# Solución Ayudantía 5

26 de Agosto 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

## 1 Potencial Electrostático

### 1.1 Potencial Electrostático - Resultados de Aprendizaje

Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Determinar el potencial eléctrico generado por una distribución discreta de carga mediante su definición.
- ☐ Determinar el potencial eléctrico generado por una distribución continua de carga mediante su definición en coordenadas cartesianas.
- ☑ Determinar el potencial eléctrico generado por una distribución continua de carga mediante su definición en coordenadas cilíndricas.
- ☐ Determinar el potencial eléctrico generado por una distribución continua de carga mediante su definición en coordenadas esféricas.
- ☐ Determinar el potencial eléctrico generado por un cuerpo que cumple las condiciones de simetría de Ley de Gauss mediante la integral de línea.
- ☑ Aplicar el principio de superposición para potenciales eléctricos en un sistema compuesto por dos o más cuerpos.
- ☐ Evaluar el potencial eléctrico en un punto del espacio.
- ☐ Graficar la magnitud del potencial eléctrico en función del radio para alambres, cilindros y esferas.
- ☑ Conocer la unidad de medida para el potencial eléctrico.
- ☐ Aplicar la segunda ecuación de Maxwell y la ecuación de Poisson en diversos contextos.

## 1.2 Potencial Electrostático - Distribución Discreta de Carga

El potencial eléctrico generado por una carga puntual "$q$" puede ser expresado como:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{1}$$

Donde "$r$" es la distancia al punto deseado.

De esta manera,, y gracias al principio de superposición, para un sistema de "$N$" cargas puntuales el potencial eléctrico total sobre un punto en el espacio está dado por la suma de los potenciales eléctricos generados por cada una de estas cargas:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\,'|} \tag{2}$$

## 1.3 Potencial Electrostático - Distribución Continua de Carga

Para una distribución continua de carga, el potencial eléctrico está dado por:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'|}\,dq(\mathbf{x}\,') \tag{3}$$

Donde "$dq(\mathbf{x}\,')$" se refiere a la densidad de carga que posee el cuerpo, la cual puede ser:

| Densidad | Relación Diferencial | Integral Potencial Eléctrico |
|---|---|---|
| Lineal | $dq(\mathbf{x}\,') = \lambda(\mathbf{x}\,')\,dl'$ | $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{1}{\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'\rvert}\,\lambda(\mathbf{x}\,')\,dl'$ |
| Superficial | $dq(\mathbf{x}\,') = \sigma(\mathbf{x}\,')\,ds'$ | $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{1}{\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'\rvert}\,\sigma(\mathbf{x}\,')\,ds'$ |
| Volumétrica | $dq(\mathbf{x}\,') = \rho(\mathbf{x}\,')\,dv'$ | $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{1}{\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'\rvert}\,\rho(\mathbf{x}\,')\,dv'$ |

## 1.4 Potencial Electrostático - Cómo Utilizarlo Correctamente I

Los pasos a seguir para aplicar el potencial eléctrico por definición en distribuciones continuas y discretas de carga son idénticos al de campo eléctrico. Por ello, se recomienda repasar la Sección ?? y ??.

## 1.5 Potencial Electrostático - Otras Expresiones

Gracias al teorema de Stokes, se puede obtener la segunda ecuación de Maxwell:

$$\oint \mathbf{E}\cdot\vec{dl} = 0 \;\rightarrow\; \nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{4}$$

Ahora, y como la integral de línea es independiente del camino de integración, el potencial eléctrico se puede escribir como:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \;\rightarrow\; V(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}_a) = -\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b}\mathbf{E}\cdot\vec{dl} \tag{5}$$

Esta última expresión es más fácil de resolver que la dada por definición, por lo que hay que tenerla siempre en mente a la hora de enfrentar un ejercicio. En caso de presentarse más de un valor de campo eléctrico, se deberá separar la integral en varias partes y con sus respectivos límites. Asimismo, el "Volt" es la unidad de medida para el potencial:

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} \tag{6}$$

Finalmente, y mediante la primera ecuación de Maxwell y la relación de potencial, se puede obtener la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

En ausencia de cargas, esta expresión se transforma en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{8}$$

## 1.6 Potencial Electrostático - Cómo Utilizarlo Correctamente II

En primer lugar, estas expresiones se usarán generalmente en conjunto con la Ley de Gauss. De esta manera, los pasos serán los siguientes para determinar el potencial eléctrico:

1. Calcular el campo eléctrico generado por el cuerpo mediante Ley de Gauss, siempre y cuando se cumplan las condiciones de simetría.

2. Luego, utilizar la forma integral de la relación campo - potencial:

$$V(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}_a) = -\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{E} \cdot d\vec{l}$$

3. Ahora, nos podemos enfrentar a dos casos. El primero es que nos pidan un potencial con un límite bien "definido" o que no dependa de algo variable. Así, solo necesitaríamos el campo entre esos límites:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \mathbf{E}_{a<r<b} \cdot d\vec{l}$$

4. El otro caso es que nos pidan un potencial con un límite que dependa de alguna variable, generalmente del radio "r". Luego, necesitaríamos el campo que va desde "r" hasta el infinito para formar la integral del potencial:

$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r \mathbf{E} \cdot d\vec{l}$$

Se debe considerar que el usar $V(\infty)$ es algo nada más estratégico, pues generalmente este poseerá un valor nulo. La idea es que el segundo término sea algo fácil de manipular, por lo que conviene que sea una constante o 0. Además, se deberá separar la integral si es que observamos distintos campos en los intervalos respectivos.

5. Por último, si un cuerpo se conecta a "tierra" su potencial será nulo. Asimismo, el que dos cuerpos estén unidos mediante un cable significará que su potencial será idéntico y que se repartirán las cargas entre ellos según el principio de conservación de carga.

### 1.6.1 "Problemas Resueltos de Electromagnetismo", 2.4, Rodrigo Chi

Una densidad de carga lineal $\lambda$ está repartida de forma homogénea a lo largo de un semicircunferencia $BD$ centrada en $C$ y de radio $R$. Una carga puntual $q$ está ubicada en punto $A$ como se indica en la Figura ($|\overrightarrow{CA}| = R$).

a) Calcule el potencial eléctrico en el punto $C$.

b) Por argumentos de simetría, determine la dirección del campo eléctrico en el punto $C$.

c) Calcule el campo eléctrico en el punto $C$.

d) Determine la relación entre $\lambda$ y $q$ tal que el campo eléctrico en el punto $C$ sea igual a 0.

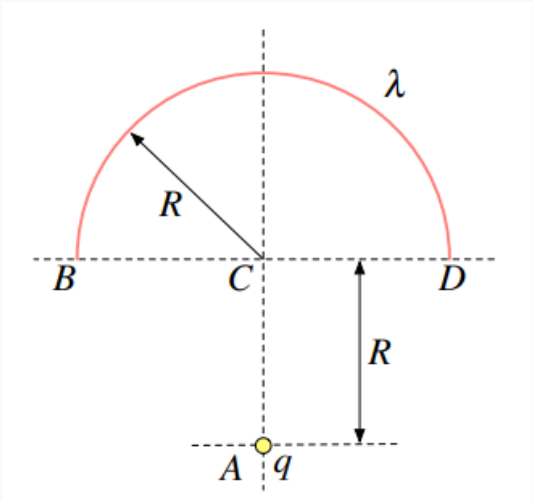



Figura 1. Esquema sobre la carga lineal y la semicircunferencia.

## Solución a)

### Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el potencial eléctrico en el punto $C$, el cual puede ser expresado como la suma de los potenciales generados por la carga puntual y la semicircunferencia. Como las figuras no poseen ninguna simetría apta para la Ley de Gauss, se aplicará la definición de potencial eléctrico para distribuciones discretas y continuas de carga:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'|}\,\lambda(\mathbf{x}\,')\,dl'$$

Se nota que se usa la integral simple en virtud de la naturaleza del problema, puesto que la semicircunferencia se puede describir con solo una componente variable en coordenadas cilíndricas.

## Solución b) y c)

### Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el campo eléctrico en el punto $C$, el cual puede ser expresado como la suma de los campos generados por la carga puntual y la semicircunferencia. Como la figura no posee ninguna simetría apta para la Ley de Gauss, se aplicará la definición de campo eléctrico para distribuciones discretas y continuas de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'|^3}\,\lambda(\mathbf{x}\,')\,dl'$$

Se nota que se usa la integral simple en virtud de la naturaleza del problema, puesto que la semicircunferencia se puede describir con solo una componente variable en coordenadas cilíndricas.

## Solución d)

### Paso Único: Condición y Relación

Por último, se impone la condición propuesta para que el campo eléctrico en el punto $C$ sea cero:

$$\mathbf{E}(C) = 0$$

# 2 Trabajo y Energía en Electrostática

## 2.1 Trabajo y Energía en Electrostática - Resultados de Aprendizaje

Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Determinar el trabajo necesario para mover una carga en presencia de un campo eléctrico.
- ☐ Determinar la energía potencial almacenada por una distribución discreta de carga.
- ☑ Determinar la energía potencial almacenada por una distribución continua de carga.
- ☑ Aplicar el principio de conservación de energía según el contexto.

## 2.2 Trabajo y Energía en Electrostática - Generalidades

En primer lugar, el trabajo necesario para mover una carga "$q$" desde el punto "$x_1$" hasta el punto "$x_2$" en contra de un campo eléctrico "$\mathbf{E}(\mathbf{x})$" estará dado por:

$$W = -\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} q\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = q(V_2 - V_1) \tag{9}$$

Suponiendo que el potencial en el infinito es cero, el trabajo necesario para traer una carga desde el infinito hasta un punto "$x$" es entonces:

$$W = qV(\mathbf{x}) \tag{10}$$

De esta manera, la energía potencial almacenada en un sistema compuesto por "$N$" cargas puntuales se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{11}$$

Donde "$V(\mathbf{x}_i)$" es el potencial en la posición de la carga "$i$" debido a las demás cargas. Análogamente, para una distribución continua de carga se tiene que:

### 2.2.1 "Ejercicios Teoría Electromagnética ", 5.6.9, Fabián Cádiz

Un alambre cuya densidad lineal de carga es $\lambda$ se extiende en el eje $z$ desde $z = -d$ hasta $z = d$. Despreciando efectos gravitacionales:

a) Calcule el potencial en un punto $z > d$ sobre el eje del alambre.

b) ¿Cuál es el cambio de energía potencial de un electrón si se mueve de $z = 4d$ hasta $z = 3d$?

c) Si el electrón parte del reposo desde $z = 4d$, ¿cuál es la velocidad en $z = 3d$?

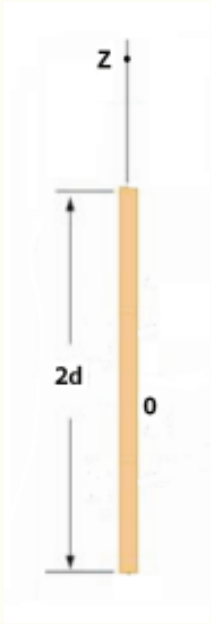



Figura 2. Esquema sobre el alambre.

## Solución a)

### Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el potencial eléctrico en un punto $z > d$ sobre el eje del alambre. Como la figura no posen ninguna simetría apta para la Ley de Gauss, se aplicará la definición de potencial eléctrico para distribuciones continuas de carga:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, \lambda(\mathbf{x}') \, dl'$$

Se nota que se usa la integral simple en virtud de la naturaleza del problema, puesto que el alambre se puede describir con solo una componente variable en coordenadas cartesianas.

### Solución b)

**Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?**

Se pide determinar el cambio de energía potencial $\Delta U$ de un electrón que se mueve desde $z = 4d$ hasta $z = 3d$. La energía potencial que posee una carga puntual se puede escribir como:

$$U = qV(\mathbf{x})$$

Se conoce el potencial que afecta a la carga,
por lo que solo queda reemplazar por los valores requeridos.

### Solución c)

**Paso Único: Velocidad Electrón -** $v(z = 3d)$

Se pide determinar la velocidad del electrón en $z = 3d$ si parte del reposo en $z = 4d$. Mediante el principio de conservación de energía se tiene que:

$$E(z = 3d) = E_(z = 4d)$$

## 2.2.2 "Problemas de Electromagnetismo", 1.4.5, Sebastián Urrutia

Una esfera de radio $R$ posee una densidad de carga radial $\rho(r) = kr$, con $k$ una constante. Encuentra la energía potencial de esta configuración.

### Solución

**Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?**

Se pide determinar la energía potencial almacenada de una distribución continua de carga:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, d\tau$$

Como se está hablando de una esfera, es posible aplicar Ley de Gauss utilizando una esfera concéntrica de radio "$r$" arbitrario:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La densidad de carga de la esfera no es uniforme,
por lo que se tendrá que utilizar la definición de carga:

$$Q = \iiint_V \rho \, dV$$

Además, y como se presentan "cortes visuales" relacionados con un cambio
en la densidad de carga, se debe trabajar por intervalos: $r < R$, y $r > R$.