$$

5.3. El dipolo Eléctrico

Definiremos una cantidad absolutamente general asociada con una distribución de cargas $\rho(\vec{x})$, llamada **Momento Dipolar**

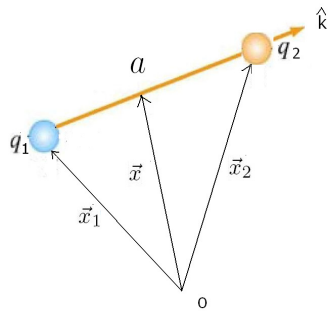
$$\vec{p} = \iiint_V d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}')$$

donde V es un volumen que contiene todas las cargas. Notar en primer lugar que $\vec{p}$ es un vector constante que dependerá de la forma en que están distribuídas las cargas. De cierta forma, es una suma de las posiciones ponderadas por sus respectivas cargas. El momento dipolar de una distribución discreta de N cargas es, por supuesto

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i q_i$$

Dipolo Eléctrico

Estudiemos ahora un cierto tipo muy particular de distribución de carga. Primeramente, imaginemos 2 cargas cualquiera q_1, q_2 separadas una distancia a, como muestra la figura



El momento dipolar está dado por

$$\vec{p} = q_1\vec{x}_1 + q_2\vec{x}_2$$

Definamos además, el vector $\vec{x}$ como el vector posición del punto medio entre q_1 y q_2, y la dirección $\hat{k}$ que apunta desde q_1 hacia q_2. De esta forma, es claro que

$$\vec{x}_1 = \vec{x} - \frac{a}{2}\hat{k}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x} + \frac{a}{2}\hat{k}$$

luego

$$\vec{p} = q_1(\vec{x} - \frac{a}{2}\hat{k}) + q_2(\vec{x} + \frac{a}{2}\hat{k})$$

$$\vec{p} = (q_1 + q_2)\,\vec{x} + \frac{a(q_2 - q_1)}{2}\hat{k}$$

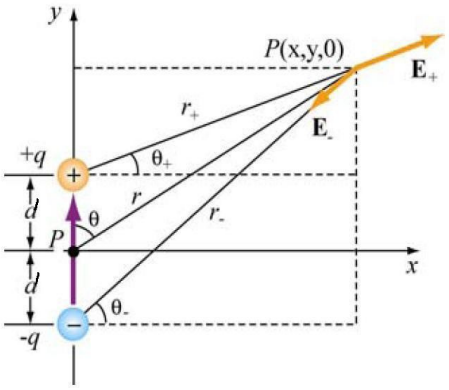
Ahora, consideremos que ambas cargas son iguales en magnitud, pero de signo opuesto. Digamos $q_2 = q$, $q_1 = -q$. Esto es lo que se conoce como **dipolo eléctrico** y entonces

$$\vec{p} = qa\hat{k}$$

En resumen, para un dipolo eléctrico, el momento dipolar es un vector de magnitud qa y su dirección va siempre desde la carga negativa hacia la carga positiva. Esta configuración es muy importante en electrostática.

5.4. Campo de un Dipolo

Calculemos el potencial eléctrico en un punto P debido a un dipolo. Para ello consideremos un dipolo en el eje vertical, como se muestra en la figura.



Por el principio de superposición, el potencial en el punto P está dado por

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$

Donde, por el teorema del coseno

$$r_+^2 = r^2 + d^2 - 2dr\cos\vartheta$$

$$r_-^2 = r^2 + d^2 + 2dr\cos\vartheta$$

$$r_+ = r\sqrt{1 + (d/r)^2 - 2(d/r)\cos\vartheta}$$

Para el límite en que $d << r$, se puede desarrollar en series de Taylor

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r}\left(1 + (d/r)^2 - 2(d/r)\cos\vartheta\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}(d/r)^2 + (d/r)\cos\vartheta + ...\right)$$

Conservaremos los términos hasta segundo orden en d/r, como en la expansión $(1+x)^n \approx 1 + nx + n(n-1)/2x^2$, cuando $x \ll 1$

$$\frac{1}{r_+} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}(d/r)^2 + (d/r)\cos\vartheta\right)$$

De forma análoga

$$\frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}(d/r)^2 - (d/r)\cos\vartheta\right)$$

Con esto, el potencial en P puede aproximarse por

$$\phi(P) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{2d\cos\vartheta}{r}$$

Si $a = 2d$ es la separación entre las cargas del dipolo

$$\phi(P) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{a\cos\vartheta}{r} = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Donde $\vec{p} = aq\hat{j}$ es justamente el momento dipolar eléctrico. Notar entonces que el potencial eléctrico debido a un **dipolo microscópico** ($a << r$) queda absolutamente determinado por su momento dipolar $\vec{p}$ y disminuye según el cuadrado de la distancia (es un potencial más débil que el de una carga puntual). Escribiendolo en su forma más general posible

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{4\pi\epsilon_0 \mid \vec{x} \mid^3}$$

Notar que existe una clara simetría azimutal, pues el potencial no depende del ángulo polar φ

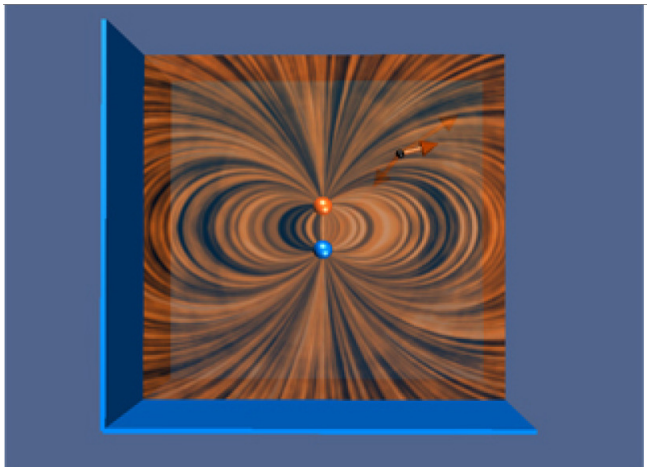


Fig. 5.1: Un dipolo eléctrico y sus líneas de campo eléctrico

Podemos obtener el campo eléctrico como el antigradiente del potencial

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

El campo eléctrico sólo tendrá componentes en las direcciones $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$.

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{p\cos\vartheta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Así

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\vartheta\hat{r} + \sin\vartheta\hat{\vartheta})$$

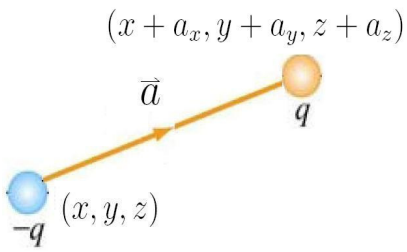
El campo eléctrico debido a un dipolo microscópico disminuye según el inverso del **cubo** de la distancia. Notar que un dipolo microscópico corresponde a un dipolo visto desde muy lejos. Lo interesante es que si bien es eléctricamente neutro, produce un campo eléctrico, y también interactúa con campos eléctricos externos. La explicación de ésto es que, si bien un

dipolo es neutro en su totalidad, posee una deformación eléctrica (cargas positivas y negativas concentradas en distintos puntos del espacio).

El dipolo es importante en el estudio de la electrostática. Recordemos que hasta ahora las leyes que hemos establecido son válidas en el vacío (en la ausencia de un medio material). ¿Cómo se verán afectados los campos en un medio material?. El punto clave está en que la materia está compuesta de moléculas, que si bien son eléctricamente neutras, poseen una deformación eléctrica, y por lo tanto, un momento dipolar. Es por ésto que la materia se puede modelar como una suma de muchos dipolos microscópicos, que generan campos eléctricos e interactúan ante la presencia de un campo externo.

5.5. Energía potencial de un dipolo

Supongamos un dipolo sumergido en un campo electrostático



La energía potencial asociada al dipolo será

$$U = -q\phi(\vec{x}) + q\phi(\vec{x}+\vec{a})$$

Podemos desarrollar $\phi(\vec{x}+\vec{a})$ en serie de Taylor (hasta primer orden)

$$\phi(\vec{x}+\vec{a}) = \phi(x,y,z) + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}a_x + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}a_y + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}a_z$$

$$\phi(\vec{x}+\vec{a}) = \phi(\vec{x}) + \vec{\nabla}\phi(\vec{x})\cdot\vec{a}$$

de forma que

$$U = q\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

$$U = \vec{p}\cdot\nabla\phi(\vec{x})$$

o, equivalentemente

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{x})$$

5.6. Fuerza sobre un dipolo situado en un campo externo

El hecho de que el campo electrostático (y por lo tanto, la fuerza electrostática) sea conservativo, nos permite obtener la fuerza que siente un dipolo inmerso en un campo eléctrico externo $\vec{E}$, como el antigradiente de la energía potencial, esto es

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \left(\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \right)$$

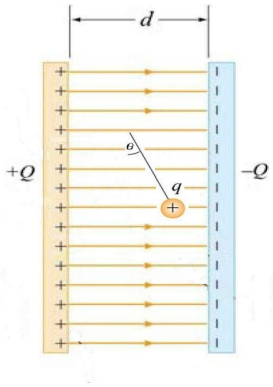
$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{x})$$

Problema

Un pequeño objeto de masa m tiene una carga q y está suspendido por un hilo entre dos planos infinitos verticales de densidad σ y $-\sigma$. La separación entre planos es d. Si el hilo forma un ángulo ϑ con la vertical.

a) ¿Cuánto vale σ?

b) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre los planos?



Solución

a) Como se tienen 2 planos inifnitos de carga, con densidad σ y $-\sigma$ respectivamente, se tendrá que el campo eléctrico es nulo fuera de la región entre planos y será uniforme como indica la figura para la región limitada por ambos. Esto es fácil de ver utilizando el principio de superposición. Si elegimos un eje horizontal, digamos, $\hat{x}$,y el origen sobre el plano de la izqueirda, tendremos que el campo debido al plano cargado positivamente es

$$\vec{E}_1(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

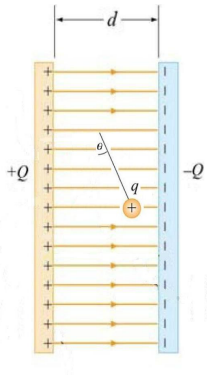
Ahora, para el plano cargado negativamente

$$\vec{E}_2(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i} & \text{si } x > d \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i} & \text{si } x < d \end{cases}$$

El campo eléctrico total se obtiene de la suma de ambos campos, luego, es fácil ver que

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{i}$$

para la región entre planos, y es nulo fuera de ella.



Ahora, la esfera está en equilibrio, por lo que

$$F_x = -T\sin\vartheta + F_e = 0$$

En que F_e es la fuerza eléctrostática que actúa sobre la esfera.

$$F_y = T\cos\vartheta - mg = 0$$

El balance de fuerzas en el eje vertical entrega $T = mg/\cos\vartheta$. Así

$$-mgtg\vartheta + qE = 0$$

De esta forma

$$\vec{E} = \frac{mgtg\vartheta}{q}\hat{i}$$

Igualando, se obtiene que

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{mgtg\vartheta}{q}$$

de donde la densidad superficial de carga está dada por

$$\sigma = \frac{mg\epsilon_0 tg\vartheta}{q}$$

b) La diferencia de potencial entre los planos se puede obtener integrando el campo eléctrico sobre una trayectoria cualquiera entre la placa izquierda y la placa derecha. Por supuesto, elegimos una trayectoria horizontal, de manera que el campo es paralelo en todo instante a la curva

$$\phi(0) - \phi(d) = -\int_d^0 d\vec{x}\cdot\vec{E} = \int_0^d \frac{mgtg\vartheta}{q}dx = \frac{mgtg\vartheta d}{q}$$

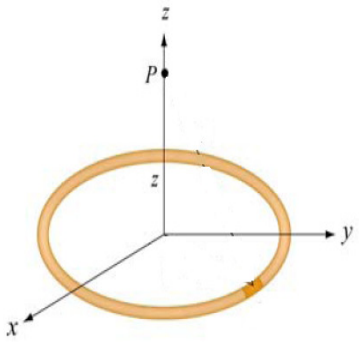
Ensayemos la interpretación física del potencial. Sabemos que si tomamos una carga unitaria y la ponemos en algun punto sobre el plano izquierdo, ésta sentirá una fuerza hacia la derecha, luego, si la soltamos, esta acelerará hasta pegarse al plano derecho. ¿Qué trabajo habrá que hacer para impedir que la carga acelere, y entonces, viaje desde 0 hasta d con velocidad constante? Justamente será

$$\phi_d - \phi_0 = -\frac{mgtg\vartheta d}{q}$$

. El signo negativo se debe a que deberíamos ejercer una fuerza contraria al movimiento de desplazamiento.

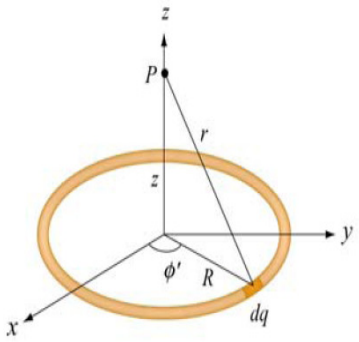
Problema

Considere un anillo de radio R uniformemente cargado con densidad λ. ¿Cuál es el potencial electostático a una distancia z sobre el eje del anillo?. En seguida, calcule el potencial en el eje de un anillo de radio interior a y radio exterior b y densidad σ.



Solución

Tomemos un elemento infinitesimal de longitud en el anillo $dl = Rd\phi'$, como se aprecia en la figura



Este elemento posee una carga

$$dq = d\phi' R\lambda$$

Su contribución al potencial en P es

$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\phi' R\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Luego, el potencial debido al anillo completo está dado por

$$\phi(P) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi R\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

notar que $Q = 2\pi R\lambda$ es la carga total del anillo, luego

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Es fácil ver que si $z >> R$, se tiene el potencial de una carga puntual

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\mid z \mid}$$

Ahora, el campo eléctrico en el punto P se puede obtener a partir del potencial como

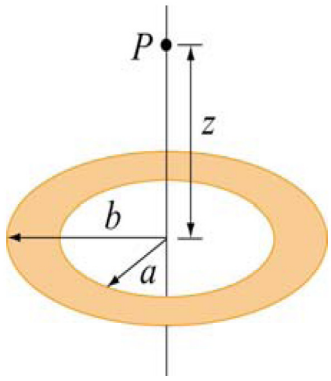
$$\vec{E}(P) = -\vec{\nabla}\phi(P)$$

Sin embargo, para evaluar $\vec{\nabla}\phi$ es necesario conocer $\phi(x, y, z)$. Aún así, veamos que sucede con

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2z\pi R\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k} = \vec{E}(P)$$

y se recupera el resultado obtenido anteriormente para el campo en el eje. ¿Qué nos dice esto acerca de las derivadas parciales con respecto a x e y del potencial en un punto de la forma $(0, 0, z)$?
Ahora, para obtener el potencial de un disco de radios a y b, simplemente se considera la superposición de anillos inifintesimales



Tomamos un anillo de radio r y ancho infinitesimal dr, sabemos que el potencial en el eje está dado por

$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

donde $dQ = \sigma 2\pi r dr$ es la carga que contiene ese anillo
Luego

$$d\phi(P) = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{drr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Y el potencial es

$$\phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{drr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Sea $u = r^2 + z^2$, con esto $du = 2rdr$, y por lo tanto

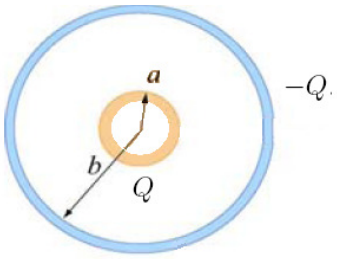
$$\int \frac{drr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = u^{1/2} = \sqrt{r^2+z^2}$$

Finalmente

$$\phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)$$

Problema

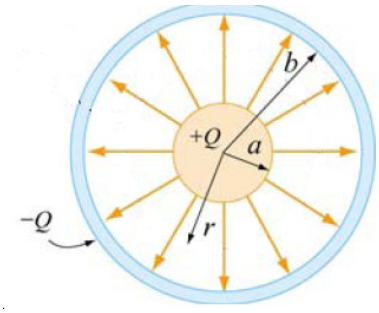
Considere dos cascarones esféricos de radios a y b $(a < b)$, el cascarón interior tiene densidad superficial de carga constante Q y el exterior $-Q$. Encuentre la diferencia de potencial entre el cascarón b y el a



Solución

El campo eléctrico en todo el espacio (de existir) es esféricamente simétrico. Lo mismo sucede con el potencial, que será constante en una superficie esférica. Lo que se pide es

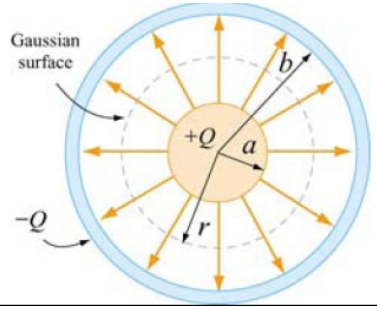
$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a)$$



Se debe evaluar entonces

$$\phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Para evaluar la integral, claramente debemos encontrar $\vec{E}(\vec{x})$ y elegir un camino desde a a b . Utilizamos una superficie Gaussiana S esférica de radio r, con $a < r < b$, como muestra la figura



Por ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Luego, en la región entre los dos cascarones

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Dada la forma del campo, resulta inteligente elegir un camino radial

$$\Gamma : \vec{x} = r\hat{r}$$

$$r : a \to b$$

Luego

$$d\vec{x} = dr\hat{r}$$

y

$$d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = dr\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Entonces

$$\phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \frac{drQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\phi(b) - \phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_b^a$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Notar que

$$\phi(b) - \phi(a) < 0 \to \phi(b) < \phi(a)$$

Es decir, cuesta más trabajo llevar una carga a a que a b desde el infinito

Problema

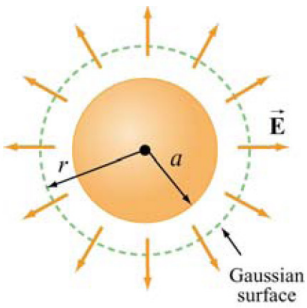
Considere la siguiente distribución de carga en coordenadas polares esféricas

$$\rho(r) = Cr^{\lambda}, r < a$$

Encuentre $\phi(r)$ tomando como punto de referencia el infinito

Solución

Encontremos primero el campo eléctrico. Se tiene una distribución esféricamente simétrica de carga (la densidad sólo es función de la variable r). Por lo mismo, podemos encontrar el campo por ley de Gauss, utilizando una superficie esférica de radio $r > a$ concéntrica al centro de la distribución



$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

la carga encerrada por S está dada por la siguiente integral

$$Q_{int} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{a} dr r^2 \sin\vartheta C r^{\lambda}$$

$$Q_{int} = \frac{4\pi C}{\lambda + 3} a^{\lambda+3} = Q$$

luego

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, r > a$$

Si ahora se utiliza una superficie esférica de radio $r < a$, la carga interior será

$$q_{int} = \frac{4\pi C}{\lambda + 3} r^{\lambda+3}$$

Luego, el campo interior tiene la forma

$$\vec{E}(r) = \frac{C}{\lambda + 3} r^{\lambda+1}\hat{r}$$

Para evaluar $\phi(r)$ debemos calcular

$$\phi(r) = -\int_r^{\infty} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Hay que tener cuidado al realizar este cálculo si $r > a$ o $r < a$.

i) Potencial exterior $r > a$

$$\phi(r) = -\int_r^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_r^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

Por comodidad elegimos un camino radial

$$\vec{x} = r'\hat{r}$$

$$r' : r \to \infty$$

$$d\vec{x} = dr'\hat{r}$$

Luego

$$d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = dr' \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

$$\phi(r) = \int_r^\infty \frac{dr'Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r'}\right)\Big|_r^\infty$$

entonces

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, r \geq a$$

$$\phi(r) = \frac{Ca^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\,\epsilon_0 r}, r \geq a$$

ii) Si $r < a$

$$\phi(r) = \int_r^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_r^a d\vec{x} \cdot \vec{E} + \int_a^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

la segunda integral se obtiene al evaluar $\phi(r)\Big|_{r=a}$ con $\phi(r)$ el potencial exterior encontrado anteriormente. La primera integral resulta (tomando un camino radial)

$$\vec{x} = r'\hat{r}$$

$$r' : r \to a$$

$$d\vec{x} = dr'\hat{r}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{x} = dr' \frac{C}{\lambda+3} r'^{\lambda+1}$$

$$\int_r^a d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{C}{\lambda+3}\int_r^a dr' r'^{\lambda+1} = \frac{C}{\lambda+3}\frac{r'^{\lambda+2}}{\lambda+2}\Big|_r^a$$

$$\int_r^a d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Ca^{\lambda+2}}{(\lambda+3)(\lambda+2)} - \frac{Cr^{\lambda+2}}{(\lambda+3)(\lambda+2)} = \frac{C}{\lambda^2+5\lambda+6}\left(a^{\lambda+2} - r^{\lambda+2}\right)$$

la segunda integral es

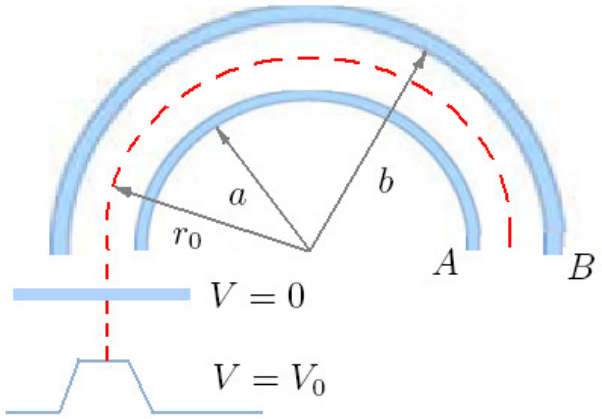
$$\int_a^\infty d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{C}{\epsilon_0 a} \frac{a^{\lambda+2}}{\lambda+3} = \frac{C a^{\lambda+1}}{\epsilon_0(\lambda+3)}$$

Finalmente, para $r < a$

$$\phi(r) = \frac{C a^{\lambda+1}}{\epsilon_0(\lambda+3)} + \frac{C}{\lambda^2+5\lambda+6}\left(a^{\lambda+2} - r^{\lambda+2}\right)$$

Problema

Iones de carga q son acelerados desde el reposo hasta una diferencial de potencial ΔV_0, para luego entrar a una región entre dos electrodos cilíndricos muy largos A y B, de radios a y b respectivamente ($a < b$). El ión recorre media circunferencia de radio r_0 describiendo una trayectoria circular. Despreciando los efectos de borde y asumiendo que los cilindros son muy largos en comparación al espacio que los separa, encuentre la diferencia de potencial ΔV_{BA}



Solución

Primero debemos encontrar la velocidad con la que los iones ingresan a la región entre cilindros. Éstos son acelerados a partir del reposo desde una región a potencial $\phi = V_0$ hasta una región a potencial $\phi = 0$. La energía inicial está dada por

$$E_1 = qV_0$$

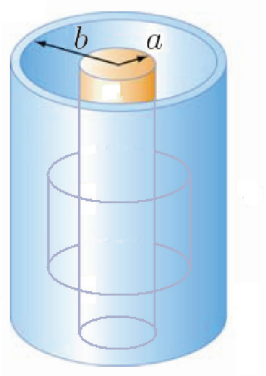
la energía final (justo antes de ingresar entre los electrodos)

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Por conservación de la energía

$$E_1 = E_2 \rightarrow v^2 = \frac{2qV_0}{m}$$

Ahora, dentro de la región entre cilindros existe un campo eléctrico radial que se puede obtener con la ley de Gauss



Utilizando una superficie cilíndrica de radio r ($a < r < b$) y altura h, se tiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 2\pi r h E(r) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

donde la carga encerrada por la superficie S es

$$q_{in} = \sigma 2\pi h a$$

σ es la densidad superficial de carga sobre el cilindro de radio a. De aquí

$$2\pi r h E(r) = \frac{\sigma h 2\pi a}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}\hat{r}$$

En particular

$$\vec{E}(r_0) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_0}\hat{r}$$

Este campo es por supuesto el responsable de la fuerza que siente un ión (en dirección radial), y que permite la trayectoria circular. El equilibrio de fuerzas en la dirección radial sobre un Ión de carga q es

$$q\vec{E}(r_0) = q\frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_0}\hat{r} = -m\frac{v^2}{r_0}\hat{r}$$

de donde

$$q\frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_0} = -m\frac{2qV_0}{m r_0}$$

la densidad superficial de carga sobre el cilindro A resulta ser

$$\sigma = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{a}$$

y el campo eléctrico queda, para r, $a < r < b$

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}\hat{r} = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{a}\frac{a}{\epsilon_0 r}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = -2\frac{V_0}{r}\hat{r}$$

La diferencia de potencial entre los cilindros es

$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando un camino radial

$$\Delta V = -\int_a^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) = -\int_a^b dr \left(-\frac{2V_0}{r}\right) = 2V_0 \int_a^b \frac{dr}{r}$$

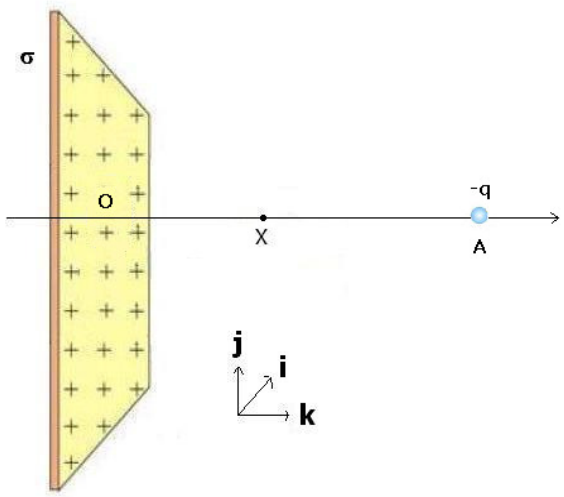
$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a) = 2V_0 \ln(b/a)$$

Problema

Un plano infinito y uniforme de carga eléctrica con densidad σ pasa por un punto O. Por O hay una recta OX que es perpendicular al plano. A distancia a de 0 se encuentra una carga eléctrica puntual - q.

a) Calcule el potencial eléctrico resultante en un punto $P(x)$ cualquiera entre A y O

b) Una partícula de masa m y carga eléctrica -e se libera desde el punto medio entre O y A. ¿Con qué velocidad choca contra el plano de carga?



Solución

Para calcular el potencial en el eje $\hat{x}$ podemos primero calcular el campo eléctrico. Naturalmente, éste se puede obtener fácilmente por superposición. Sea $\vec{E}_1$ el campo eléctrico debido al plano infinito, sabemos que éste es uniforme y no depende de la distancia al plano. Para $x > 0$ es

$$\vec{E}_1(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}$$

Podemos obtener el potencial asociado al plano integrando el campo eléctrico sobre una trayectoria horizontal que pasa por Ox, entre $\vec{x}_1 = x\hat{i}$ y $\vec{x}_2 = R\hat{i}$ $(R > x)$

$$\phi_1(x) - \phi_1(R) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \int_x^R dx' \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\phi_1(x) = \phi_1(R) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}R - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$$

El potencial en un punto x debido a la carga puntual $-q$ está dado por

$$\phi_2(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{\mid a - x \mid}$$

por el principio de superposición

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{\mid a - x \mid} + \phi_1(R) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}R - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$$

b) Si colocamos una partícula de masa m y carga -e, ésta sentirá una fuerza que la acelerará en la dirección -$\hat{i}$. En teoría, una vez que se mueve la carga ocurren fenómenos complejos que no estamos considerando en el caso estático. Suponiendo que podemos despreciar estos efectos, y utilizar las leyes estáticas, la energía debe conservarse (campo electrostático es conservativo)

$$U(a/2) = U(0) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$-e\phi(a/2) = -e\phi(0) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

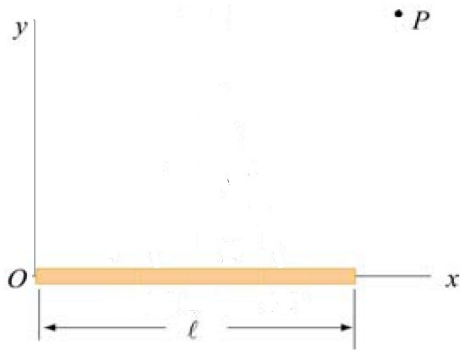
$$v_f^2 = \frac{2e}{m}\left(\phi(0) - \phi(a/2)\right)$$

$$v_f^2 = \frac{2e}{m}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2q}{a} + \frac{\sigma}{4\epsilon_0}a\right)$$

$$v_f^2 = \frac{2e}{m}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{\sigma a}{4\epsilon_0}\right)$$

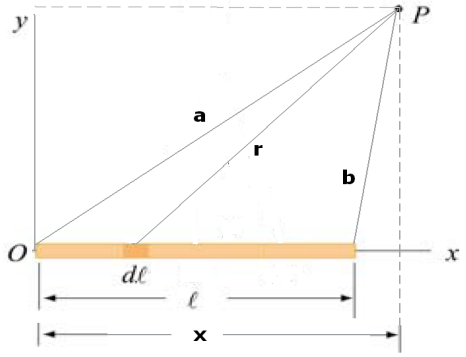
Problema

Una varilla delgada de longitud L tiene una carga uniforme definida por su densidad lineal λ. Calcular el potencial en un punto cualquiera del espacio que lo rodea



Solución

Sea P un punto de coordenadas (x, y). Tomemos un elemento diferencial de longitud en la barra, a una distancia l del origen, como se aprecia en la figura



La contribución de este elemento infinitesimal al potencial en P es

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dl\lambda}{r}$$

y $r = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}$. Con esto

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dl\lambda}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}$$

Sea $t = x - l$, con lo que $dt = -dl$, así

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_x^{x-L} \frac{dt\lambda}{\sqrt{t^2+y^2}}$$

Aquí es inmediato que se usa la sustitución $t = y\tan\vartheta$, luego $dt = ysec^2\vartheta d\vartheta$. Con esto tenemos

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+y^2}} = \int \frac{d\vartheta sec^2\vartheta y}{\sqrt{y^2(1+tan^2\vartheta)}} = \int d\vartheta sec\vartheta$$

Y esta integral es muy familiar y vale

$$\int d\vartheta sec\vartheta = ln(sec\vartheta + \tan\vartheta)$$

Ahora, $tan\vartheta = \frac{t}{y}$ y $sec\vartheta = \frac{\sqrt{t^2+y^2}}{y}$

Con todo esto, tenemos

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}(ln(t+\sqrt{t^2+y^2}))\Big|_x^{x-L}$$

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(ln(x+\sqrt{x^2+y^2}) - ln(x-L+\sqrt{(x-L)^2+y^2})\right)$$

Finalmente

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{(x-L+\sqrt{(x-L^2)+y^2})}\right)$$

y llamando

$$a = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$b = \sqrt{(x-L)^2+y^2}$$

$$\phi(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{x+a}{(x-L+b)}\right)$$

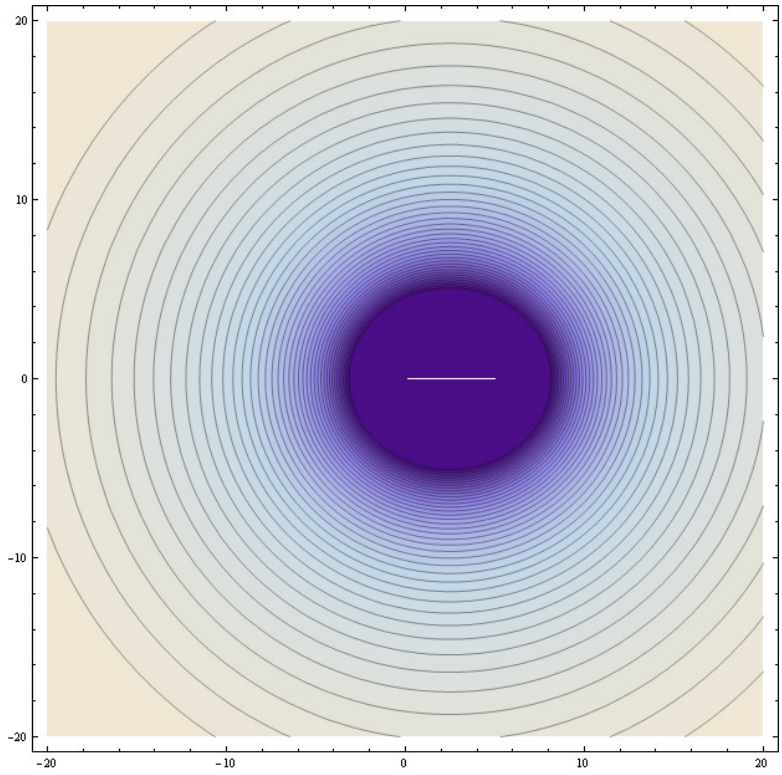


Fig. 5.2: La figura muestra las curvas equipotenciales del alambre de carga

Problema

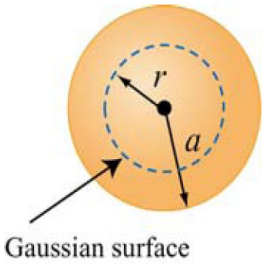
Encuentre el potencial dentro y fuera de una esfera sólida cargada uniformemente cuyo radio es R y su carga total es Q. Use infinito como punto de referencia.

Solución

Para encontrar el potencial en todo el espacio, se puede determinar primeramente el campo eléctrico debido a la distribución esférica de carga. Considerando el origen en el centro de la esfera, por argumentos de simetría es fácil ver que el campo eléctrico debe ser radial y su magnitud una función de la distancia r al origen.

Campo interior

Ahora, para el campo interior, se elige una superficie de Gauss esférica y de radio $r < R$, como se aprecia en la figura



Luego, utilizamos la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

donde $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ y $d\vec{S} = dS\hat{r}$, luego la integral de flujo del campo eléctrico es, simplemente

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \oiint_S dSE(r)\hat{r} \cdot \hat{r} = \oiint_S dSE(r)$$

Como en la superficie S el radio r es constante

$$\oiint_S dSE(r) = E(r) \oiint_S dS = E(r)4\pi r^2$$

Por otra parte, la carga encerrada por la superficie de Gauss es

$$q_{in} = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

como la esfera está cargada uniformemente, su densidad volumétrica de carga es

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

De esta forma, y considerando $d^3x' = r^2 sin\vartheta dr d\vartheta d\phi$

$$q_{in} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\vartheta sin\vartheta \int_0^{r} dr r^2 \rho$$

$$q_{in} = 4\pi\rho \int_0^{r} dr r^2 = 4\pi\rho \frac{1}{3} r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

Finalmente, la ley de Gauss queda

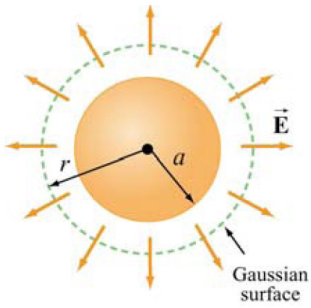
$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}$$

de donde, para $r < R$

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Campo exterior

Ahora, para obtener el campo exterior, se construye una superficie de Gauss esférica y ahora de radio $r > R$



El flujo eléctrico sobre esta superficie es, de manera análoga al caso anterior

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E} \cdot = E(r) 4\pi r^2$$

mientras que la carga encerrada en este caso está dada por

$$q_{in} = Q$$

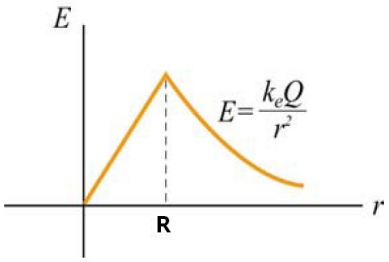
Con esto

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

En resumen, se tiene

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r} & \text{si } \mid \vec{x} \mid \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } \mid \vec{x} \mid > R \end{cases}$$



Notar que el campo es continuo al atravesar un volumen cargado, pero no es diferenciable

Potencial exterior

Ahora, para obtener el potencial electrostático, calculamos la integral de línea

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

a lo largo de una trayectoria radial. Luego $\vec{dr} = dr\hat{r}$, así, para $r > R$

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr$$

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} dr\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r} dr\frac{1}{r^2}$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potencial interior

Ahora, para $r < R$, tenemos

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{R} drE(r) - \int_{R}^{r} drE(r)$$

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{R} dr\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \int_{R}^{r} dr\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\int_{R}^{r} drr$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\phi(r) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

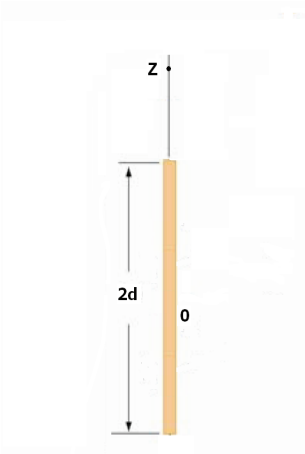
$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} & \text{si } r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Problema

Un alambre cuya densidad lineal de carga es λ se extiende en el eje z desde $z = -d$ hasta $z = d$.
a) Calcule el potencial en un punto $z > d$ sobre el eje del alambre
b) Cuál es el cambio de energía potencial de un electrón si se mueve de $z = 4d$ hasta $z = 3d$?
c) Si el electrón parte del reposo desde $z = 4d$, cuál es su velocidad en $z = 3d$?
Observación: No considere efectos gravitacionales

Solución Problema 2

a) Tomamos un elemento diferencial de longitud dl a una distancia l del origen:



El potencial a una distancia $z > d$ sobre el eje del alambre debido a este elemento infinitesimal de carga está dado por

$$d\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(z-l)}$$

donde $dq = dl\lambda$

$$d\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(z-l)}$$

$$d\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dl\lambda}{(z-l)}$$

con esto, el potencial total está dado por

$$\phi(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-d}^{d}\frac{dl}{(z-l)}$$

sea $u = z - l$, luego $du = -dl$

$$\phi(z) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z+d}^{z-d}\frac{du}{u}$$

$$\phi(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{z+d}{z-d}\right)$$

b) Un electrón se mueve desde $z = 4d$ hasta $z = 3d$, luego, su cambio en energía potencial está dado por

$$\Delta U = U(4d) - U(3d) = -e\left(\phi(4d) - \phi(3d)\right) = e\phi(3d) - e\phi(4d)$$

$$\Delta U = e\left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln2 - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln(\frac{5}{3})\right)$$

$$\Delta U = e\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

c) Por conservación de la energía

$$U(4d) + K(4d) = U(3d) + K(3d)$$

como el electrón parte del reposo, $K(4d) = 0$, luego

$$U(4d) = U(3d) + K(3d)$$

$$U(4d) - U(3d) = K(3d)$$

luego, el cambio de energía potencial calculado en la parte b) es equivalente a la energía cinética que adquiere el electrón

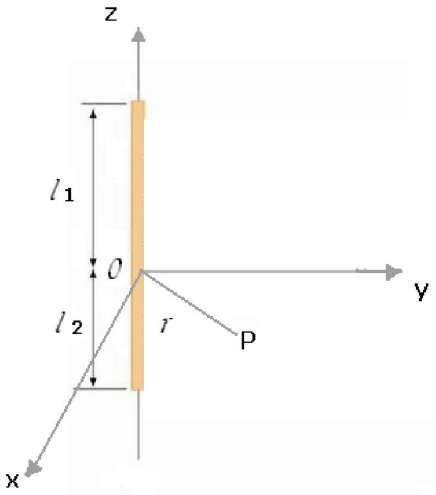
$$K(3d) = \Delta U = e\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\frac{mv^2}{2} = e\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$v = \sqrt{e\frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 m} ln\left(\frac{6}{5}\right)}$$

Problema

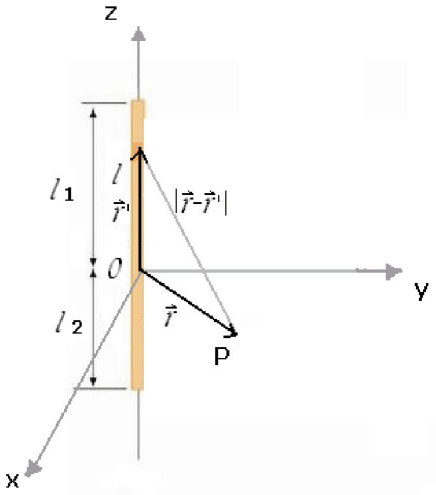
Se tiene una distribución rectilínea de carga de densidad λ homogénea. Un punto P está a una distancia r de la distribución, y su proyección sobre la recta de carga está a las distancias l_1 y l_2 de sus extremos.



a) Calcule el campo eléctrico en P
b) Vea que sucede cuando r es mucho mayor que l_1 y l_2
c) Haga una aproximación para los casos en que r es mucho menor que l_1 y l_2 ¿Qué ocurre cuando l_1 y l_2 tienden a infinito? Compruebe su resultado con Ley de Gauss
d) Obtenga el potencial en el punto P debido a un alambre infinito de carga

Solución

a) Tomemos un elemento diferencial de longitud, a una distancia l del origen, como se aprecia en la figura



De la Ley de Coulomb, este elemento diferencial de carga crea un campo eléctrico en P que está dado por

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(\vec{x}-\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3}$$

En este caso, tenemos

$$\vec{x} = r\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es el vector radial en coordenadas cilíndricas que apunta desde el origen hasta el punto P. Además

$$\vec{x}' = l\hat{k}$$

Luego

$$\vec{x} - \vec{x}' = r\hat{r} - l\hat{k}$$

$$\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid = \sqrt{r^2 + l^2}$$

De esta forma , la contribución del elemento diferencial al campo es

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dl(r\hat{r} - l\hat{k})}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

Utilizando el principio de superposición, el campo total en P será la suma de todas las contribuciones infinitesimales de la distribución, esto es

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(r\hat{r}\int_{-l_2}^{l_1}\frac{dl}{(l^2 + r^2)^{3/2}} - \hat{k}\int_{-l_2}^{l_1}\frac{ldl}{(l^2 + r^2)^{3/2}}\right)$$

Ahora, la integral

$$\int \frac{ldl}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

se resuelve con la sustitución $u = r^2 + l^2$, luego $du = 2ldl$, con esto

$$\int \frac{ldl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{u^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

y la integral

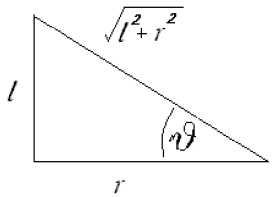
$$\int \frac{dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

se resuelve con la sustitución trigonométrica $l = rtan\vartheta$, asi $dl = rsec^2\vartheta d\vartheta$

$$\int \frac{ldl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta rsec^2\vartheta}{(r^2 + r^2tan^2\vartheta)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta rsec^2\vartheta}{r^3sec^3\vartheta}$$

$$\int \frac{ldl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \int \frac{d\vartheta}{r^2sec\vartheta} = \frac{1}{r^2}sin\vartheta$$

Ahora, de la figura vemos que $\sin\vartheta = \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$



luego

$$\int \frac{ldl}{(r^2+l^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2}\frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

Con esto, el campo total en P es

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(r\hat{r}\frac{1}{r^2}\frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}\Big|_{-l_2}^{l_1} + \hat{k}\frac{1}{\sqrt{r^2+l^2}}\Big|_{-l_2}^{l_1}\right)$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\hat{r}\left(\frac{l_1}{\sqrt{r^2+l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{r^2+l_2^2}}\right) + \hat{k}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+l_2^2}}\right)\right)$$

b) En el límite cuando $r >> l_1$ y $r >> l_2$, se tiene que (a cero orden)

$$\sqrt{r^2+l_1^2} \approx \sqrt{r^2+l_2^2} \approx r$$

Luego el campo queda

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\hat{r}\left(\frac{l_1}{r} + \frac{l_2}{r}\right) + \hat{k}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right)\right)$$

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{l_1+l_2}{r}\hat{r}$$

pero $\lambda(l_1+l_2)$ no es más que la carga total contenida en la distribución, digamos, q, luego el campo toma la forma

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

que es el campo de una carga puntual

c) Ahora, en el límite cuando $l_1 >> r$ y $l_2 >> r$, se tiene que

$$\sqrt{r^2+l_1^2} \approx l_1$$

$$\sqrt{r^2+l_2^2} \approx l_2$$

y el campo queda

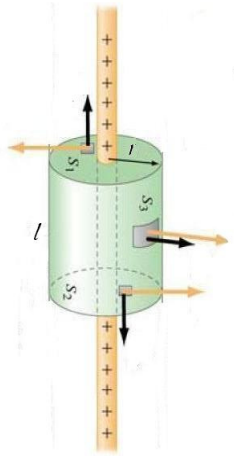
$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}(\frac{2}{r}\hat{r} + \hat{k}(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}))$$

y si $l_1 \to \infty$, $l_2 \to \infty$, se tiene

$$\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

que es el campo eléctrico de un alambre infinito de carga.

Comprobemos este último resultado con la Ley de Gauss. Tomando como superficie Gaussiana un cilindro de radio r y cuyo eje de simetría coincide con el de la distribución lineal de carga



Es claro que debido a que la distribución es infinita, el campo posee una simetría cilíndrica, luego el campo es radial y depende únicamente de la distancia r. Con esto, no hay flujo por las tapas del cilindro, y en el manto el campo eléctrico es siempre normal a la superficie y de mangnitud constante, luego

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot d\vec{E} = \iint_{manto} dS\hat{r}E(r)\hat{r} = E(r) \iint_{manto} dS = E(r)2\pi rl$$

la carga encerrada por este cilindro es $q_{in} = \lambda l$, luego

$$E(r)2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$$

El mismo resultado obtenido anteriormente

d) El campo del alambre infinito está dado por

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}\hat{r}$$

Sabemos que en electrostática se cumple

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\phi(r)$$

Debido a la simetría, el potencial será sólo función de r, luego

$$\vec{\nabla}\phi(r) = \frac{d\phi}{dr}\hat{r}$$

con esto

$$V(r) = -\int drE(r) + C$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r + C$$

Donde C es una constante arbitraria. Notar que el potencial diverge en el infinito, ésto debido a que la carga eléctrica total **no es finita**. (Sólo en esos casos podemos fijar el potencial igual a cero en infinito)

Notar que las superficies equipotenciales son cilindros de radio r, y que para $r = 1$

$$\phi(1) = C$$

Luego la constante C no es más que el potencial de todos los puntos que están sobre el manto de cilindro de radio unitario! Así

$$\phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + V(1)$$

Problema

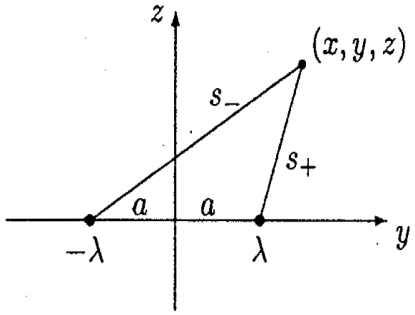
Dos cables infinitos paralelos al eje X poseen densidad de carga uniforme λ y $-\lambda$. Ellos están a distancia a del origen.

a) Encuentre el potencial en un punto (x, y, z) usando el origen como punto de referencia.

b) Demuestre que las superficies equipotenciales son cilindros circulares

Solución

a) Tenemos dos alambres infinitos cada uno a distancia a del origen, como se aprecia en la figura (notar que el eje X sale de la página)



Por el principio de superposición, el potencial total en el punto P será la suma de los potenciales debidos a cada distribución individual. El potencial debido al alambre de densidad λ es

$$\phi_1(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln s_+ + C_1$$

y el potencial debido al alambre de densidad $-\lambda$ es

$$\phi_1(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln s_- + C_2$$

Ahora, como nos piden que la referencia sea el origen, las constantes C_1 y C_2 deben satisfacer

$$\phi_1(a) = 0 = \phi_2(a)$$

Con esto

$$\phi_1(a) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a$$

$$\phi_2(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a$$

Notar que $C_1 + C_2 = 0$.

El potencial en el punto P es

$$\phi(P) = \phi_1(P) + \phi_2(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln s_+ + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln s_-$$

Si $P = (x, y, z)$, entonces

$$s_+ = \sqrt{(y-a)^2 + z^2}$$
$$s_+ = \sqrt{(y+a)^2 + z^2}$$

Finalmente, el potencial es

$$\phi(P) = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\sqrt{(y+a)^2 + z^2}) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\sqrt{(y-a)^2 + z^2})$$

$$\phi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{(y+a)^2 + z^2}}{\sqrt{(y-a)^2 + z^2}}\right)$$

$$\phi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{(y+a)^2 + z^2}{(y-a)^2 + z^2}\right)$$

b) Las superficies equipotenciales están dadas por

$$\frac{(y+a)^2 + z^2}{(y-a)^2 + z^2} = k$$

donde k es una constante. Esto equivale a

$$(y+a)^2 + z^2 = k((y-a)^2 + z^2)$$

$$y^2 + 2ay + a^2 + z^2 = k(y^2 - 2ay + a^2 + z^2)$$

O equivalentemente

$$y^2(k-1) + z^2(k-1) + a^2(k-1) - 2ay(k+1) = 0$$

Dividiendo por $k - 1$

$$y^2 + z^2 + a^2 - 2ay\frac{k+1}{k-1} = 0$$

Notar que la ecuación de una circunferencia con centro en y_0 y radio R es

$$(y - y_0^2) + z^2 = R^2$$

$$y^2 + z^2 - 2yy_0 + (y_0^2 - R^2) = 0$$

De aquí es claro que en planos perpendiculares a los alambres, las equipotenciales son circunferencias con

$$y_0 = a\frac{k+1}{k-1}$$

Despejando se obtiene que

$$R = \frac{2a\sqrt{k}}{\mid k-1 \mid}$$

En definitiva las superficies equipotenciales son cilindros

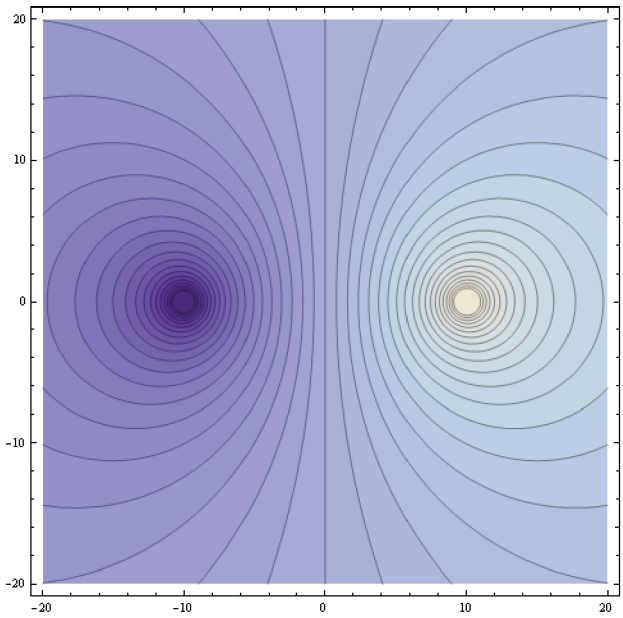
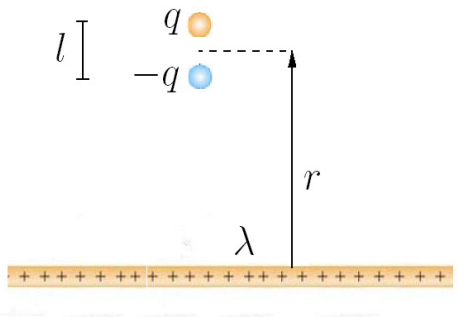


Fig. 5.3: Equipotenciales en plano $y - z$ son curvas circulares

Problema

Un dipolo con momento dipolar $\vec{p}$ se localiza a una distancia r de una barra muy delgada con largo infinito y homogéneamente cargada con densidad lineal de carga $\lambda > 0$. Asuma que el dipolo está orientado con el campo eléctrico debido a la barra cargada como muestra la figura



a) Suponiendo que la separación fija l entre las cargas que conforman el dipolo es tal que $l << r$, determine la fuerza sobre el dipolo, a primer orden en l/r

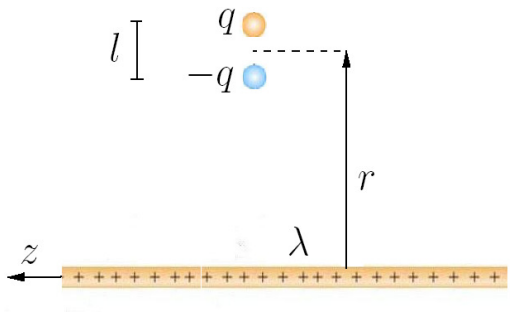
b) Partiendo de la respuesta del inciso anterior, demuestre que la fuerza sobre el dipolo puede ser escrita como

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}(\vec{x})$$

(válido para un dipolo puntual)

Solución

Ya fue obtenido anteriormente el campo eléctrico de una distribución lineal de carga muy larga y de densidad λ. Definiendo un sistema de coordenadas cilíndricas, donde el eje z coincide con el eje de la barra, como se ve en la figura



El campo eléctrico creado por la barra está dado por

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

La fuerza sobre el dipolo está dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}(r+l/2) - q\vec{E}(r-l/2) = q\left(E(r+l/2) - E(r-l/2)\right)\hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r+l/2} - \frac{1}{r-l/2}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{1+\frac{l}{2r}} - \frac{1}{1-\frac{l}{2r}}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\left(\left(1+\frac{l}{2r}\right)^{-1} - \left(1-\frac{l}{2r}\right)^{-1}\right)\hat{r}$$

Recordar la expansión a primer orden de $(1+x)^n$, buena aproximación cuando $x << 1$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

De esta forma, la fuerza se puede aproximar (en primer orden de l/r)

$$\vec{F} \approx \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\left(1 - \frac{l}{2r} - \left(1+\frac{l}{2r}\right)\right)\hat{r}$$

$$\vec{F} \approx \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\left(-\frac{l}{r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F} \approx \frac{-ql\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{-p\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

donde p es la magnitud del momento dipolar del dipolo

b) Notar que si $l << r$, se espera obtener para la fuerza el resultado que se obtuvo para el dipolo puntual

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}(\vec{x})$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, y recordando la naturaleza radial del campo eléctrico

$$\vec{F}(r) = \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}(r) = \left(p\hat{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}\right)\vec{E}(r)$$

$$\vec{F}(r) = \left(p\frac{\partial}{\partial r}\right)\vec{E}(r) = p\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F}(r) = -p\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

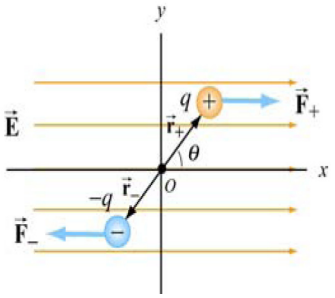
que es el mismo resultado que se obtuvo en la parte anterior

Problema

Considere un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ formando un ángulo ϑ con la horizontal. Suponga que existe un campo eléctrico externo uniforme dado por $\vec{E} = E\hat{x}$.

a) Calcule la fuerza total y explícitamente el torque que se ejerce sobre el dipolo

b) ¿Qué ocurre si el campo no es uniforme?



Solución

Como se aprecia en la figura, se tiene que la fuerza total sobre el dipolo será

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$$

$$\vec{F} = qE\hat{i} - qE\hat{i} = \vec{0}$$

La fuerza neta sobre el dipolo en un campo externo uniforme es nula. Calculemos ahora el torque que se ejerce sobre el dipolo, con respecto a su centro de masa(origen)

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

$$\vec{\tau} = (a\cos\vartheta\hat{i} + a\sin\vartheta\hat{j}) \times qE\hat{i} + (-acos\vartheta\hat{i} - a\sin\vartheta\hat{j}) \times -qE\hat{i}$$

$$\vec{\tau} = a\sin\vartheta\hat{j} \times qE\hat{i} + a\sin\vartheta\hat{j} \times qE\hat{i}$$

$$\vec{\tau} = 2a\sin\vartheta\hat{j} \times qE\hat{i} = -2aqsin\vartheta E\hat{k}$$

Existe un torque sobre el dipolo, a pesar que la fuerza neta sobre él es nula! La dirección del torque es según $-\hat{k}$ (hacia dentro de la página). Es decir, el dipolo tiende a girar en el sentido del reloj de forma que el dipolo se alinea con respecto al campo. (Deja de haber torque cuando $\vec{p}$ y $\hat{E}$ son paralelos). Ahora, la magnitud del momento dipolar es

$$p = 2aq$$

Luego, se puede reescribir

$$\vec{\tau} = -pEsin\vartheta\hat{k}$$

Escrito en forma más general, se tiene

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

que es consistente con la expresión general para el torque sobre un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ situado en un campo eléctrico $\vec{E}$.

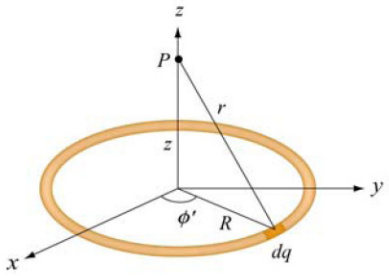
b) Si el campo externo no es uniforme, seguirá existiendo un torque sobre el dipolo hasta que éste esté alineado con respecto al campo eléctrico. Eso sí, la fuerza neta sobre el dipolo no necesariamente será nula , por lo que además de girar, se desplazará hacia donde el campo eléctrico sea más intenso.

Problema

Se tiene dos anillos coaxiales de radio R cargados uniformemente (cargas totales q_1 y q_2 desconocidas) y separados una distancia $2a$. El trabajo necesario para traer una carga q desde el infinito hasta el centro de cada uno de los anillos es W_1 y W_2 respectivamente. Calcule las cargas totales q_1 y q_2

Solución

Resolvamos primero el problema auxiliar del potencial en el eje de un anillo con carga q y radio R



El potencial está dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_\Gamma \frac{dx'\lambda}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

interesa obtener el potencial para $\vec{x} = z\hat{k}$. La parametrización de la distribución de carga está dada por

$$\vec{x}' = R\hat{r}(\vartheta)$$
$$\hat{r}(\vartheta) = \cos\vartheta\hat{i} + \sin\vartheta\hat{j}$$
$$dx = Rd\vartheta$$
$$\vartheta : 0 \to 2\pi$$

Luego

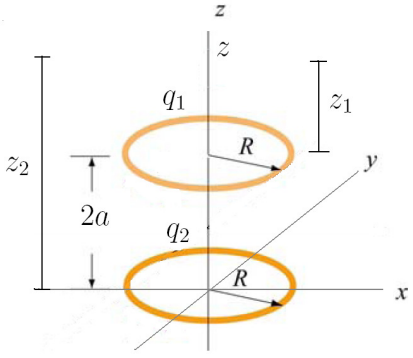
$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

y la densidad lineal es

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

$$\phi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

Consideremos ahora dos anillos separados una distancia $2a$



El potencial sobre un punto a distancia z del origen es

$$\phi(z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_1^2 + R^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_2^2 + R^2}}$$

donde

$$z_2 = z$$

$$z_1 = z - 2a$$

$$\phi(z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(z-2a)^2 + R^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Además se tiene

$$W_1 = q\phi(2a) = q\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{4a^2 + R^2}}\right)$$

$$W_2 = q\phi(0) = q\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{4a^2 + R^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R}\right)$$

De aquí se puede resolver para q_1 y q_2

$$q_1 = \frac{\pi\epsilon_0 R\sqrt{4a^2 + R^2}\left(W_1\sqrt{4a^2 + R^2} - W_2 R\right)}{qa^2}$$

$$q_2 = \frac{\pi\epsilon_0 R\sqrt{4a^2 + R^2}\left(W_2\sqrt{4a^2 + R^2} - W_1 R\right)}{qa^2}$$

Problema

Muestre que la energía potencial almacendada en una esfera sólida cargada uniformemente con carga Q y de radio R es

$$U = \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}\right)$$

Solución

De la forma general para la energía potencial de una distribución de carga

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V d^3x'\rho(\vec{x}')\phi(\vec{x}')$$

Utilizando coordenadas esféricas

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{R} drr^2\rho(r,\varphi,\vartheta)\phi(r,\varphi,\vartheta)$$

la densidad de carga es constante

$$\rho(r,\varphi,\vartheta) = \frac{Q}{4/3\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

y el potencial interior fue calculado anteriormente

$$\phi(r,\varphi,\vartheta) = \phi(r) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

con esto

$$U = 4\pi\frac{3Q}{8\pi R^3}\int_0^{R} drr^2\frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$U = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6}\int_0^{R} drr^2(3R^2 - r^2) = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6}\left(R^5 - \frac{R^5}{5}\right)$$

$$U = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \times \frac{4}{5}R^5 = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Problema

Una distribución de fuentes localizadas en un volumen V se define como

$$\rho = \begin{cases} \rho(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \end{cases}$$

Demuestre que en primera aproximación en la magnitud de V (diámetro máximo), el campo eléctrico distante debido a fuentes localizadas en V, puede descomponerse en

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q(V) \frac{\vec{x}}{|\ \vec{x}\ |^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{p}(V) \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{x}}{|\ \vec{x}\ |^3}$$

donde

$$q(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

es la carga total de la distribución, y

$$\vec{p}(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$$

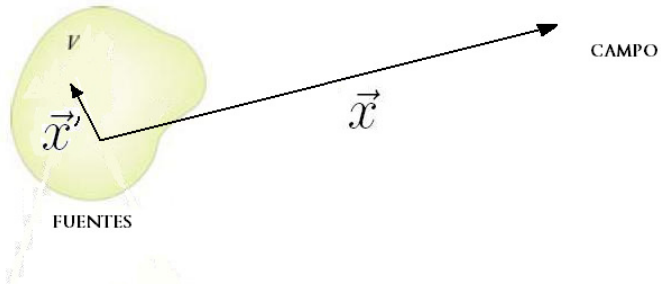
es el momento dipolar de la distribución

Solución

Pondremos el origen $\vec{0} \in V$, con lo que por campo distante estamos pensando en

$$|\ \vec{x}\ | >> |\ \vec{x}'\ |, \vec{x}' \in V$$

es decir, la distancia a la distribución es mucho mayor que las dimensiones de ésta



El campo está dado por la integral de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\ \vec{x} - \vec{x}'\ |} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\ \vec{x} - \vec{x}'\ |}$$

Ahora, utilizaremos la siguiente expansión en Taylor

$$\vec{f}(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{f}(\vec{x}) - \left(\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{f}(\vec{x}) + O(2)$$

de forma que

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\ \vec{x} - \vec{x}'\ |} = \frac{\vec{x}}{|\ \vec{x}\ |^3} - \left(\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{x}}{|\ \vec{x}\ |^3} + O(2)$$

Así

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \left\{ \frac{\vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3} - \left(\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3} \right\}$$

definiendo

$$q(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

$$\vec{p}(V) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$$

queda

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q(V) \frac{\vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{p}(V) \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3}$$

Notar que el primer término corresponde al campo creado por una carga puntual $q(V)$ en el origen. Por supuesto ésta sería la aproximación a cero orden del campo, en donde esperamos obtener la ley de Coulomb. El segundo término de esta expansión, equivale al campo eléctrico generado por un dipolo puntual $\vec{p}(V)$ en el origen.
Esta expansión del campo se conoce como **Expansión Multipolar**, y se verá con más detalle un poco más adelante (de hecho, en la próxima página).

5.7. Expansión Multipolar

Consideraremos una fuente localizada caracterizada por la siguiente densidad de carga

$$\rho = \begin{cases} \rho(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin V \end{cases}$$

El potencial está dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

donde

$$\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid = \left\{ \vec{x}^2 + \vec{x}'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' \right\}^{1/2}$$

entonces

$$\frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \left\{ 1 + \frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right\}^{-1/2}$$

Recordando la expansión en taylor

$$(1+z)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\frac{3}{4}z^2 + O(3)$$

y la expansión hasta segundo orden es

$$\frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \approx \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \left(\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \left\{ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right)^2 - 4\frac{(\vec{x} \cdot \vec{x}')\vec{x}'^2}{\vec{x}^4} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \left\{ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2} \right)^2 + O \left[\left(\frac{\mid \vec{x}' \mid}{\mid \vec{x} \mid} \right)^3 \right] \right\}$$

Con esto, la expansión del potencial electrostático a segundo orden es

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3} \cdot \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')\vec{x}'$$
$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{\mid \vec{x} \mid^5} \iiint_V d^3x' \left\{ 3x'_i x'_j - \delta_{ij} \mid \vec{x}' \mid^2 \right\} \rho(\vec{x}') + ...$$

Se define el momento monopolar (escalar)

$$q = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

que es la carga total de la distribución. Además

$$\vec{p} = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}')\vec{x}'$$

es el momento dipolar (vector) de la distribución.

$$\vec{Q} = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \left\{ 3\vec{x}' \cdot \vec{x}'^T - \vec{I} \left(\vec{x}'^T \cdot \vec{x}' \right) \right\}$$

es el momento cuadripolar (tensor)

$$Q_{ij} = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') \left\{ 3x'_i x'_j - \delta_{ij} \mid \vec{x}' \mid^2 \right\}$$

la expansión queda

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mid \vec{x} \mid} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{x}^T \cdot \vec{Q} \cdot \vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^5} + ... \right)$$

Expandir el potencial de una distribución en términos de sus momentos (monopolar, dipolar, cuadripolar, etc) es muy útil en el estudio de radiación

Capítulo 6

Las dos leyes fundamentales de la Electrostática

Hasta ahora se han establecido los principios fundamentales en el estudio de la electrostática. Éstos son la ley de Coulomb (que proviene de un estudio empírico de las fuerzas entre cargas), y el principio de superposición. Hemos visto que éstos principios tienen como consecuencia un par de leyes que ha simpificado mucho el estudio de los campos para ciertos casos particulares. Éstas son la ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

y la ley de circulación del campo eléctrico

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Éstas dos ecuaciones integrales entregan información global acerca del campo. Sin embargo, es posible llevarlas a su forma más simple en un par de ecuaciones **diferenciales** para el campo electrostático.

A partir de la ley de Gauss, y utilizando el teorema de la divergencia, se obtiene

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

$$\iiint_V d^3x \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) - \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \right) = 0$$

esto es independiente del volumen V de integración. Consecuencia de esto es que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Del mismo modo, a partir de la ley de circulación y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) \right) = 0$$

para cualquier superficie cuyo contorno sea Γ. De aquí se desprende que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

En resumen, las dos leyes integrales fundamentales del campo electrostático tienen una formulación equivalente en dos ecuaciones diferenciales para el campo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

La primera de ellas relaciona la divergencia del campo electrostático en cada punto con la densidad de carga. La segunda establece que el campo eléctrico es conservativo o irrotacional. Éstas ecuaciones son las dos primeras **Ecuaciones de Maxwell** en el vacío y para campos estáticos. Veremos que éstas contienen absolutamente toda la teoría de la electrostática, es decir, basta con ellas para determinar completamente el campo eléctrico. Lo que hemos hecho aquí es encontrar expresiones matemáticas simples que resumen absolutamente todo el conocimiento empírico sobre la teoría del campo eléctrico estático.

Problema

Demuestre el siguiente teorema

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Solución

Sea $V(S)$ un volumen en R^3 y $S = \delta V$ su contorno. Sea además una carga puntual q en el punto $\vec{x}'$, es sabido que el campo electrostático creado por esta carga es

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

La ley de Gauss establece

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3x q\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

o equivalentemente

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = 4\pi \iiint_V d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

y recordando que

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = -\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = -\iiint_V d^3x \vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = 4\pi \iiint_V d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

luego

$$\iiint_V d^3x \left(\vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \right)$$

Finalmente

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

6.1. Completitud de la teoría Electrostática

6.1.1. Descomposición de Helmhotz

Sea $\vec{A}(\vec{x})$ un campo vectorial tal que

$$\oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid} = 0$$

definamos los campos

$$\vec{A}_L(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

entonces se cumple

$$1)\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})$$
$$2)\vec{\nabla} \times \vec{A}_L(\vec{x}) = 0$$
$$3)\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}) = 0$$

$\vec{A}_L(\vec{x})$ se llama **parte longitudinal** (irrotacional) de $\vec{A}$
$\vec{A}_T(\vec{x})$ se lama **parte transversal** (solenoidal) de $\vec{A}$

Demostración del teorema de Helmhotz
1) Utilizando la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f}g) = g\vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \vec{\nabla} g$$

se tiene

$$\vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

de forma que

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

en este último paso hemos utilizado el teorema de la divergencia y el hecho que

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -\vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

utilizando la hipótesis del teorema

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \vec{\nabla} \cdot \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

por lo tanto

$$4\pi\vec{A}_L(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

Ahora ocupamos la siguiente identidad (muy utilizada en teoría electromagnética)

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{f} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{f} - \vec{\nabla}^2\vec{f}$$

$$4\pi\vec{A}_L(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} - \vec{\nabla}^2\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

$$4\pi\vec{A}_L(\vec{x}) = -4\pi\vec{A}_T(\vec{x}) - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}')\vec{\nabla}^2\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

por último, utilizando el teorema

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$4\pi\left(\vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})\right) = 4\pi\iiint_{R^3} d^3x' \vec{A}(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

y se demuestra que

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})$$

$$b) -4\pi\vec{\nabla}\times\vec{A}_L(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_L(\vec{x}) = 0$$

$$c) 4\pi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_T(\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_T(\vec{x}) = 0$$

Observación

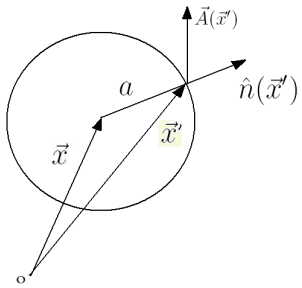
La validez del teorema de Helmhotz es

$$\oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = 0$$

Podemos escoger esta superficie como una esfera centrada en $\vec{x}$ y de radio a, con $a\to\infty$

$$\oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = \lim_{a\to\infty}\oiint_{S(\vec{x},a)} dS(\vec{x}')\frac{\hat{n}(\vec{x}')\cdot\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

sobre la superficie



$$\vec{x}' - \vec{x} = a\hat{n}(\vec{x}')$$

$$\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid = a$$

$$dS(\vec{x}') = a^2 d\Omega(\vec{x})$$

donde $d\Omega(\vec{x}) = \sin^2\vartheta d\vartheta d\phi$ es el elemento de ángulo sólido con vértice en $\vec{x}$

$$\left\| \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\| \leq \int_0^{4\pi} d\Omega(\vec{x}) \lim_{a\to\infty} a^2 \frac{\mid \hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \mid}{a}$$

$$\left\| \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\| \leq \int_0^{4\pi} d\Omega(\vec{x}) \lim_{a\to\infty} a \mid \hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \mid = \int_0^{4\pi} d\Omega \lim_{|\vec{x}'|\to\infty} \mid \vec{x} - \vec{x}' \mid\mid \vec{A}(\vec{x}') \mid$$

$$= \int_0^{4\pi} d\Omega \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x}' \mid\mid \vec{A}(\vec{x}') \mid$$

por lo tanto

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{A}(\vec{x}) \mid = 0 \rightarrow \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = 0$$

A continuación, demostraremos dos teoremas que nos permitirán escribir el teorema de Helmhotz de una forma más conveniente

Teorema 1

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla}\psi(\vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

Demostración

Ustamos el teorema de la divergencia

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

con $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{B}\psi(\vec{x})$, con $\vec{B}$ un vector constante arbitrario

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\psi(\vec{x}) = \iiint_V d^3x \vec{B} \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \iiint_V d^3x \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\psi(\vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}\psi(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

$$\vec{B} \cdot \left\{ \iiint_V d^3x \vec{\nabla}\psi(\vec{x}) - \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x})\psi(\vec{x}) \right\} = 0$$

como $\vec{B}$ fue escogido de forma arbitraria

$$\iiint_V d^3x\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

Teorema 2

$$\iiint_V d^3x\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x})\times\vec{A}(\vec{x})$$

Demostración

$$\iiint_V d^3x\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_a = \iiint_V d^3x\epsilon_{abc}\vec{\nabla}_b A_c = \epsilon_{abc}\iiint_V d^3x\vec{\nabla}_b A_c$$

pero del teorema anterior

$$\iiint_V d^3x\vec{\nabla}_a\psi = \oiint_{S(V)} dS_a\psi$$

así

$$\iiint_V d^3x\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_a = \epsilon_{abc}\oiint_{S(V)} dS_b A_c = \oiint_{S(V)} \epsilon_{abc}dS_b A_c$$
$$= \oiint_{S(V)}\left(d\vec{S}\times\vec{A}\right)_a$$

Con este teorema, podemos escribir la parte transversal de $\vec{A}(\vec{x})$ como

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\iiint_{R^3} d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

En efecto, consideremos

$$\vec{\nabla}\times\iiint_{R^3} d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid} = -\iiint_{R^3} d^3x'\vec{A}(\vec{x}')\times\vec{\nabla}\frac{1}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$\iiint_{R^3} d^3x'\vec{A}(\vec{x}')\times\vec{\nabla}'\frac{1}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid} = \iiint_{R^3} d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid} - \iiint_{R^3} d^3x'\vec{\nabla}'\times\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$\iiint_{R^3} d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid} - \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\times\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

pero si se cumple la hipótesis del teorema de Helmhotz

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty}\mid\vec{x}\mid\mid\vec{A}(\vec{x})\mid = 0 \to \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\times\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid} = \vec{0}$$

luego

$$\vec{\nabla}\times\iiint_{R^3} d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid} = \iiint_{R^3} d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

y entonces

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

6.1.2. Teorema de Helmhotz, segunda forma

Si $\vec{A}$ es un campo vectorial tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{A}(\vec{x}) \mid = 0$$

entonces

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_T(\vec{x})$$

con

$$\vec{A}_L(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{A}_T(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

donde

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_L(\vec{x}) = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}) = 0$$

6.1.3. Corolario del Teorema de Helmhotz

Dadas la divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 4\pi D(\vec{x})$$

y el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = 4\pi \vec{R}(\vec{x})$$

de un campo vectorial $\vec{A}(\vec{x})$, sobre todo el espacio, entonces ese campo vectorial está completamente **determinado** en todos los puntos del espacio mediante la siguiente representación integral- diferencial

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x})}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Observación: las funciones $\vec{D}(\vec{x})$ y $\vec{R}(\vec{x})$ nos son dadas, son las **fuentes** del campo $\vec{A}(\vec{x})$. Pero

$$\left\{D, \vec{R}\right\} = \{D, R_x, R_y, R_z\}$$

son 4 funciones, mientras que

$$\left\{\vec{A}\right\} = \{A_x, A_y, A_z\}$$

son 3 funciones. Sin embargo, no hay sobredeterminación pues

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$$

luego $\vec{R}$ debe ser solenoidal

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}(\vec{x}) = 0$$

esto agrega 1 condición. Con esto, la construcción de Helmhotz define un problema bien determinado

6.2. Completitud de la Electrostática

Hemos encontrado que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

El teorema de Helmhotz nos dice que , dadas la divergencia y el rotor del campo eléctrico, este esta absolutamente determinado por la forma integral

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

y la electrostática es una teoría **completa**: el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan las leyes fundamentales de la teoría es suficiente para determinar completamente el campo electrostático

Problema

La descomposición de Helmholtz requiere que

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{A}(\vec{x}) \mid = 0$$

demuestre que

$$\iiint_{R^3} d^3x \left\{ \mid D(\vec{x}) \mid + \mid \vec{R}(\vec{x}) \mid \right\} < \infty$$

es condición suficiente para la validez de la representación integro-diferencial de Helmholtz

Solución

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Entonces

$$\mid \vec{x} \mid\mid \vec{A}(\vec{x}) \mid = \mid \vec{x} \mid \left\| -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla} \times \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\|$$

$$\leq \mid \vec{x} \mid \iiint_{R^3} d^3x' \left\| D(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\| + \mid \vec{x} \mid \iiint_{R^3} d^3x' \left\| \vec{R}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\|$$

$$\leq \mid \vec{x} \mid \iiint_{R^3} d^3x' \mid D(\vec{x}') \mid\mid \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} \mid + \mid \vec{x} \mid \iiint_{R^3} d^3x' \mid \vec{R}(\vec{x}') \mid\mid \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} \mid$$

$$= \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\mid \vec{x} \mid}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^2} \left\{ \mid D(\vec{x}') \mid + \mid \vec{R}(\vec{x}') \mid \right\}$$

Luego

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{A}(\vec{x}) \mid \leq \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\mid \vec{x} \mid}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^2} \left\{ \mid D(\vec{x}') \mid + \mid \vec{R}(\vec{x}') \mid \right\}$$

$$= \iiint_{R^3} d^3x' \left\{ \mid D(\vec{x}') \mid + \mid \vec{R}(\vec{x}') \mid \right\} \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{\mid \vec{x} \mid}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^2}$$

$$= \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \iiint_{R^3} d^3x' \left\{ \mid D(\vec{x}') \mid + \mid \vec{R}(\vec{x}') \mid \right\} = 0$$

si

$$0 < \iiint_{R^3} d^3x' \left\{ \mid D(\vec{x}') \mid + \mid \vec{R}(\vec{x}') \mid \right\} < \infty$$

Problema

Demuestre que si

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid D(\vec{x}) \mid = 0$$

y

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{R}(\vec{x}) \mid = 0$$

entonces la representación de Helmholtz puede escribirse

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' D(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Solución

De la representación de Helmholtz

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \iiint_{R^3} d^3x' D(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \iiint_{R^3} d^3x' \vec{R}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \frac{D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \iiint_{R^3} d^3x' \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \frac{D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}' D(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \times \vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

En efecto

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid D(\vec{x}) \mid = 0 \to \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \frac{D(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = 0$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{R}(\vec{x}) \mid = 0 \to \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{R}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = 0$$

6.3. Apendice: Descomposición de Helmholtz en un volumen finito

Se demuestra que cualquier campo vectorial $\vec{A}(\vec{x})$ satisface idénticamente la siguiente relación

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)} \left(d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid^3} \right) \vec{A}(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)} \left(d\vec{S}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid^3} \right) \times \vec{A}(\vec{x}')$$

donde V es cualquier región cerrada, $\delta V = S(V)$ es su frontera, y $\vec{x} \in V$

Demostración

Tenemos

$$\iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -\iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \vec{\nabla} \cdot \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

con esto

$$\vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla} \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

y utilizando la identidad

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla}^2 \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \nabla \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - 4\pi \iiint_V d^3x' \vec{A}(\vec{x}') \delta(\vec{x}' - \vec{x}) + \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \frac{\vec{x}' - \vec{x}'}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid^3}$$

Luego si $\vec{x} \in V$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{A}(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Ahora bien

$$\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}=-\iiint_V d^3x'\vec{A}(\vec{x}')\times\vec{\nabla}\frac{1}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}=\iiint_V d^3x'\vec{A}(\vec{x}')\times\vec{\nabla}'\frac{1}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}=\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}-\iiint_V d^3x'\vec{\nabla}'\times\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}=\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}-\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}')\times\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

Luego

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}=\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}-\vec{\nabla}\times\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}')\times\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}=\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}+\oiint_{S(V)}\left(d\vec{S}(\vec{x}')\times\vec{A}(\vec{x}')\right)\times\vec{\nabla}\frac{1}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}=\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}+\oiint_{S(V)}\left(d\vec{S}(\vec{x}')\times\vec{A}(\vec{x}')\right)\times\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

Así

$$\vec{A}(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}+\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)}\left(d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\vec{A}(\vec{x}')\right)\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid^3}+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)}\left(d\vec{S}(\vec{x}')\times\vec{A}(\vec{x}')\right)\times\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid\vec{x}'-\vec{x}\mid^3}$$

Por otra parte

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}+\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}-\vec{C}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}+\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}-\left(\vec{C}\cdot\vec{B}\right)\vec{A}+\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}+\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)\vec{C}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}+\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}+\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{B}\times\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)+\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}+\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)\times\vec{B}+\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}$$

luego

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}+\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}+\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)\times\vec{B}$$

Finalmente

$$\vec{A}(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}+\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\iiint_V d^3x'\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{A}(\vec{x}')}{\mid\vec{x}-\vec{x}'\mid}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)}\left(d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid\vec{x}'-\vec{x}\mid^3}\right)\vec{A}(\vec{x}')+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)}\left(d\vec{S}(\vec{x}')\times\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid\vec{x}'-\vec{x}\mid^3}\right)\times\vec{A}(\vec{x}')$$

Vemos que $\vec{A}(\vec{x})$ está determinado por

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})=4\pi D(\vec{x})$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})=4\pi\vec{R}(\vec{x})$$

para $\vec{x}\in V$

$$\vec{A}(\vec{x})=\vec{A}_H(\vec{x})$$

para $\vec{x}\in S(V)$