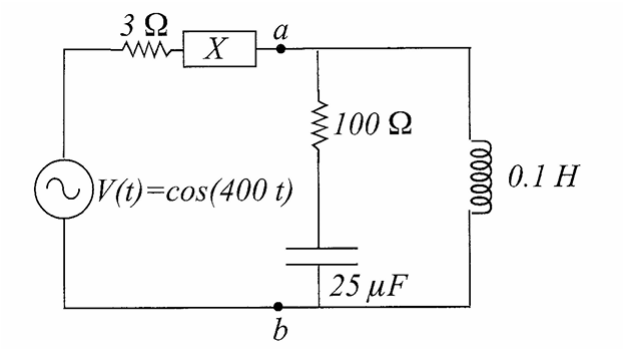
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 30

Problema 1

Considere el siguiente circuito:



a) Encuentre la impedancia equivalente a la derecha de los puntos a y b.

b) Determine el valor de X de modo que la fuente esté en fase con la corriente.

c) ¿Cómo tiene que ser la reactancia X: inductiva o capacitiva? Determine el valor de L o C según corresponda.

SOLUCION:

a) La impedancia, Z_1, de la rama $R - C$ está dada por

$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C}$$

Aquí $R = 100\Omega, C = 25\mu$ F y $\omega = 400$rads/seg. Entonces,

$$Z_1 = 100 - 100j$$

La impedancia, Z_2, de la rama de la inductancia está dada por

$$Z_2 = j\omega L$$

En este caso $\omega = 400$ rads/seg y $L = 0,1$H, de modo que, $Z_2 = 40j$. La impedancia equivalente vista desde $a - b, Z$, está dada por

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

i.e.,

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{100(1-j)40j}{100 - 60j} = \frac{200}{17}(1 + 4j)$$

b) Para que $v(t)$ esté en fase con la corriente es necesario que la impedancia total, vista desde la fuente, sea real. Ahora, la impedancia vista desde la fuente es:

$$Z' = 3 + X + Z = 3 + X + \frac{200}{17} + \frac{800j}{17}.$$

Para que Z' sea real es suficiente que $X = -800j/17$

c) El término

$$X = -\frac{800j}{17} = \frac{800}{17j} = \frac{1}{j\omega C'}$$

corresponde a una reactancia capacitiva. El valor de la capacidad C' es tal que

$$\omega C' = \frac{17}{800}$$

y, como $\omega = 400$ rads /seg

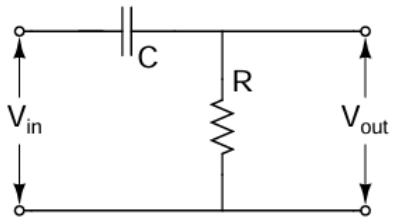
$$C' = \frac{17}{800 \times 400} = 53,1\mu \text{ F}$$

Problema 2

El circuito de la figura se denomina filtro RC pasa-altos porque transmite con mayor amplitud las señales de alta frecuencia que las de baja. Si la tensión de entrada es $V_{\text{in}} = V_0 \cos \omega t$, demostrar que la de salida es $V_{\text{out}} = V_R \cos(\omega t - \phi)$, donde

$$V_R = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

y estudie los casos en que $\omega \ll \frac{1}{RC}$, $\omega = \frac{1}{RC}$ y $\omega \gg \frac{1}{RC}$.



SOLUCION:

La impedancia equivalente está dada por:

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{j\phi}, \quad \phi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Luego, la corriente fasorial circulante por el circuito es:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{-j\phi}$$

Finalmente, V_{out} es el voltaje entre los extremos de la resistencia,

$$\hat{V}_{\text{out}} = \hat{I}R = \frac{RV_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{-j\phi} = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} e^{-j\phi}$$

Con esto,

$$V_{\text{out}}(t) = \text{Re}\left\{\hat{V}_{\text{out}}\, e^{j\omega t}\right\} = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Ahora estudiemos los casos pedidos:

- $\omega \ll \frac{1}{RC}$

$$\omega \ll \frac{1}{RC} \longrightarrow 1 \ll \frac{1}{\omega RC} \longrightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} \approx \frac{1}{\omega RC} = K$$

Luego,

$$V_{out}(t) \approx \frac{V_o}{K} \cos(\omega t - \phi)$$

y, como $K \gg 1$, el voltaje de salida se atenúa en gran cantidad. Por tanto, para bajas frecuencias, las señales se atenúan.

- $\omega = \frac{1}{RC}$

$$V_{\text{out}}\,(t) = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \phi)$$

lo que en Circuitos Eléctricos se conoce como frecuencia de corte del circuito.

- $\omega \gg \frac{1}{RC}$

$$\omega \gg \frac{1}{RC} \longrightarrow 1 \gg \frac{1}{\omega RC} \longrightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} \approx 1$$

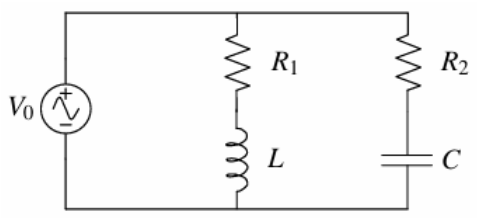
Luego,

$$V_{\text{out}}(t) \approx V_0 \cos(\omega t - \phi)$$

y el voltaje de salida preserva su amplitud. Por tanto, para altas frecuencias, las señales se transmiten.

Problema 3

Un circuito tiene 2 resistencias R_1 y R_2, un condensador C y una inductancia L dispuestas de la forma que se indica en la figura. El circuito es alimentado por una fuente de voltaje altero de ecuación $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Determine la impedancia equivalente del circuito y el módulo de la corriente en función del tiempo por cada rama del circuito.



SOLUCION:

La impedancia equivalente está dada por

$$Z_{eq} = \left(\frac{1}{R_1 + Z_L} + \frac{1}{R_2 + Z_C} \right)^{-1}$$

donde $Z_L = jX_L$ y $Z_C = -jX_C$, con $X_L = \omega L$ y $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Luego

$$\begin{aligned}
Z_{eq} &= \left(\frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} \right)^{-1} \\
&= \frac{(R_1 + jX_L)(R_2 - jX_C)}{(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)} \\
&= \frac{(R_1R_2 + X_LX_C) + j(X_LR_2 - X_CR_1)}{(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)} \\
&= \frac{[(R_1R_2 + X_LX_C) + j(X_LR_2 - X_CR_1)][(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)]}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \\
&= \frac{(R_1R_2 + X_LX_C)(R_1 + R_2) - (X_LR_2 - X_CR_1)(X_L - X_C)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \\
&+ j\frac{(R_1R_2 + X_LX_C)(X_L - X_C) + (X_LR_2 - X_CR_1)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2}
\end{aligned}$$

Los módulos de cada una de las corrientes vale

$$|I_1(t)| = \left| \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R_1 + j\omega L} \right| = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} \quad |I_2(t)| = \left| \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R_1 - j\frac{1}{\omega C}} \right| = \frac{V_0}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$