Electricidad y Magnetismo

Compilado de problemas resueltos

Sebastián Urrutia Quiroga
sgurruti@uc.cl
www.sgurruti.cl

Tercera Edición – Junio de 2017

Disponible en línea: http://www.sgurruti.cl/

Sebastián Urrutia Quiroga
Contacto: sgurruti at uc.cl

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

Prohibida su Comercialización

Índice

1. Electrostática **1**

1.1. Integrales de Coulomb: fuerza y campo eléctrico 1

1.2. Ley de Gauss para el campo eléctrico 8

1.3. Potencial eléctrico 17

1.4. Energía potencial electrostática 29

1.5. Conductores y capacitancias 34

2. Electricidad en medios materiales **47**

2.1. Ecuaciones de Laplace y Poisson 47

2.2. Dieléctricos 53

2.3. Corriente eléctrica y ley de Ohm microscópica 64

2.4. Ley de Ohm macroscópica: circuitos fem/R 73

2.5. Circuitos RC 79

3. Magnetostática **89**

3.1. Fuerza de Lorentz y torque sobre una espira 89

3.2. Ley de Biot-Savart 101

3.3. Ley de Ampère 109

4. Campos variables en el tiempo **118**

4.1. Ley de inducción de Faraday-Lenz 118

4.2. Inductancia. Circuitos RL, LC y RLC 127

4.3. Corriente Alterna 136

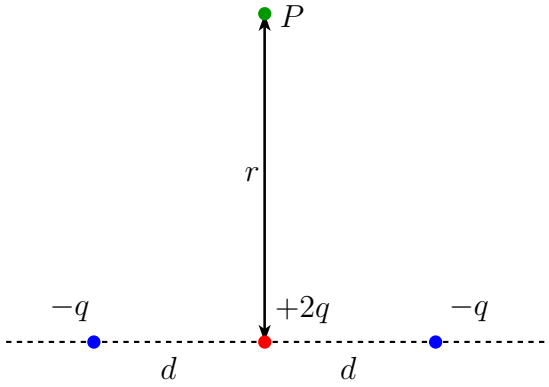
5. Ecuaciones de Maxwell **144**

5.1. Introducción a la teoría electromagnética 144

1. Electrostática

1.1. Integrales de Coulomb: fuerza y campo eléctrico

(1) Considere la distribución de cargas puntuales de la figura:



a) Calcule el campo eléctrico en P

b) Evalué el caso límite $r \gg d$, ¿cómo varía la magnitud del campo eléctrico con la distancia en este caso?

Solución:

a) El campo eléctrico en P puede ser obtenido utilizando el Principio de Superposición. El campo eléctrico producido por $+2q$ es simplemente:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Si hacemos $\vec{r} = r\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\vec{R} = -d\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$, entonces el campo producido por la carga de la derecha es:

$$\vec{E}_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}+d\,\hat{\boldsymbol{\imath}}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

De manera análoga, por simetría, el campo producido por la carga de la izquierda es:

$$\vec{E}_3 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}-d\,\hat{\boldsymbol{\imath}}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Así, el campo total $\vec{E}_P$ viene dado por:

$$\vec{E}_P = \sum_{j=1}^{3}\vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qr\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

b) Para analizar el límite $r \gg d$, reescribimos el campo de la siguiente manera:

$$\vec{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\left(1+\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)^{-3/2}}{r^2}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Ahora, utilizando la expansión de Taylor a primer orden

$$\left(1+\varepsilon\right)^n \approx 1 + n\varepsilon\ , \quad \varepsilon \ll 1$$

se tiene que:

$$\left(1+\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{d^2}{r^2}$$

Entonces,

$$\vec{E}_P \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{2r^2}\frac{d^2}{r^2}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

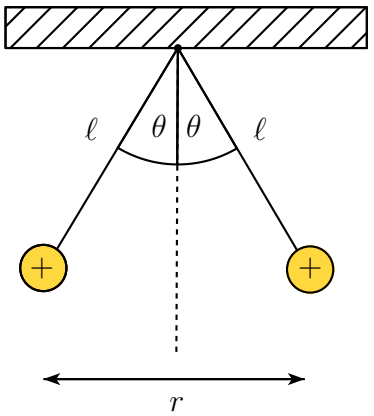
y por tanto:

$$\vec{E}_P{}^{(r\gg d)} = \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Notar que, para grandes distancias ($r \gg d$), esta distribución de carga genera un campo que decae como $\frac{1}{r^4}$, lo que contrasta con el campo de una carga puntual que decae según $\frac{1}{r^2}$.

■

(2) Dos pequeñas esferas conductoras, de igual masa m y carga $q > 0$, cuelgan por dos hilos no conductores sin masa y de largo ℓ. Cada esfera forma un ángulo θ con el eje vertical, como se muestra en la figura.



a) Calcule el valor de la carga q para el equilibrio estático del problema.

b) Suponiendo que las esferas pierden carga a razón $\lambda > 0$ C/s, ¿con qué velocidad angular se acerca una a la otra, para $\theta \ll 1$?

Solución:

a) Debido a la simetría del sistema, bastará con hacer análisis de fuerzas para una de las cargas. Consideramos el equilibrio entre las tres fuerzas que actúan: la fuerza de repulsión electrostática F_e, la tensión sobre el hilo T, y la fuerza de gravedad mg:

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow \quad T\sin\theta - F_e = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \longrightarrow \quad T\cos\theta - mg = 0$$

La primera ecuación equivale a

$$T\sin\theta = k\frac{q^2}{r^2} \quad \longrightarrow \quad q^2 = \frac{r^2 T\sin\theta}{k} \quad \longrightarrow \quad q = \pm\, r\sqrt{\frac{T\sin\theta}{k}}$$

De la segunda ecuación,

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Por tanto, y como $r = 2\ell\sin\theta$,

$$q = 2\ell\sin\theta\sqrt{\frac{mg\tan\theta}{k}}$$

b) Para ángulos pequeños, $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$. Del enunciado, $\dot{q} = -\lambda$ pues pierde carga. Así,

$$q = \alpha\theta^{3/2}\ , \quad \alpha = 2\ell\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\alpha\theta^{3/2}\Big)\frac{d\theta}{dt} = \frac{3\alpha}{2}\sqrt{\theta}\dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{2\lambda}{3\alpha\sqrt{\theta}}$$

Finalmente, la velocidad angular de la esfera a la izquierda será:

$$\vec{\omega}_1 = -\,\dot{\theta}\ \hat{\boldsymbol{k}}$$

Y la de la esfera derecha:

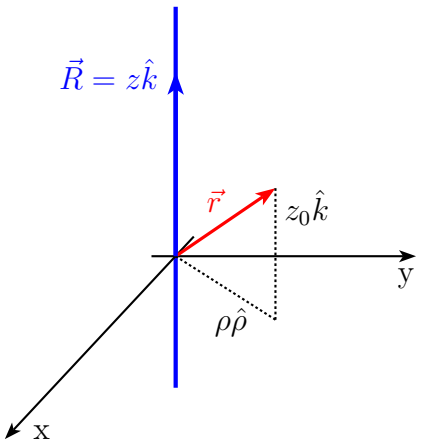
$$\vec{\omega}_2 = +\,\dot{\theta}\ \hat{\boldsymbol{k}} = -\vec{\omega}_1$$

■

(3) Determine el campo eléctrico generado por un alambre infinito con densidad de carga uniforme, localizado en el eje z.

Solución:

Consideremos la siguiente situación, en donde λ representa la densidad lineal de carga:



en donde

$$\vec{R} = z\,\hat{\boldsymbol{k}},\ -\infty < z < \infty \quad \longrightarrow \quad dR = dz$$

$$\vec{r} = z_0\,\hat{\boldsymbol{k}} + \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\vec{r} - \vec{R} = (z_0 - z)\,\hat{\boldsymbol{k}} + \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \therefore\ \|\vec{r} - \vec{R}\| = \left[(z_0 - z)^2 + \rho^2\right]^{1/2}$$

Así,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(z_0 - z)}{\left[(z_0 - z)^2 + \rho^2\right]^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{k}} + \frac{\rho}{\left[(z_0 - z)^2 + \rho^2\right]^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)dz \\ &= E_z\,\hat{\boldsymbol{k}} + E_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z_0 - z)}{[(z_0 - z)^2 + \rho^2]^{3/2}}\,dz \qquad u = z_0 - z \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\ du}{[u^2 + \rho^2]^{3/2}} \qquad \text{(la función es impar)} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_\rho &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho}{[(z_0 - z)^2 + \rho^2]^{3/2}}\,dz \qquad u = z - z_0 \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\ du}{[u^2 + \rho^2]^{3/2}} \qquad u = \rho\tan\theta,\ du = \rho\sec^2\theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^2\sec^2\theta\ d\theta}{[\rho^2(1 + \tan^2\theta)]^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^2\sec^2\theta\ d\theta}{\sec^3\theta} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\ d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\rho}\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\rho}$$

■

(4) Encuentre el campo eléctrico a una distancia z sobre el centro de un disco circular plano de radio R, el cual posee una densidad de carga superficial σ constante. ¿Qué pasa con su fórmula en el caso en que $R \to \infty$? Revise también el caso en que $z \gg R$.

Solución:

Sean: $\vec{r} = z\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\quad \vec{R} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Así,

$$\begin{array}{ll} (*) & \vec{r} - \vec{R} = z\,\hat{\boldsymbol{k}} - \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ (*) & \|\vec{r} - \vec{R}\| = \sqrt{z^2 + \rho^2} \\ (*) & dS = \rho\, d\rho\, d\theta \end{array}$$

Así,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint \sigma \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}\, dS \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{z\,\hat{\boldsymbol{k}} - \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\, \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \vec{E}_z + \vec{E}_\rho \end{aligned}$$

Ya sea mediante el cálculo explícito de la integral, o por argumentos de simetría del problema, se concluye que:

$$\vec{E}_\rho \equiv \vec{0}$$

Por otra parte, dado que el vector unitario en la dirección Z es constante, puede salir de la integral: $\vec{E}_z = E_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$, donde

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} d\rho \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

Notemos que, si $R \to \infty$, entonces el disco cubrirá todo el plano; por esta razón, el campo eléctrico de un plano infinito con carga superficial constante es:

$$E_{plano} = \lim_{R\to\infty} E(z) = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

y en constante, con signo dependiente de si estamos sobre (+) o bajo (−) el plano.

Para $z \gg R > 0$, entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)$$

Con ello,

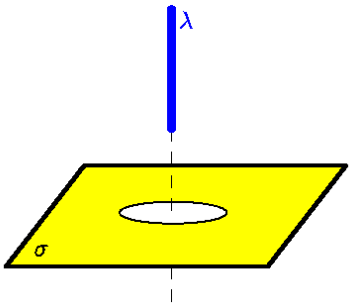
$$E_{z\gg R} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{2z^3} = \frac{\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}$$

con $Q = \sigma\pi R^2$ la carga total del disco. ■

(5) Considere un plano infinito de densidad de carga uniforme σ, con un orificio circular de radio R:

a) Obtenga el campo eléctrico sobre un punto arbitrario del eje –perpendicular al plano– que pasa por el centro del orificio.

b) Suponga que ahora, a lo largo de este eje, se ubica un hilo no conductor de largo ℓ con densidad de carga lineal uniforme λ desde $z = 0$ hasta $z = \ell$, con z es la distancia perpendicular al plano. Encuentre la fuerza eléctrica entre ambos objetos.



Solución:

a) Para resolver este problema, usamos el Principio de Superposición: *el campo eléctrico de la figura corresponde a la suma de los campos producidos por un plano infinito (con densidad de carga σ) y un disco de radio R (con densidad de carga $-\sigma$).* Supongamos que el plano agujereado se encuentra en el XY; así, el problema consiste en obtener el campo sobre un punto del eje z. Del problema anterior, estos campos son conocidos, por lo que:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{disco} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{\boldsymbol{k}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\hat{\boldsymbol{k}}$$

b) Por la tercera Tercera Ley de Newton, podemos calcular la fuerza entre ambos elementos como la fuerza ejercida por el plano agujereado sobre la barra. El elemento de fuerza eléctrica que el plano ejerce sobre un elemento $dq = \lambda\, dz$ del alambre es:

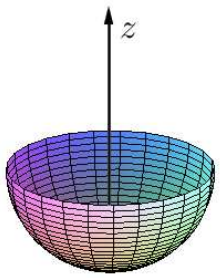
$$d\vec{F} = \vec{E}(z)\, dq = \lambda\vec{E}(z)\, dz = \frac{\sigma\lambda}{2\epsilon_0}\frac{z\, dz}{\sqrt{z^2+R^2}}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Por tanto, la fuerza sobre el hilo completo es:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_0^{\ell} d\vec{F} \\ &= \frac{\sigma\lambda}{2\epsilon_0}\left(\int_0^{\ell} \frac{z\, dz}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= \frac{\sigma\lambda}{2\epsilon_0}\sqrt{z^2+R^2}\Big|_0^{\ell}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= \frac{\sigma\lambda}{2\epsilon_0}\Big(\sqrt{\ell^2+R^2}-R\Big)\,\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

■

(6) Un recipiente hemisférico no conductor, de radio interior a, tiene una carga total Q repartida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico en el centro de curvatura.



Solución:

Tomamos como origen el centro de curvatura de la semiesfera. A partir de esto, podemos determinar la contribución de un elemento diferencial de carga en la superficie al campo eléctrico en el eje que pasa por el centro de curvatura, que coincide con la dirección $\hat{\boldsymbol{k}}$ (El campo $\vec{E}$, por simetría, solo tendrá componente en $\hat{\boldsymbol{k}}$).

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3}\sigma dS$$

Un elemento diferencial de superficie sobre la esfera está dado por

$$dS = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

y, como la carga está uniformemente distribuida, la densidad superficial es simplemente

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Con esto, podemos determinar el campo total integrando sobre toda la superficie:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta \frac{Q}{2\pi a^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3}\, d\theta\, d\phi$$

Evaluando en $\vec{r} = \vec{0}$ obtenemos el campo en el centro de curvatura:

$$\vec{E}_C = -\frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|^3}\, d\theta\, d\phi$$

Si tomamos $\vec{R} = a\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = a\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} + a\sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + a\sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, entonces $|\vec{R}| = a$. Por el argumento de simetría, solo interesa la componente según $\hat{\boldsymbol{k}}$. De todas formas, se puede verificar calculando explícitamente las integrales en $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Con esto,

$$E_C = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2\theta\, d\theta}_{=-1} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

Finalmente,

$$\vec{E}_C = E_C\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

■

1.2. Ley de Gauss para el campo eléctrico

(1) Considerando la ley de Gauss,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\hat{n}\; dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

con q la carga encerrada por la superficie $\mathcal{S}$, determine el campo eléctrico $\vec{E}$ de una esfera cargada uniformemente, de carga Q y radio a.

Solución:

Primero que todo, calculemos la densidad volumétrica de carga para la esfera:

$$\rho(r) = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

Por simetría, proponemos que $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$. Como superficies gaussianas, tomaremos esferas de radio r con normal exterior $\hat{n} = \hat{r}$. Así,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\hat{n}\; dS = \iint_{\mathcal{S}} E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}\; dS = E(r)\; A(\mathcal{S}) = 4\pi r^2\; E(r) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Para calcular la carga encerrada, distinguimos dos casos:

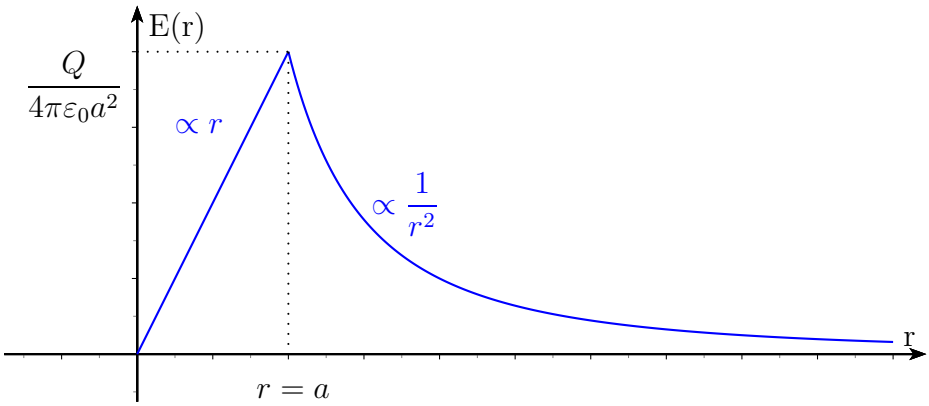
- $\boxed{r > a}$

$$q_{enc} = Q \quad\longrightarrow\quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

- $\boxed{r < a}$

$$q_{enc} = \rho(r) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{a}\right)^3 \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, a^3}\, r$$

Notar que es continua en $r = a$. Así, el campo eléctrico tiene la siguiente forma:

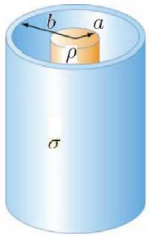


con:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q\, r}{4\pi\epsilon_0 a^3}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{, si } r < a \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{, si } r \geq a \end{cases}$$

[**Propuesto**] Compare este resultado con el cálculo hecho mediante integrales de Coulomb. ■

(2) Considere un cable coaxial muy largo, compuesto por un cilindro sólido interior –de radio a– que lleva una densidad de carga volumétrica ρ (constante), y por un cilindro exterior hueco –de radio $b > a$– que lleva una densidad de carga superficial σ; esta densidad es tal que hace al cable eléctricamente neutro. Encuentre el campo eléctrico producido por el cable en todo el espacio.



Solución:

Establecemos un sistema de coordenadas cilíndricas en el centro del cable. Distinguimos tres regiones:

(I) $r > b$ (II) $a < r < b$ (III) $0 \leq r < a$

Por simetría, el campo (de existir) debe ser radial, y su magnitud únicamente función del radio (pues el cable posee una simetría azimutal, i.e. es invariante ante una rotación del ángulo polar).

- $\boxed{r > b}$

Dada la simetría, usaremos como superficie gaussiana un cilindro de radio $r < b$ y altura h. Luego,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_{Manto} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS + \iint_{Tapas} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS$$

Para el manto, $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\vec{E} = E(r)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$; de esta forma:

$$\iint_{Manto} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = E(r) \iint_{Manto} dS = 2\pi r h E(r)$$

Por otro lado, para las tapas, $\hat{n} = \pm\,\hat{\boldsymbol{k}}$. De esta forma, $\vec{E} \perp \hat{n}$ y por tanto:

$$\iint_{Tapas} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

Con esto,

$$\Phi_e = E(r) 2\pi r h$$

pero como el cable es neutro, $q_{enc} = 0$. Luego,

$$E(r)2\pi r h = 0 \quad \longrightarrow \quad E(r) = 0$$

$$\boxed{\text{Notar que:} \quad q_{enc} = \pi a^2 h\rho + \sigma 2\pi b h = 0 \;\longrightarrow\; \sigma = -\frac{\rho a^2}{2b}}$$

- $\boxed{a < r < b}$

Nuevamente utilizaremos como superficie gaussiana un cilindro de radio r y altura h. Por los mismos argumentos anteriores, la integral de flujo eléctrico se reduce a:

$$\Phi_e = E(r) 2\pi r h$$

La carga encerrada en este caso corresponde $q_{enc} = \rho V_a$, con $V_a = \pi a^2 h$ el volumen del cilindro sólido interior. Así,

$$E(r)2\pi r h = \rho \frac{\pi a^2 h}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r}$$

- $\boxed{0 \leq r < a}$

Escogemos la misma superficie gaussiana. Los mismos argumentos de simetría son válidos en esta región, y por tanto:

$$\Phi_e = E(r) 2\pi r h\ , \quad q_{enc} = \rho \pi r^2 h$$

Entonces,

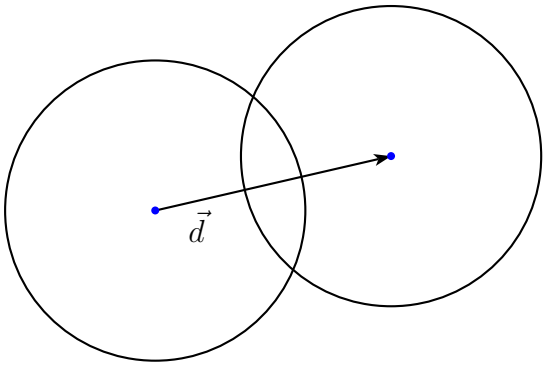
$$E(r)2\pi rh = \rho\frac{\pi r^2 h}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

En resumen (notando que existe una discontinuidad en el campo al atravesar la superficie cargada $r = b$),

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & , \text{si } 0 \leq r < a \\ \dfrac{a^2\rho}{2\epsilon_0 r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & , \text{si } a < r < b \\ \vec{0} & , \text{si } b < r \end{cases}$$

■

(3) Considere dos esferas no concéntricas de radio R. La primera de ellas lleva una densidad volumétrica de carga ρ y la segunda $-\rho$. Los centros de las esferas están a distancia $d < 2R$. Si $\vec{d}$ es el vector que va del centro de la esfera positiva al centro de la negativa, demuestre que el campo eléctrico en la intersección de las esferas es constante, y encuentre su valor.

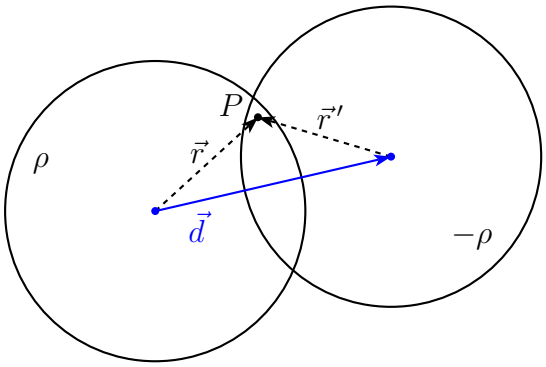


Solución:

Este problema se resuelve con superposición, recordando antes la fórmula del campo eléctrico generado por una distribución homogénea y esférica de carga (resuelto anteriormente):

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q\,r}{4\pi\epsilon_0 a^3}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & , \text{si } r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & , \text{si } r \geq a \end{cases}$$

donde r es la distancia al centro de la distribución. Ahora, sea P un punto arbitrario dentro de la región de intersección:



El campo en P producido por la distribución de carga positiva es

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,\vec{r}$$

y el de la distribución negativa viene dada por

$$\vec{E}_2 = \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\,\vec{r}\,'$$

Así, por el principio de superposición, el campo eléctrico en P está dado por

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,\vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,\vec{r}\,'$$

Pero $\vec{d} + \vec{r}\,' = \vec{r}$, de forma que $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{d}$:

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,\vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\vec{r} - \vec{d}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,\vec{d}$$

El punto P fue escogido arbitrariamente; luego, para todo $\vec{x}$ dentro de la intersección, el campo es uniforme y está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,\vec{d}$$

Notar que el campo es paralelo a la dirección que une ambos centros

■

(4) Considere la siguiente distribución volumétrica de carga en coordenadas esféricas

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}\,, \quad a \leq r \leq b$$

Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

Solución:

Dado que no existe dirección privilegiada para la densidad de carga, el problema presenta simetría esférica. Por esta razón, es posible argumentar que el campo en cuestión posee la forma $\vec{E} = E(r)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Ahora, nuestro problema separa al espacio en tres regiones:

- $\boxed{r < a}$

  Si empleamos una esfera de radio r como superficie gaussiana, entonces la ley de Gauss nos señala que

$$\iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = E(r)\mathcal{A}(S) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(r) \equiv 0$$

  pues no hay carga en dicha zona del espacio.

- $\boxed{r > b}$

  El cálculo anteriormente realizado sigue siendo válido en esta región, y por ello:

$$E(r) = \frac{q_{enc}}{\mathcal{A}(S)\epsilon_0}$$

  Así, como $\mathcal{A}(S) = 4\pi r^2$, nos basta hallar la carga encerrada en este caso:

$$\begin{aligned} q_{enc} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho(r) r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta \\ &= 4\pi \int_a^b \frac{k}{r^2} r^2\, dr \\ &= 4\pi k(b-a) \end{aligned}$$

  Por tanto,

$$E(r) = \frac{4\pi k(b-a)}{\epsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2}$$

- $\boxed{a < r < b}$

  En este caso, la carga encerrada por la superficie gaussiana –esfera de radio r– es

$$\begin{aligned} q_{enc} &= 4\pi \int_a^r \frac{k}{\tilde{r}^2}\tilde{r}^2\, d\tilde{r} \\ &= 4\pi k(r-a) \end{aligned}$$

  De esta forma,

$$E(r) = \frac{4\pi k(r-a)}{\epsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r^2}$$

■

(5) *a*) Determine la forma diferencial de la ley de Gauss. ¿Qué hipótesis debe adicionar?

b) Una distribución de carga eléctrica produce un campo

$$\vec{E} = c\Big(1 - e^{-\alpha r}\Big)\frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{r^2}$$

en donde c, α son constantes, y r es la distancia al origen. Encuentre la densidad volumétrica de carga de la distribución, así como también la carga encerrada dentro de una esfera de radio $r = 1/\alpha$.

Solución:

a) Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema de la divergencia (lo cual es razonable para los problemas físicos de la mayoría de los casos), y por ello:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS &= \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \\ \iiint_V \nabla \cdot \vec{E}\, dV &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho\, dV \\ 0 &= \iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV \end{aligned}$$

Como lo anterior fue realizado para un volumen arbitrario, y dado que las funciones son continuas, entonces se infiere que el integrando debe ser nulo para la que igualdad sea válida para cualquier volumen. Así,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que el la forma diferencial de la ley de Gauss.

b) Para obtener la densidad volumétrica de carga a partir de un campo, aplicamos la ley de Gauss en su forma diferencial. Dado que trabajamos en coordenadas esféricas, la divergencia es:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 F_r \Big) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta F_\theta \Big) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

En este caso, $E_\phi = E_\theta = 0$, y por tanto:

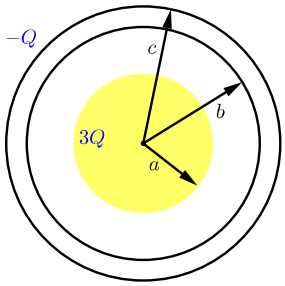
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{c\alpha e^{-\alpha r}}{r^2} \quad \longrightarrow \quad \rho(r) = \frac{\epsilon_0 c \alpha e^{-\alpha r}}{r^2}$$

Ahora, la carga encerrada viene dada únicamente por:

$$Q = 4\pi \int_0^{1/\alpha} \rho(r) r^2\, dr = 4\pi\epsilon_0 c \Big(1 - e^{-1} \Big)$$

■

(6) Considere una esfera aislante de radio a cargada eléctricamente con carga $3Q$ y, concéntrico a ella, un cascarón esférico conductor, de radio interior b y exterior c, cargado con carga $-Q$ (*ver figura*). Encuentre el campo eléctrico para $a < r$, siendo r la distancia al centro de la esfera. Encuentre las densidades de carga interior y exterior en el cascarón conductor.



Solución:

Para calcular el campo usamos la ley de Gauss en coordenadas esféricas. Para $a < r$ usamos superficies gaussiana esféricas concéntricas de radio r dependiendo de la región de interés. En todos los casos el campo es, por los mismos argumentos de simetría,

$$E(r) = \frac{q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Veamos cada región del espacio:

- $\boxed{a < r < b}$

  En este caso el radio r de la superficie gaussiana es tal que la carga encerrada corresponde a la almacenada en la esfera de radio a, $q_{enc} = 3Q$. Así,

  $$E(r) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- $\boxed{b < r < c}$

  En este caso el campo eléctrico es nulo, por ser una región dentro de un conductor.

  $$E(r) = 0$$

- $\boxed{c < r}$

  En este caso, el radio de la superficie gaussiana permite que esta encierre tanto la esfera como al cascarón. Por ende, la carga encerrada es $q_{enc} = 3Q + (-Q) = 2Q$. El campo es, entonces,

  $$E(r) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

$\boxed{\text{Notar que en } r = b, c \text{ el campo es discontinuo}}$

Para obtener las densidades de carga en las superficies interior ($r = b$) y exterior ($r = c$) del cascarón conductor, usamos el hecho de que dentro del conductor ($b < r < c$) el campo es nulo, por lo que el flujo a través de una superficie gaussiana S esférica concéntrica de radio r entre b y c también se anula,

$$\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

Pero, si el flujo se anula, necesariamente la carga encerrada dentro de esta superficie debe anularse. Esto solo es posible si se inducen cargas en la superficie interior del cascarón, tal que $3Q + Q_b = 0$. Luego, $Q_b = -3Q$ y la densidad en la superficie interna del cascarón es:

$$\sigma_b = -\frac{3Q}{4\pi b^2}$$

Ahora, como la carga neta del cascarón conductor es $-Q$, necesariamente se debe inducir carga en la superficie exterior, tal que:

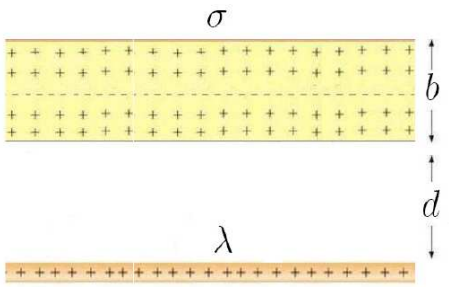
$$-Q = Q_b + Q_c = -3Q + Q_c$$

de donde $Q_c = 2Q$, y la densidad de carga en la superficie exterior queda dada por:

$$\sigma_c = \frac{2Q}{4\pi c^2} = \frac{Q}{2\pi c^2}$$

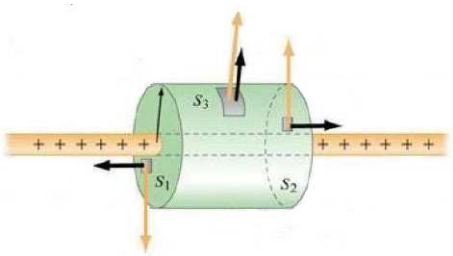
■

(7) Calcule la fuerza por unidad de largo que se ejercen una banda muy larga, de ancho b y densidad de carga σ, y un alambre igualmente largo, con densidad lineal de carga λ, puesto en el mismo plano que la banda a distancia d del borde inferior, como muestra la figura.



Solución:

Podemos optar por calcular la fuerza que ejerce la distribución lineal de carga sobre la distribución plana, o viceversa. Utilizaremos la primera opción, y para ello necesitamos obtener el campo eléctrico generado por la distribución lineal. Esto puede calcularse con ley de Gauss, considerando la simetría cilíndrica del campo eléctrico en presencia de una distribución lineal infinita de carga:



Si la superficie gaussiana es un cilindro de radio r y largo h, y utilizamos coordenadas cilíndricas, entonces:

$$\Phi_e = 2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Dada la simetría del problema, y sin pérdida de generalidad, supondremos que la banda se encuentre inmersa en el plano XY. Así, $dq = \sigma\, dx\, dy$. Calcularemos la fuerza que se ejerce sobre una porción de largo L de la distribución planar:

$$d\vec{F} = \vec{E}\, dq = \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\, dx\, dy\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

con $x \in [0, L]$, $y \in [d, d+b]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int_0^L dx \int_d^{d+b} \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\, dy\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
&= \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \int_d^{d+b} dy y\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \\
&= \frac{\sigma\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \hat{\boldsymbol{\jmath}}
\end{aligned}$$

y, finalmente, la fuerza por unidad de longitud es:

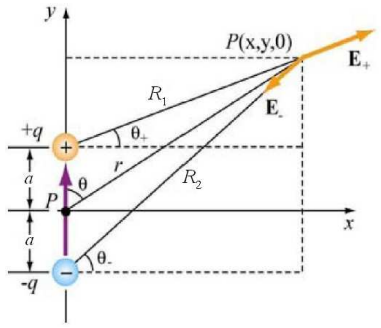
$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{L} = \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

■

1.3. Potencial eléctrico

(1) *a*) Calcule el potencial eléctrico en un punto P debido a un dipolo. Para ello, considere al dipolo en el eje vertical, como se muestra en la figura.

b) Determine la energía potencial de un dipolo embebido en un campo eléctrico externo.



Solución:

Antes que todo, algunas definiciones importantes:

(∗) Se define el **potencial electrostático** de una distribución continua de carga como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|}\, d^3R$$

(∗) La relación entre potencial y campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$$

(∗) Se define el **potencial electrostático** de una distribución discreta de carga como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

(∗) La interpretación física del potencial se asocia al trabajo realizado para mover una carga a través de un campo eléctrico:

$$W = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(\phi_2 - \phi_1)$$

a) Sea $d = 2a$. Por el principio de superposición,

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right)$$

Por el teorema del coseno,

$$\begin{array}{rcll} {R_1}^2 & = & r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta) & = & r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta) \\ {R_2}^2 & = & r^2 + a^2 - 2ar\cos(\pi - \theta) & = & r^2 + a^2 + 2ar\cos(\theta) \end{array}$$

Así,

$$R_1 = r\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta}$$

Desarrollando en series de Taylor, para $r \gg a$, tenemos que:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]$$

De manera análoga para R_2,

$$\frac{1}{R_2} \approx \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]$$

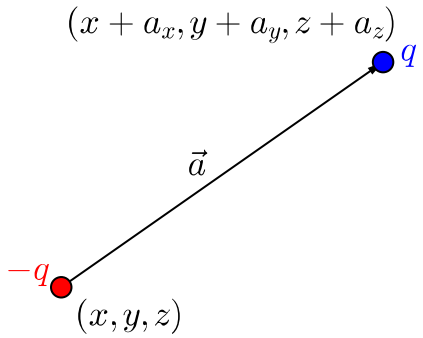
Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} \phi(P) & = & \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{2a}{r}\cos\theta\right) \\ & = & \dfrac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ & = & \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{array}$$

con $p = qd$ el momento de dipolo eléctrico. Finalmente,

$$\phi(P) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

b) Supongamos la siguiente situación:



La energía potencial asociada al dipolo será:

$$U = -q\phi(\vec{r}) + q\phi(\vec{r}+\vec{a})$$

Podemos desarrollar $\phi(\vec{r}+\vec{a})$ en serie de Taylor (hasta el primer orden):

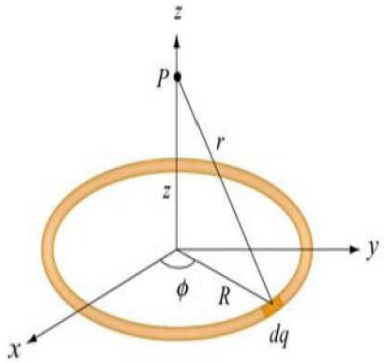
$$\phi(\vec{r}+\vec{a}) = \phi(\vec{r}) + \frac{\partial\phi}{\partial x}a_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}a_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}a_z = \phi(\vec{r}) + \nabla\phi(\vec{r})\cdot\vec{a}$$

Así,

$$U = q\vec{a}\cdot\nabla\phi(\vec{r}) = \vec{p}\cdot\nabla\phi(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

■

(2) Considere un anillo de radio R uniformemente cargado con densidad λ. ¿Cuál es el potencial electrostático a una distancia z sobre el eje del anillo? En seguida, calcule el potencial en el eje de un anillo de radio interior a, radio exterior b y densidad σ.



Solución:

Tomemos un elemento infinitesimal de longitud en el anillo $d\ell = R\,d\theta$, el cual posee un elemento de carga $dq = \lambda R\,d\theta$. Su contribución al potencial en P es:

$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\lambda\,d\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

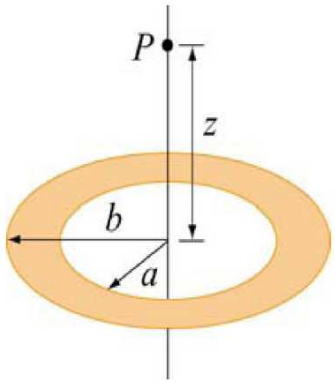
Luego, el potencial debido al anillo completo está dado por:

$$\phi(P) = \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi R\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

con Q la carga total del anillo. Es fácil ver que si $z \gg R$, se tiene el potencial de una carga puntual

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|z|}$$

Ahora, para obtener el potencial de un disco de radios a y b, simplemente se considera la superposición de anillos infinitesimales:



Tomamos un anillo de radio r y ancho infinitesimal dr. Sabemos que el potencial en el eje está dado por:

$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

donde $dQ = \sigma 2\pi r\,dr$ es la carga que contiene dicho anillo. Luego,

$$d\phi(P) = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Finalmente, el potencial es:

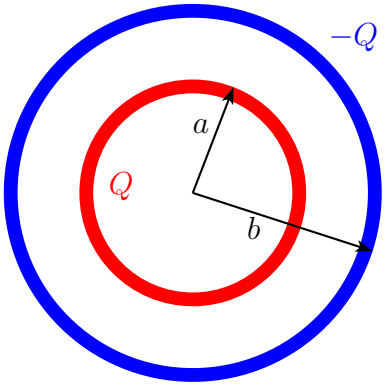
$$\phi(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)$$

■

(3) Considere dos cascarones esféricos de radios a y b ($a < b$). El cascarón interior tiene una carga homogéneamente distribuida Q, y el exterior $-Q$. Encuentre la diferencia de potencial entre ambos objetos.

Solución:

Consideremos el siguiente esquema:



El campo eléctrico en todo el espacio (de existir) es esféricamente simétrico. Lo mismo sucede con el potencial, que será constante en una superficie esférica. Lo que se pide es

$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Para evaluar la integral, claramente debemos encontrar el campo y elegir un camino desde a hasta b. Utilizamos una superficie gaussiana esférica de radio r, con $a < r < b$. Por ley de Gauss:

$$\iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Luego, en la región entre los dos cascarones,

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Dada la forma del campo, resulta inteligente elegir un camino radial:

$$\gamma : \ \vec{r} = r\, \hat{\boldsymbol{\rho}}\ , \quad a \leq r \leq b \quad \longrightarrow \quad d\vec{r} = dr\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Luego,

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

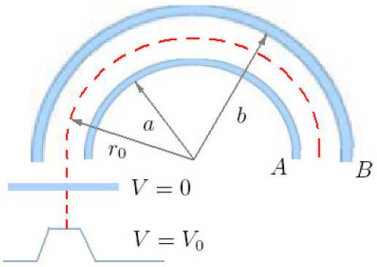
Entonces:

$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\bigg|_a^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Notar que $\phi(b) - \phi(a) < 0 \rightarrow \phi(b) < \phi(a)$, i.e. cuesta más trabajo llevar una carga hasta a que hasta b desde el infinito

■

(4) Iones de carga q son acelerados desde el reposo hasta una diferencial de potencial ΔV_0, para luego entrar a una región entre dos electrodos cilíndricos muy largos, A y B, de radios a y b respectivamente ($a < b$). El ion recorre media circunferencia de radio r_0 describiendo la trayectoria señalada con línea punteada. Despreciando los efectos de borde, y asumiendo que los cilindros son muy largos en comparación al espacio que los separa, encuentre la diferencia de potencial ΔV_{BA}.



Solución:

Primero, debemos encontrar la velocidad con la que los iones ingresan a la región entre los cilindros: Estos son acelerados a partir del reposo desde una región a potencial $\phi = V_0$ hasta otra región a potencial $\phi = 0$. La energía inicial está dada por

$$\mathcal{E}_i = qV_0$$

mientras que la energía final (justo antes de ingresar entre los electrodos) es

$$\mathcal{E}_f = \frac{mv^2}{2}$$

Así, por conservación de energía,

$$\Delta\mathcal{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad v^2 = \frac{2qV_0}{m}$$

Ahora, dentro de la región entre cilindros, existe un campo eléctrico radial que se puede obtener con la ley de Gauss: utilizando una superficie gaussiana cilíndrica de radio $r \in [a, b]$ y altura h, se tiene:

$$2\pi rhE(r) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

en donde la carga encerrada por la superficie es $q_{enc} = \sigma 2\pi ha$, donde σ es la densidad superficial de carga sobre el cilindro de radio a. De aquí,

$$2\pi rhE(r) = \frac{\sigma 2\pi ha}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

En particular,

$$\vec{E}(r_0) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r_0}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Este campo es el responsable de la fuerza que siente el ion (en dirección radial), y que permite su trayectoria. Por equilibrio de fuerzas,

$$q\vec{E}(r_0) = -m\frac{v^2}{r_0}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(el signo corresponde a la dirección de la fuerza centrípeta)}$$

Despejando,

$$\sigma = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{a}$$

y el campo eléctrico en el interior de los electrodos queda como

$$\vec{E}(r) = -\frac{2V_0}{r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Ahora, la diferencia de potencial entre cilindros es:

$$\Delta V = \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \left(-\frac{2V_0}{r}\right)\,dr = 2V_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

en donde hemos tomado un camino radial para realizar la integral de línea. ■

(5) Encuentre el potencial dentro y fuera de una esfera sólida cargada uniformemente, cuyo radio es R y su carga total es Q. Use el infinito como punto de referencia.

Solución:

Es fácil ver, por ley de Gauss, que el campo eléctrico en esta configuración (propuesto) viene dado por:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{, si } r \le R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{, si } r > R \end{cases}$$

- Potencial Exterior:
  Ahora, para obtener el potencial electrostático, calculamos la siguiente integral del línea:

$$\phi(r) - \phi(\infty) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

  Como usamos el infinito como referencia, $\phi(\infty) = 0$. Usando una trayectoria radial, $d\vec{r} = dr\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ y –para $r > R$–,

$$\phi(r) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Potencial Interior:
  Ahora, para $r < R$,

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= -\int_{\infty}^{R} E_{out}(r)\,dr - \int_{R}^{r} E_{in}(r)\,dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\int_{R}^{r} r\,dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \\
&= \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}
\end{aligned}$$

■

(6) Un alambre, cuya densidad lineal de carga es λ, se extiende en el eje z desde $z = -d$ hasta $z = d$.

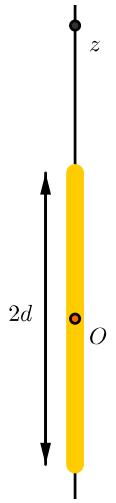
a) Calcule el potencial en un punto $z > d$ sobre el eje del alambre.

b) ¿Cuál es el cambio de energía potencial de un electrón si se mueve de $z = 4d$ hasta $z = 3d$?

c) Si el electrón parte del reposo desde $z = 4d$, ¿cuál es su velocidad en $z = 3d$?

Observación: No considere efectos gravitacionales.

Solución:



a) Sean $\vec{r} = z\,\hat{\boldsymbol{k}}$ y $\vec{R} = r\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $dR = dr$, y con ello $\vec{r} - \vec{R} = (z - r)\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Así,

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-d}^{d} \frac{\lambda}{z - r}\,dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{z + d}{z - d}\right)$$

b) Un electrón se mueve desde $z = 4d$ hasta $z = 3d$; luego, su cambio en energía potencial es:

$$\Delta U = U(3d) - U(4d) = q\Big(\phi(3d) - \phi(4d)\Big) = e\Big(\phi(4d) - \phi(3d)\Big) = \frac{e\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

c) Por conservación de energía,

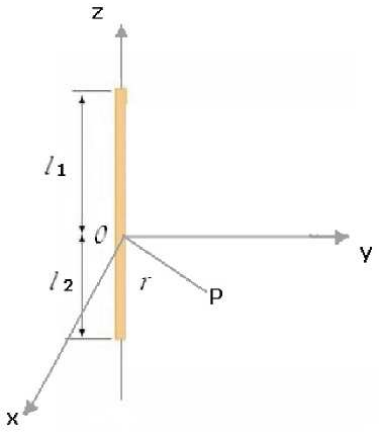
$$U(4d) + \cancel{K(4d)} = U(3d) + K(3d) \quad \longrightarrow \quad K(3d) = U(4d) - U(3d) = -\Delta U = \frac{e\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

pues parte del reposo. Así, despejando

$$v = \sqrt{\frac{me\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

■

(7) Se tiene una distribución rectilínea de carga de densidad λ homogénea. Un punto P está a una distancia r de la distribución, y su proyección sobre la recta de carga está a las distancias ℓ_1 y ℓ_2 de sus extremos.



a) Calcule el potencial electrostático en P. Analice los casos límites.

b) Obtenga el potencial en el punto P debido a un alambre infinito de carga.

Solución:

a) Tomando el origen tal como se muestra en la figura, $\vec{r} = r\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\vec{R} = z\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $dR = dz$ y $|\vec{r} - \vec{R}| = \sqrt{z^2 + r^2}$. Así,

$$\begin{aligned}
\phi(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell_2}^{\ell_1} \frac{\lambda}{|\vec{r} - \vec{R}|}\, dz \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell_2}^{\ell_1} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(z + \sqrt{z^2 + r^2}\right)\Big|_{-\ell_2}^{\ell_1} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\ell_1 + \sqrt{{\ell_1}^2 + r^2}}{-\ell_2 + \sqrt{{\ell_2}^2 + r^2}}\right)
\end{aligned}$$

b) Para calcular el potencial de un alambre infinito, ¿basta con hacer $\ell_1, \ell_1 \to \infty$? Si lo hacemos, notamos que el potencial diverge. Esto se debe a que la carga eléctrica total en la distribución no es finita, y solo en esos casos podemos fijar el potencial igual a cero en infinito. Para resolver este problema, recordamos que el campo eléctrico producido por un alambre infinito es:

$$\vec{E}(r) = E(r)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Sabemos que:

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{d\phi}{dr}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

pues la simetría del problema nos sugiere que no hay dependencia angular. Así,

$$\phi(r) = -\int E(r)\,dr + C \quad \longrightarrow \quad \phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(r) + C$$

con C una constante arbitraria. Evaluando en $r = 1$, obtenemos que $\phi(1) = C$. Luego, la constante no es más que el potencial de todos los puntos que están sobre el manto cilíndrico de radio unitario:

$$\phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(r) + \phi(1)$$

■

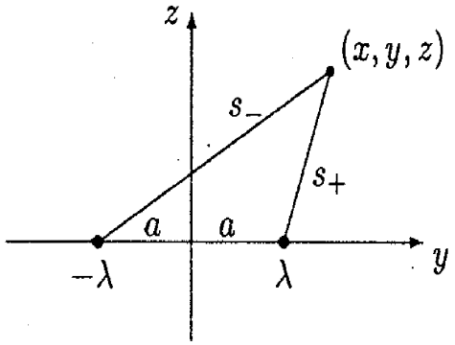
(8) Dos cables infinitos, paralelos al eje X, poseen densidades de carga uniformes λ y $-\lambda$. Ellos están a distancia a del origen.

a) Encuentre el potencial en un punto (x, y, z) usando el origen como punto de referencia.

b) Demuestre que las superficies equipotenciales son cilindros circulares.

Solución:

Tenemos dos alambres infinitos, cada uno a distancia a del origen, como se aprecia en la figura (notar que el eje X sale de la página)



a) Por el principio de superposición, el potencial total en el punto P será la suma de los potenciales debidos a cada distribución individual. El potencial debido al alambre de densidad λ es

$$\phi_1(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(s_+) + C_1$$

y el potencial debido al alambre de densidad $-\lambda$ es

$$\phi_2(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(s_-) + C_2$$

Ahora, como nos piden que la referencia sea el origen, las constantes C_1 y C_2 deben satisfacer

$$\phi_1(a) = \phi_2(a) = 0$$

y con ello:

$$\begin{aligned}
\phi_1(a) &= 0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(a) + C_1 \quad \longrightarrow \quad C_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(a) \\
\phi_2(a) &= 0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(a) + C_2 \quad \longrightarrow \quad C_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(a)
\end{aligned}$$

Notar que $C_1 + C_2 = 0$. El potencial en el punto P es

$$\phi(P) = \phi_1(P) + \phi_2(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(s_+) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(s_-) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{s_-}{s_+}\right)$$

Si $P = (x, y, z)$, entonces

$$s_- = \sqrt{(y+a)^2 + z^2} \qquad \wedge \qquad s_+ = \sqrt{(y-a)^2 + z^2}$$

Finalmente,

$$\phi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{(y+a)^2+z^2}}{\sqrt{(y-a)^2+z^2}}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{(y+a)^2+z^2}{(y-a)^2+z^2}\right)$$

b) Las curvas de nivel vienen dadas por:

$$\left(\frac{(y+a)^2+z^2}{(y-a)^2+z^2}\right) = \eta = cte$$

Desarrollando,

$$\begin{gathered}
(y+a)^2 + z^2 = \eta\Big((y-a)^2 + z^2\Big) \\
y^2 + 2ay + a^2 + z^2 = \eta(y^2 - 2ay + a^2 + z^2) \\
(1-\eta)y^2 + 2(1+\eta)yz + (1-\eta)z^2 + (1-\eta)a^2 = 0
\end{gathered}$$

Si $\eta = 1$, entonces las curvas de nivel son solo puntos, por lo que pueden considerarse como círculos de radio cero. Para $\eta \neq 1$,

$$y^2 + z^2 + a^2 + 2\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)ya = 0$$

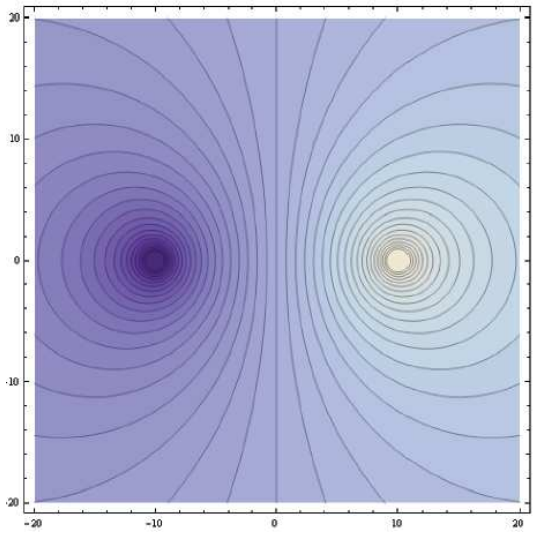
Recordamos la ecuación de una circunferencia con centro en y_0 y radio R:

$$(y - y_0)^2 + z^2 = R^2 \quad \longleftrightarrow \quad y^2 + z^2 - 2yy_0 + ({y_0}^2 - R^2) = 0$$

De aquí, es claro que –en planos perpendiculares a los alambres– las superficies equipotenciales son circunferencias con

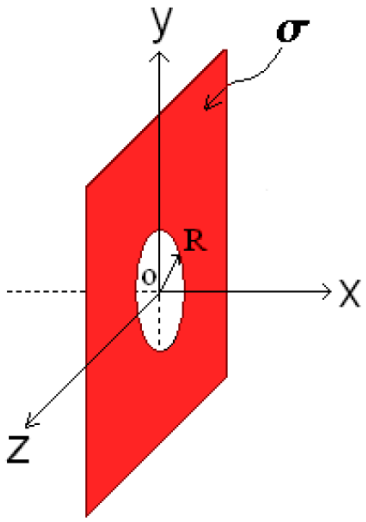
$$y_0 = a\frac{\eta+1}{\eta-1} \qquad \wedge \qquad R = \frac{2a\sqrt{\eta}}{|\eta-1|}$$

En definitiva, las superficies equipotenciales son cilindros:



■

(9) Considere un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme positiva σ, el cual tiene una perforación circular de radio R, tal como muestra la figura. Se define un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro del orificio, tal que la distribución de carga se encuentra en el plano cartesiano YZ. Calcule el trabajo que debe realizar un agente externo para llevar una carga negativa desde el centro del disco hasta un punto sobre el eje X ubicado a una distancia D del origen.



Solución:

Primero que todo, recordemos que el trabajo realizado por un agente externo para llevar una carga Q desde un punto **a** hasta un punto **b** está dada por:

$$W = Q\Big(\phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})\Big)$$

Con anterioridad calculamos el campo eléctrico debido a esta configuración, el cual solo tenía una componente no nula en la dirección $\hat{\boldsymbol{\imath}}$:

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Por tanto, la diferencia de potencial entre el origen y el punto D en el eje X es:

$$\begin{aligned}\phi(D)-\phi(0) &= -\int_0^D \vec{E}\cdot d\vec{r} \\ &= -\int_0^D \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\Big(\sqrt{D^2+R^2}-R\Big)\end{aligned}$$

Así, el trabajo será:

$$W=-\frac{q\sigma}{2\epsilon_0}\Big(\sqrt{D^2+R^2}-R\Big)$$

■

1.4. Energía potencial electrostática

(1) Calcular la energía potencial electrostática de sistema de tres o cuatro cargas positivas, cada una $+q$, que se colocan en las siguientes configuraciones:

a) Cada carga en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a.

b) Cada carga en los vértices de un cuadrado de lado ℓ.

Solución:

Recordemos que:

($*$) Para un sistema de n cargas, la energía potencial asociada al sistema es:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{q_iq_j}{r_{i,j}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\frac{q_iq_j}{r_{i,j}}$$

donde $r_{i,j}$ es la distancia que separa a las cargas q_i y q_j

($*$) Para un sistema continuo de cargas, la energía potencial asociada al sistema es:

$$U=\frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\,d^3r$$

($*$) La energía potencial almacenada en un campo eléctrico es:

$$U=\frac{\epsilon_0}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3} E^2(\vec{r})\,d^3r$$

a) En este caso, es fácil ver que:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{1,2}}+\frac{q_1q_3}{r_{1,3}}+\frac{q_2q_3}{r_{2,3}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q^2}{a}+\frac{q^2}{a}+\frac{q^2}{a}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3q^2}{a}\right) \end{aligned}$$

b) El ejercicio es análogo, salvo por el cambio en las distancias:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \ell \\ r_{1,3} &= \sqrt{2}\ell \\ r_{1,4} &= \ell \\ r_{2,3} &= \ell \\ r_{2,4} &= \sqrt{2}\ell \\ r_{3,4} &= \ell \end{aligned}$$

Con ello,

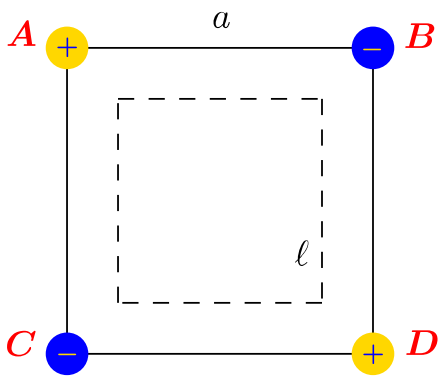
$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}\frac{1}{r_{i,j}} = \frac{4}{\ell}+\frac{2}{\sqrt{2}\ell} = \frac{4+\sqrt{2}}{\ell}$$

Así, finalmente tenemos que:

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4+\sqrt{2}}{\ell}\right)$$

■

(2) Cuatro partículas, dos de las cuales poseen carga $+q$ y las otras dos $-q$, están ubicadas como indica la figura. Si cada una posee masa m y se suelta de los vértices del cuadrado a partir del reposo, se pide calcular sus velocidades cuando el largo del cuadrado vale ℓ. Suponga que todas las cargas se mueven con la misma rapidez.



Solución:

Por el principio de la conservación de energía, se cumple que

$$E_{inicial} = E_{final}$$

Si calculamos la energía inicial, notaremos que posee una contribución cinética y otra potencial, por lo que:

$$E_{inicial} = K_{inicial} + U_{inicial}$$

Como el sistema parte del reposo, se tiene que $K_{inicial} = 0$. La energía potencial inicial está dada por:

$$\begin{aligned} U_{inicial} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_A q_B}{r_{A,B}} + \frac{q_A q_C}{r_{A,C}} + \frac{q_A q_D}{r_{A,D}} + \frac{q_B q_C}{r_{B,C}} + \frac{q_B q_D}{r_{B,D}} + \frac{q_C q_D}{r_{C,D}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-4\cdot\frac{q^2}{a} + 2\cdot\frac{q^2}{\sqrt{2}a}\right) \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\sqrt{2}-4}{a}\right) \end{aligned}$$

Para la situación final, si cada una se mueve con velocidad v y poseen masa m, la energía cinética final es:

$$K_{final} = \sum_{i=1}^{4}\frac{m_i}{2}{v_i}^2 = 4\frac{mv^2}{2} = 2mv^2$$

La energía potencial final se consigue cambiando a por ℓ, por lo que:

$$U_{final} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{2}-4}{\ell}$$

Así,

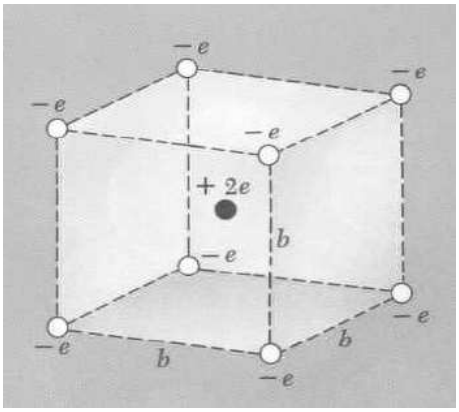
$$U_{inicial} = 2mv^2 + U_{final} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{U_{inicial} - U_{final}}{2m}}$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{8m\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{2}-4\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell}\right)}$$

■

(3) Calcular la energía potencial electrostática del siguiente sistema de cargas puntuales:



Solución:

El problema es fácil de abordar si se considera que hay:

- 12 pares de cargas, como A y B, con separación b entre ellas
- 12 pares de cargas, como A y C, con separación $\sqrt{2}b$ entre ellas
- 4 pares de cargas, como A y H, con separación $\sqrt{3}b$ entre ellas
- 8 pares de cargas, como A y O, con separación $\dfrac{\sqrt{3}b}{2}$ entre ellas

La energía total del sistema es la suma de las energías de cada par de cargas:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(12\cdot\frac{(-e)(-e)}{b}+12\cdot\frac{(-e)(-e)}{\sqrt{2}b}+4\cdot\frac{(-e)(-e)}{\sqrt{3}b}+8\cdot\frac{(-e)(+2e)}{\sqrt{3}b/2}\right) \\ &= \frac{e^2}{4b\pi\epsilon_0}\left(12+6\sqrt{2}-\frac{28}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

■

(4) Muestre que la energía potencial almacenada en una esfera sólida, de radio R, cargada uniformemente con una carga Q es

$$U=\frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}\right)$$

Solución:

Utilizando coordenadas esféricas, la densidad de carga en la esfera está dada por:

$$\rho(r,\varphi,\theta)=\rho(r)=\frac{Q}{4\pi R^2/3}=\frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Como hemos calculado anteriormente, el potencial al interior de una esfera sólida con carga uniformemente distribuida es:

$$\phi(r,\varphi,\theta)=\phi(r)=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

De esta forma, dado que las cantidades no tienen dependencia angular,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int d\Omega \int_0^R \rho(r)\,\phi(r)\,r^2\,dr \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\pi \cdot \frac{3Q}{4\pi R^3}\cdot\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}\int_0^R (3R^2-r^2)r^2\,dr \\ &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6}\cdot\frac{4R^5}{5} \\ &= \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}\right) \end{aligned}$$

■

(5) Una esfera de radio R posee una densidad de carga radial $\rho(r) = kr$, con k una constante. Encuentre la energía potencial de esta configuración.

Solución:

Calculemos el campo eléctrico en todo el espacio utilizando la ley de Gauss:

- $\boxed{r > R}$

$$q_{enc} = \int d\Omega \int_0^R \rho(r) r^2\,dr = 4\pi\int_0^R kr^3\,dr = \pi k R^4$$

Por otra parte,

$$\iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = 4\pi r^2\,E(r)$$

Con ello,

$$4\pi r^2\,E(r) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E(r) = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2}$$

- $\boxed{r < R}$

$$q_{enc} = \int d\Omega \int_0^r \rho(r') r'^2\,dr' = 4\pi\int_0^r kr'^3\,dr' = \pi k r^4$$

De manera análoga,

$$4\pi r^2\,E(r) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0}$$

Para el cálculo de la energía potencial, haremos uso del hecho de que el campo eléctrico no tiene

dependencia angular, por que tenemos:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\epsilon_0}{2}\int d\Omega \int_0^\infty E^2(r)\, r^2\, dr \\
&= 2\pi\epsilon_0 \left(\int_0^R E^2(r)\, r^2\, dr + \int_R^\infty E^2(r)\, r^2\, dr \right) \\
&= 2\pi\epsilon_0 \left(\int_0^R \frac{k^2 r^4}{16{\epsilon_0}^2}^2\, r^2\, dr + \int_R^\infty \frac{k^2 R^8}{16{\epsilon_0}^2 r^4}^2\, r^2\, dr \right) \\
&= \frac{k^2\pi}{8\epsilon_0} \left(\int_0^R r^6\, dr + R^8 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right) \\
&= \frac{k^2\pi}{8\epsilon_0} \left(\frac{R^7}{7} + R^7 \right) \\
&= \frac{k^2\pi}{8\epsilon_0} \cdot \frac{8R^7}{7} = \frac{\pi k^2 R^7}{7\epsilon_0}
\end{aligned}$$

■

1.5. Conductores y capacitancias

(1) Para una distribución homogénea y esférica de carga, calcular:

a) El potencial en todos los puntos interiores

b) La energía potencial electrostática

Solución:

a) Sabemos que, dentro de la esfera, el potencial debe satisfacer la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi = \Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Debido a la simetría esférica del problema, el potencial tendrá una dependencia radial con respecto al centro de la esfera. Así, $\phi = \phi(r)$, y resolvemos la ecuación de Poisson en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esto es,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad r^2\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + c_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\phi}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{c_1}{r^2}$$

Integrando nuevamente,

$$\phi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{c_1}{r} + c_2$$

Como calculamos el potencial dentro de la esfera, este debe ser finito en el origen; para ello, debe cumplirse que $c_1 = 0$. Con ello:

$$\phi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + c_2$$

Para hallar c_2, le aplicamos continuidad al potencial en la frontera $r = R$:

$$\phi_{in}(R) = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + c_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4/3\pi R^3\rho}{R} = \phi_{out}(R) \quad \longrightarrow \quad c_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Finalmente,

$$\phi(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$$

b) La Energía potencial asociada a una distribución de carga se puede obtener como:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{V}} \phi\, dq = \frac{\rho}{2}\iiint_{\mathcal{V}} \phi\, dV = \frac{\rho}{2}\iiint_{\mathcal{V}} \phi r^2\, dr\, d\Omega = \frac{4\pi\rho}{2}\int_0^R \phi(r) r^2\, dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

■

(2) Una esfera de metal de radio R y carga q está rodeada por un cascarón esférico metálico de radio interior a y radio exterior b. El cascarón no tiene carga neta.

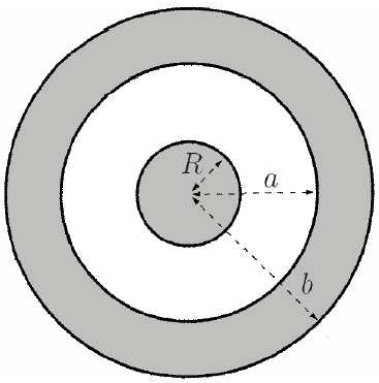
a) Encuentre la densidad superficial de carga en cada superficie

b) Encuentre el potencial en el centro, utilizando infinito como punto de referencia

c) Si la esfera exterior se conecta a tierra bajando su potencial a cero (igual que en infinito), ¿Cómo cambian las respuestas anteriores?

Solución:

a) Consideremos el siguiente esquema:



Como la esfera de radio R es metálica (conductora), toda la carga debe estar concentrada en su superficie. Dada la simetría esférica del problema, esta distribución de carga debe ser uniforme, es decir:

$$\sigma_R = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Ahora, el cascarón es eléctricamente neutro; sin embargo, en sus superficies (S_a y S_b), se induce carga de forma tal que el campo eléctrico en su interior sea nulo, i.e. $\vec{E}(r) = \vec{0}$, si $a < r < b$. Tomando una superficie gaussiana en el interior del cascarón,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad Q_{int} = 0$$

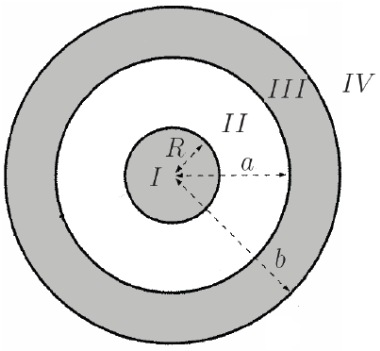
Así, como $Q_{int} = q + \sigma_a 4\pi a^2$, es claro que:

$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Como el cascarón es neutro, debe cumplirse que

$$\sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_b = -\frac{a^2}{b^2}\,\sigma_a = \frac{q}{4\pi b^2}$$

b) Distinguimos cuatro regiones, como se aprecia en la figura:



Como las regiones I, III están dentro de un conductor, $\vec{E} = \vec{0}$ y su potencial es constante (pueden ser distintos entre sí, pero iguales en todo punto de cada región). Para encontrar el campo eléctrico en las regiones II, IV utilizamos la ley de Gauss. Tomando una superficie esférica de radio r con $R < r < a$ (región II), se tiene:

$$\Phi_e = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Del mismo modo, para $r > b$ (región IV), se cumple que:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

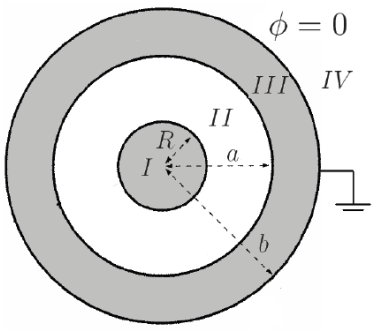
Con esto, podemos calcular el potencial en el origen

$$\phi(0) - \cancel{\phi(\infty)} = -\int_\infty^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

tomando una trayectoria radial:

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= \int_0^\infty E(r)\,dr \\
&= \int_0^R E(r)\,dr + \int_R^a E(r)\,dr + \int_a^b E(r)\,dr + \int_b^\infty E(r)\,dr \\
&= \int_R^a \frac{q\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_b^\infty \frac{q\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)
\end{aligned}$$

c) Ahora, tenemos que:



Hasta antes de la frontera $r = b$, el campo eléctrico y la densidad de carga se mantienen intactos. Por otra parte, el potencial es nulo sobre la superficie exterior S_b, lo que implica que

$$\phi(b) = \int_b^\infty E(r)\,dr = 0$$

para cualquier camino que una al infinito con el punto b, pues el campo es conservativo. Luego, como el integrando es continuo y vale cero para cualquier camino γ, por teoría de la integración, debe cumplirse que

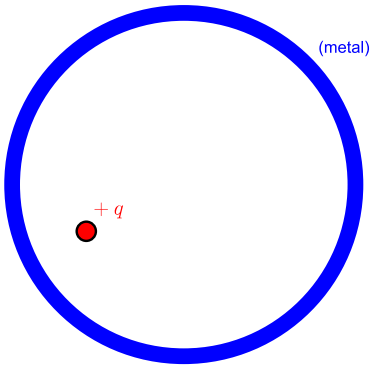
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}\,, \quad \forall \vec{r} \in IV$$

Notar que lo anterior implica que la carga encerrada por una superficie gaussiana contenida en IV necesariamente es cero. Es decir, el cascarón ya no es un objeto eléctricamente neutro (se debe inducir una carga neta en él, igual a $-q$).

$$q + \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = q - q + \sigma_b 4\pi b^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_b = 0$$

■

(3) Una esfera metálica hueca, con espesor no nulo, se encuentra inicialmente descargada. Ahora, imagine que una carga positiva q es colocada en algún lugar (no necesariamente al medio) dentro de la esfera, sin tocar las paredes.



a) ¿Qué carga se induce en la pared interior y exterior de la esfera? Indicar cualitativamente la densidad de carga inducida. Describir cómo son las líneas de campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

b) Suponga que se mueve la carga dentro de la cavidad. ¿Cambia la distribución en la superficie exterior de la esfera?

c) Ahora, se coloca la carga en contacto con la superficie interior de la esfera. ¿Cómo queda la distribución de carga en la superficie interior y exterior?

d) ¿Qué sucede si ahora se acerca otra carga Q cerca de la superficie exterior del conductor?

Solución:

a) La carga q en el interior de la esfera metálica inducirá una separación de carga en el metal. Sea q_i la carga total inducida en la superficie interior, y q_o la carga total inducida en la superficie exterior. Debido a que la esfera inicialmente se encuentra descargada, la ley de conservación de la carga indica que se debe tener

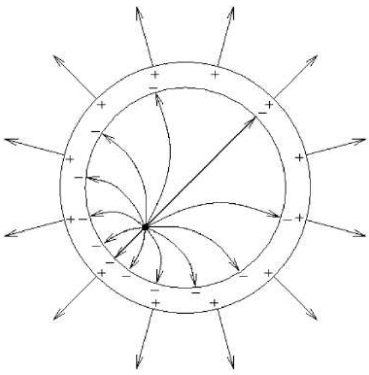
$$q_i + q_o = 0$$

Para determinar el valor de q_i, tomemos una superficie gaussiana contenida enteramente dentro del cascarón esférico. La carga total encerrada por esta superficie es $q_{enc} = q + q_i$. Debido a que el campo eléctrico es nulo dentro de un conductor, la Ley de Gauss indica que:

$$\Phi_e = \frac{q + q_i}{\epsilon_0} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_i = -q,\ q_o = -q_i = q$$

La carga negativa en la superficie interna se concentra en la parte de la esfera más cercana a la carga q. En contraste, la carga positiva de la superficie exterior se distribuye uniformemente sobre la superficie exterior. Esto último debido a que la esfera metálica es una superficie equipotencial, y la única forma de que esto suceda es que el campo sea radial y uniforme sobre la superficie exterior.

La distribución de las cargas, y sus respectivas líneas de campo, son similares a como se aprecia en la siguiente figura:



El campo fuera de la esfera es

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

tal como si la carga q se encontrara en el centro del conductor.

b) La distribución de carga en el exterior no cambia al mover la carga q en el interior, por la misma razón anterior. Por supuesto, la carga inducida en el interior de la superficie sí se redistribuye en la medida que movemos q, para asegurar que el campo en su interior siga siendo nulo. Esto resulta interesante, pues desde el exterior del conductor podríamos saber cuánta carga se encuentra en el interior, pero no podremos asegurar en qué posición se encuentra.

c) Cuando la carga q toca la superficie interior, la carga inducida $-q$ se concentrará enteramente en el punto de contacto y cancelará la carga q.

d) Si se acerca ahora otra carga Q al exterior de la esfera, entonces la carga se distribuirá en la superficie exterior de forma de ser una equipotencial. La distribución de carga al interior no cambia debido a la presencia de una carga en el exterior. En otras palabras, si una cavidad está encerrada en un conductor, ninguna distribución estática de carga en el exterior podrá producir campos dentro. Este principio se conoce como *shielding*, y explica el por qué los aparatos eléctricos se encuentran en cubiertas metálicas.

■

(4) *a*) Considere dos placas metálicas conductoras de igual área A, y separadas por una distancia d. La placa superior posee carga Q, mientras que la placa inferior posee carga $-Q$. Encontrar la capacidad del sistema.

b) Considere un cilindro sólido de radio a rodeado por una cáscara cilíndrica de radio interior b. La longitud de ambos cilindros es L tal que permite despreciar los efectos de borde. El condensador se carga de forma que el cilindro interior posea carga Q y el exterior, carga $-Q$. ¿Cuál es su capacidad?

c) **[Propuesto]** Probar que la capacidad de una configuración esférica, compuesta de dos esferas concéntricas de radios a y b, es

$$C = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

Solución:

a) Para encontrar la capacidad C, primero debemos saber la forma del potencial eléctrico en el interior del condensador (y luego determinar la diferencia de potencial entre ambas placas). Ignorando el efecto del borde del capacitor –producto a su largo finito–, se puede entender al campo producido por ambas placas como el campo producto de un plano infinito: Para todo punto fuera de la región interna del capacitor, se cumplirá que:

$$\vec{E}_{out} = \vec{E}_{+Q} + \vec{E}_{-Q} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \vec{0}$$

Para todo punto dentro del capacitor, se cumple que:

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_{+Q} + \vec{E}_{-Q} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Ahora, la diferencia de potencial entre las placas del condensador se obtiene integrando el campo sobre una curva que va desde la placa positiva hasta la negativa; por simplicidad, elegimos una trayectoria normal a cada superficie:

$$\Delta V = \phi_- - \phi_+ = -\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{r} = -Ed = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad |\Delta V| = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

De esta forma, la capacidad de un condensador de placas planas y paralelas será:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Es claro como la capacitancia solo depende de factores geométricos (esta conclusión es válida para cualquier sistema).

b) Para obtener la capacidad, debemos primero obtener el campo eléctrico en cualquier parte en la región entre ambos conductores. Debido a la simetría cilíndrica del sistema, elegimos por superficie gaussiana un cilindro coaxial con longitud $\ell < L$ y radio $a < r < b$. Usando la ley de Gauss, con un campo radial, tenemos

$$\Phi_e = E(r)2\pi\ell r = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{2\pi a\ell\sigma}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0 r}$$

La diferencia de potencial está dada por:

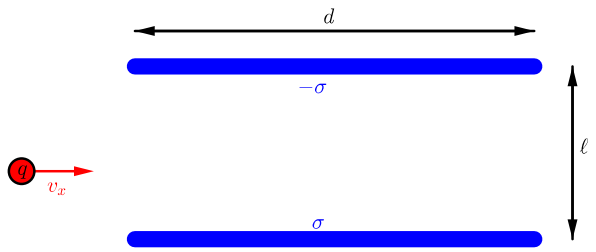
$$\begin{aligned}
\Delta V &= \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} \\
&= -\int_a^b E(r)\,dr \\
&= -\frac{a\sigma}{\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{a\sigma}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

donde el camino de integración tiene la dirección radial del campo eléctrico. De esta forma, tenemos que:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma 2\pi a L}{\frac{a\sigma}{\epsilon_0}\ln(b/a)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

■

(5) Considere un condensador de placas paralelas cargadas con densidades σ y $-\sigma$, como muestra la figura. Se arroja una carga q horizontalmente, por el espacio entre las placas, con velocidad v_x. Encuentre la trayectoria seguida por la partícula cargada y el ángulo que forma su vector velocidad con la horizontal al momento de salir, considerando que ℓ es lo suficientemente grande como para que la carga no choque con alguna de las placas. Desprecie efectos gravitacionales.



Solución:

EL campo eléctrico dentro del capacitor es $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Por tanto, la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga viene dada por la ley de Coulomb:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{q\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

De la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Separando la ecuación anterior en componentes, i.e. $\vec{a} = a_z\,\hat{\boldsymbol{k}} + a_x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$, tenemos:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ x'' &= 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = at + b \end{aligned}$$

$*$ Reemplazando las condiciones iniciales, $x(0) = 0, x'(0) = v_x$, obtenemos:

$$x(t) = v_x t$$

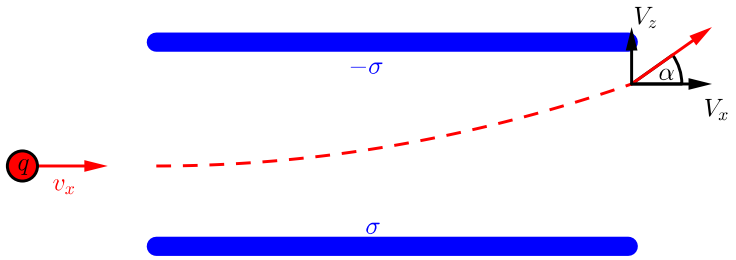
$$\begin{aligned} a_z &= \beta \\ z'' &= \beta \quad \longrightarrow \quad z(t) = \frac{\beta}{2}t^2 + bt + c \end{aligned}$$

$*$ Reemplazando las condiciones iniciales, i.e. $z(0) = z'(0) = 0$, concluimos que:

$$z(t) = \frac{1}{2}\frac{q\sigma}{m\epsilon_0}t^2$$

donde el origen coincide con la posición inicial de la carga al momento de entrar en el capacitor. De las ecuaciones anteriores, es claro que la trayectoria de la partícula es una parábola en el plano XZ. Ahora, el tiempo que demora en llegar al extremo derecho del capacitor será

$$x(t^*) = d \quad \longrightarrow \quad t^* = \frac{d}{v_x}$$



Con esto, las componentes de velocidad en cada eje serán:

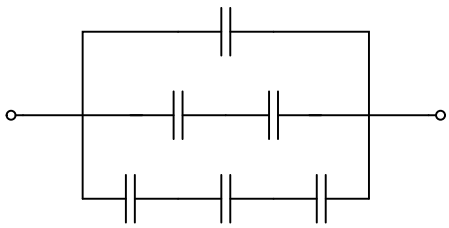
$$V_x(t^*) = x'(t^*) = v_x \qquad \wedge \qquad V_z(t^*) = z'(t^*) = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0}\frac{d}{v_x}$$

Finalmente, el ángulo está dado por

$$\alpha = \arctan\left(\frac{V_z(t^*)}{V_x(t^*)}\right) = \arctan\left(\frac{qd\sigma}{m{v_x}^2\epsilon_0}\right)$$

■

(6) Considere la configuración de la figura. Encuentre la capacidad equivalente, asumiendo que todos los condensadores poseen la misma capacidad C.



Solución:

Para los condensadores conectados en serie, la capacidad equivalente está dada por:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$$

Por otro lado, para los condensadores en paralelo, la capacidad equivalente es:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Para la segunda y tercera fila existen capacitancias equivalentes en serie, C_2, C_3 respectivamente:

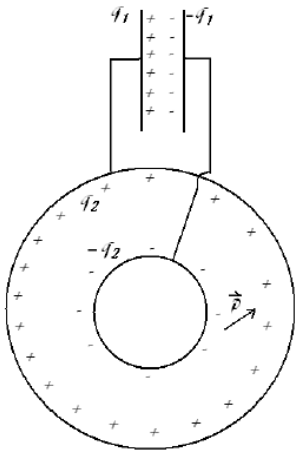
$$C_2 = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C}\right)^{-1} = \frac{C}{2} \qquad \wedge \qquad C_3 = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C}\right)^{-1} = \frac{C}{3}$$

Ahora, los capacitores C, C_2, C_3 están en paralelo. Así,

$$C_{eq} = C + C_2 + C_3 = \frac{11}{6}\, C$$

■

(7) Se tiene un condensador plano, con capacidad C_1 y un condensador esférico, con capacidad C_2. El primero tiene cargas eléctricas q_1 y $-q_1$, y el segundo tiene cargas eléctricas q_2 y $-q_2$. Luego, se conectan ambos condensadores como lo muestra la figura:



a) Obtenga las nuevas cargas Q_1, $-Q_1$, Q_2, $-Q_2$ una vez obtenido el equilibrio eléctrico.

b) ¿Cuánto vale la pérdida de energía potencial eléctrica?

c) Según su sentido físico ¿dónde se pierde dicha energía?

d) Se coloca un dipolo eléctrico $\vec{p}$ entre las dos esferas del condensador. ¿Qué sucede con él?

Solución:

a) Por conservación de la carga eléctrica, al conectar ambos condensadores, la carga total solo debe distribuirse, luego:

$$q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2$$

Al producirse el equilibrio, los conductores unidos quedan al potencial V; luego, la diferencia de potencial entre sus terminales es común para ambos condensadores (que ahora están conectados en paralelo):

$$Q_1 = C_1 V \ , \quad Q_2 = C_2 V \qquad \longrightarrow \qquad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Reemplazando en la primera igualdad,

$$Q_1 = \frac{C_1(q_1 + q_2)}{C_1 + C_2} \qquad \wedge \qquad Q_2 = \frac{C_2(q_1 + q_2)}{C_1 + C_2}$$

b) La energía inicial está dada por:

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{{q_1}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{{q_2}^2}{C_2}$$

Y la energía final es:

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{{Q_2}^2}{C_2} = \frac{(Q_1+Q_2)^2}{2(C_1+C_2)}$$

Así, la energía perdida es la resta entre ambas cantidades:

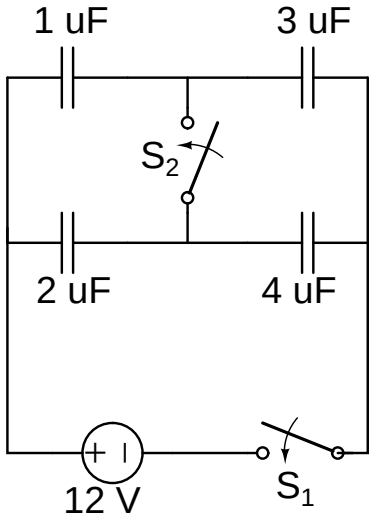
$$-\Delta U = U_i - U_f = \frac{1}{2}\frac{(q_1C_2 - q_2C_1)^2}{C_1C_2(C_1+C_2)}$$

c) La pérdida de energía se produce debido a que, al conectar ambos condensadores, se produce una redistribución de carga en ellos (y entonces, en un intervalo de tiempo corto, circula una corriente eléctrica en los conductores). La energía que se pierde corresponde a la energía disipada, en forma de calor, por los conductores.

d) El dipolo gira para orientarse en el sentido del campo eléctrico entre ambas cáscaras esféricas. Además, como el campo no es uniforme en esta región, el dipolo se desplaza hacia donde el campo eléctrico es más intenso, i.e. hacia la cáscara negativa.

■

(8) Se tiene un circuito como el que se muestra en la figura:



a) Encontrar la carga de cada condensador cuando se cierra el interruptor S_1.

b) Lo mismo que lo anterior, ahora con S_2 también cerrado.

Solución:

a) Cuando S_1 está cerrado, los dos capacitores superiores están en serie, así como también los dos inferiores. Las capacidades equivalentes son:

$$C_{upper} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1} \mu\text{F} = \frac{3}{4}\,\mu\text{F} \qquad \wedge \qquad C_{lower} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-1} \mu\text{F} = \frac{4}{3}\,\mu\text{F}$$

Por último, C_{upper} y C_{lower} están en paralelo, por lo que la capacidad total será:

$$C_t = C_{upper} + C_{lower} = \frac{25}{12}\,\mu\text{F}$$

Con esto, podemos determinar la carga total suministrada por la fuente: $Q = VC = 25\,\mu\text{C}$. Ahora, sean Q_i y V_i la carga y diferencia de potencial –respectivamente– del $i-$ésimo condensador, numerados en orden creciente respecto a su capacitancia. Por estar en serie, $Q_1 = Q_3,\ Q_2 = Q_4$. Así:

$$Q_1 = 1\mu V_1\ , \quad Q_2 = 2\mu V_2\ , \quad Q_3 = 3\mu V_3 = Q_1\ , \quad Q_4 = 4\mu V_4 = Q_2$$

Además, los voltajes satisfacen

$$12 = V_1 + V_3 = V_2 + V_4$$

Resolviendo el sistema,

$$Q_1 = V_1 = 36 - 3V_1\ , \quad Q_2 = 2V_2 = 48 - 4V_2 \qquad \longrightarrow \qquad V_1 = 9,\ V_2 = 8,\ V_3 = 3,\ V_4 = 4$$

Por último,

$$Q_1 = 9\,\mu\text{C},\ Q_2 = 16\,\mu\text{C},\ Q_3 = 9\,\mu\text{C},\ Q_4 = 16\,\mu\text{C}$$

Se comprueba que $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25\,\mu\text{C} = Q$.

b) En este caso, los condensadores C_1 y C_2 están en paralelo, al igual que C_3 y C_4:

$$C_{left} = C_1 + C_2 = 3\,\mu\text{F} \qquad \wedge \qquad C_{right} = C_3 + C_4 = 7\,\mu\text{F} \qquad \longrightarrow \qquad C_{eq} = \frac{10}{21}\,\mu\text{F}$$

La carga suministrada por la fuente será:

$$Q = C_{eq}V = 25.2\,\mu\text{C}$$

Además, se tiene $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$, ya que se encuentran en paralelo. Así,

$$V_1 = \frac{1}{Q_1} = V_2 = \frac{2}{Q_2}\ , \quad V_3 = \frac{3}{Q_3} = V_4 = \frac{4}{Q_4}$$

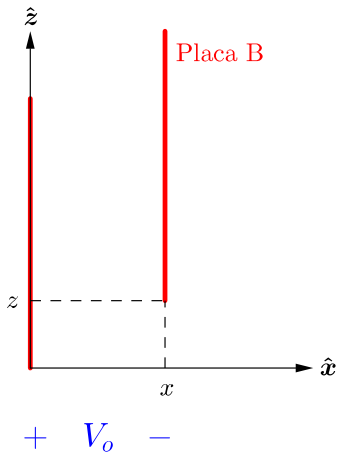
Con esto, $2Q_1 = Q_2$ y $4Q_3 = 3Q_4$. También debe darse que $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25.2\,\mu\text{C}$, y por tanto:

$$2Q_1 = Q_2 = 25.2 - Q_1 \quad \longrightarrow \quad Q_1 = 8.4\,\mu\text{C},\ Q_2 = 16.8\,\mu\text{C}$$

$$Q_3 = 25.2 - Q_4 = 25.2 - \frac{4}{3}Q_3 \quad \longrightarrow \quad Q_3 = 10.8\,\mu\text{C},\ Q_4 = 14.4\,\mu\text{C}$$

■

(9) Dos placas conductoras cuadradas de lado a se disponen paralelas y muy próximas entre sí. La distancia horizontal entre las placas es x, mientras que una de ella se encuentra z unidades elevada respecto a la otra (ver proyección lateral en la figura). Si se coloca una diferencia de potencial constante V_o entre ellas, calcule la fuerza sobre la placa B en las direcciones $\hat{\boldsymbol{x}}$ y $\hat{\boldsymbol{z}}$.



Solución:

La energía almacenada en el condensador es:

$$U = \frac{CV_o{}^2}{2}$$

donde la capacidad está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{x} = \frac{\epsilon_0 a(a-z)}{x}$$

¿Cómo calculamos la fuerza? Un sistema conectado a una batería no esta aislado, pues la carga cambia para mantener la diferencia de potencial (que es constante). Así,

$$dW_{sist} + dU_{sist} = dW_{bat}$$

Notamos que es posible variar la energía potencial U sin que el sistema haga trabajo, si es que la batería lo hace. En este caso, $dU_{sist} = \dfrac{V_0\, dQ}{2}$ y $dW_{bat} = V_0\, dQ$

Entonces, $dW_{sist} = \dfrac{V_0\, dQ}{2} = dU_{sist}$, y en este caso $\vec{F}_{sist} = \nabla U$. Aquí no ocurre que la fuerza que hace el sistema sea para lograr un estado de menor energía (eso es solo ocurre en un sistema aislado a Q constante). De esta forma,

$$\vec{F} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{k}} = -\frac{V_o{}^2 \epsilon_0 a}{2}\left(\frac{a-z}{x^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{1}{x}\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$$

■

2. Electricidad en medios materiales

2.1. Ecuaciones de Laplace y Poisson

(1) *a*) Considere dos cascarones cilíndricos conductores de radios a y $b > a$ coaxiales, cargados a los potenciales V_a y V_b, respectivamente. Encuentre el potencial entre los cascarones.

b) Considere dos cascarones esféricos conductores de radios a y $b > a$ concéntricos, cargados a los potenciales V_a y V_b, respectivamente. Encuentre el potencial entre los cascarones, y fuera de ellos.

Solución:

Para este, y todos los problemas del mismo estilo, conviene usar las ecuaciones de Laplace o de Poisson. Estas ecuaciones describen microscópicamente el potencial en todo el espacio, en el sentido de que dada la densidad de carga en un punto, se puede obtener el potencial en ese punto (desde luego, también se puede partir del potencial, para obtener la densidad).

a) Dada la geometría del problema, empleamos coordenadas cilíndricas, con el eje z coincidente con el eje de los cascarones. En este caso estamos, interesados en cualquier punto dentro de la región entre ambos cascarones. En cualquiera de estos puntos no existen cargas (dicha región es vacía), por lo que ahí $\rho = 0$. Por lo tanto, debemos resolver la ecuación de Laplace, $\nabla^2 V = 0$. Ahora, dada la simetría del problema, sabemos que el potencial debe depende solo de la distancia al eje de ambos cilindros, por lo que esperamos que $V = V(r)$. Así la ecuación de Laplace queda muy simplificada:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

pues $r \neq 0$. Resolvemos la EDO:

$$r\frac{dV}{dr} = A \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r} \quad \longrightarrow \quad V(r) = A\ln(r) + B$$

Las constantes A y B las determinan las condiciones de borde. En particular, sabemos que $V(a) = V_a$ y $V(b) = V_b$, por lo cual:

$$V_a = A\ln(a) + B\ , \quad V_b = A\ln(b) + B$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos

$$V_a - V_b = A\ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad \longrightarrow \quad A = \frac{V_a - V_b}{\ln(a/b)}$$

Por otra parte, multiplicando la primera ecuación por $\ln(b)$ y la segunda por $\ln(a)$, y restando,

$$V_a\ln(b) - V_b\ln(a) = B\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \longrightarrow \quad B = \frac{V_b\ln(a) - V_a\ln(b)}{\ln(a/b)}$$

que nos entrega el valor del potencial.

b) Por los mismos argumentos de ítem anterior, debemos resolver la ecuación de Laplace en ambas regiones (entre y fuera de los cascarones). Esta vez, por simetría, usamos coordenadas esféricas. A priori sabemos que el potencial no puede depender de los ángulos, o sea, $V = V(r)$. La ecuación de Laplace que hay que resolver es entonces:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) \quad \longrightarrow \quad V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Las condiciones de borde son las que nuevamente entregan los valores únicos de las constantes. En este caso, debemos separar cada región de interés:

- $\boxed{a < r < b}$
  Las condiciones de borde relevantes aquí son: $V(a) = V_a$ y $V(b) = V_b$. Esto implica que

  $$V_a = -\frac{A}{a} + B \ , \quad V_b = -\frac{A}{b} + B$$

  Despejando:

  $$A = -\frac{ab(V_a - V_b)}{b-a} \ , \quad B = -\left(\frac{V_a}{b} - \frac{V_b}{a}\right)\frac{ab}{b-a}$$

  en la región entre los cascarones.

- $\boxed{b < r}$
  Esta vez, las condiciones de borde relevantes son $V(b) = V_b$ y que el potencial sea nulo en el infinito, $V(r \to \infty) = 0$. Esto implica que

  $$V_b = -\frac{A}{b} + B \ , \quad V_\infty = B = 0$$

  Es claro que

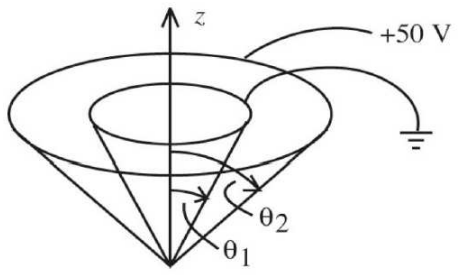
  $$A = -bV_b$$

  en la región fuera de los cascarones.

Una pregunta propuesta al lector: ¿Es el potencial continuo en la interfaz? ¿Por qué?

■

(2) Dos conos conductores concéntricos, cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son $\theta_1 = \pi/6$ y $\theta_2 = \pi/4$, se muestran en la figura. Los conos son de extensión infinita y en $r = 0$ están separados por una distancia infinitesimal. Si el cono interior está a un potencial de 0 V, y el exterior a 50 V, determinar el potencial y el campo eléctrico en la región interior a ambos conductores.



Solución:

Sea $\mathcal{V}$ la región delimitada por $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Si no hay densidad de carga libre en $\mathcal{V}$, el potencial satisface la ecuación de Laplace $\Delta V = 0$. Dada la geometría del problema, es conveniente utilizar coordenadas esféricas. El problema posee una clara simetría azimutal (el potencial no depende del ángulo polar ϕ). Además, debe existir independencia de r, pues la extensión de los conos es infinita. De esta forma, el potencial debe ser únicamente función de θ:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin\theta \frac{dV}{d\theta} = C_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{d\theta} = C_1 \csc\theta$$

Recordando que la integral de la cosecante es $\ln(\tan\theta/2) + cte$, entonces:

$$V(\theta) = C_1 \ln(\tan\theta/2) + C_2$$

Debemos imponer las condiciones de borde en las superficies conductoras. Se tiene que

$$V(\theta_1) = C_1 \ln(\tan\pi/12) + C_2 = 0 \ , \quad V(\theta_2) = C_1 \ln(\tan\pi/8) + C_2 = 50$$

El despeje queda propuesto al lector. Para encontrar el campo eléctrico, utilizamos que

$$\vec{E} = -\nabla V$$

■

(3) **[Propuesto]** Suponga que el potencial $V_0(\theta)$ sobre la superficie de una esfera de radio R es dado. Demuestre que la densidad de carga en la esfera es:

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon_0}{2R} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 C_l P_l(\cos\theta)$$

donde

$$C_l = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \ d\theta$$

Solución:

Supongamos un potencial con simetría azimutal, de modo tal que $V(r,\theta,\phi) = V(r,\theta)$. Aplicando el método se separación de variables, afirmamos que existen funciones $R(r), A(\theta)$ tales que $V(r,\theta) = R(r)A(\theta)$ para todo $r \in (0,\infty)$, $\theta \in (0,\pi)$. Así, la Ecuación de Laplace toma la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\Delta V = 0 \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0 \\
&\rightarrow \quad \frac{A(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R(r)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) = 0 \quad \Big/ \cdot R(r)A(\theta) \\
&\rightarrow \quad \frac{1}{r^2R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2A(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) = 0 \quad \Big/ \cdot r^2 \\
&\rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)}_{\lambda} + \underbrace{\frac{1}{A\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)}_{-\lambda} = 0
\end{aligned}
$$

El método de separación de variables nos sugiere que λ es constante. Para hallar la componente angular del potencial, resolvemos la parte derecha de la ecuación:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dA}{d\theta}\right] + \lambda A = 0$$

Con el cambio de variables $t = \cos\theta$ y $X = A(\theta)$ tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left[\sin^2\theta\frac{dX}{dt}\right] + \lambda X = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX}{dt}\right] + \lambda X = 0$$

que es justamente la Ecuación diferencial asociada a los polinomios de Legendre. Por tanto, $X(t) = P_l(t)$ y $\lambda = l(l+1)$. Para $R(r)$, sugerimos que esta solución es de la forma $R(r) = r^n$, y por tanto:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right] - l(l+1)R = 0 \quad &\rightarrow \quad r^2n(n-1)r^{n-2} + 2rnr^{n-1} - l(l+1)r^n = 0 \\
&\rightarrow \quad \big(n(n+1) + 2n - l(l+1)\big)\, r^n = 0 \\
&\rightarrow \quad n(n+1) + 2n - l(l+1) = 0 \\
&\rightarrow \quad n_1 = l,\ n_2 = -(l+1)
\end{aligned}
$$

Así, $R_l(r) = a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}$. Finalmente, el potencial posee como solución general:

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)}$$

Volvamos al problema en cuestión. Notar que, tanto en la región interior como exterior de la esfera, existen las siguientes condiciones

$$\Delta V = 0$$

$$V(R,\theta) = V_0(\theta)$$

lo que se conoce como *Problema de Dirichlet*. Para solucionarlo, definimos los potenciales internos y externos a la esfera, a saber $V_in(r,\theta)$ y $V_{out}(r,\theta)$ respectivamente. Del curso de Electricidad y Magnetismo, sabemos que ambos potenciales deben satisfacer que:

$$V_{in}(R,\theta) = V_{out}(R,\theta) = V_0(\theta)$$

$$\left(\frac{\partial V_{out}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R} = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

Al interior de la esfera, la física del problema nos exhorta a buscar una solución que no diverja. Por tanto, el término b_l debe ser idénticamente nulo y con ello:

$$V_{in}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[a_l r^l\right] P_l(\cos\theta)$$

Lo mismo ocurre fuera de la esfera, y por tanto $a_l \equiv 0$ y así:

$$V_{out}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[b_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$$

Analicemos la relación que existe entre a_l y b_l en ambos potenciales. Como en la frontera (i.e. $r = R$) éstos deben ser iguales, se cumple que:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[a_l R^l\right] P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[b_l R^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta) \quad \longrightarrow \quad b_l = a_l R^{2l+1},\ \forall l$$

Al mismo tiempo, como el potencial en la frontera tiene una forma determinada previamente en el enunciado,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} \left[a_l R^l\right] P_l(\cos\theta) &= V_0(\theta) \qquad \Big/ \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta \\
\sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta &= \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta \\
\sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l \frac{2}{2l+1}\delta_{l,m} &= C_m \\
a_m &= \frac{2m+1}{2R^m}\ C_m \\
\therefore\ b_m &= (2m+1)\frac{R^{m+1}}{2}\ C_m
\end{aligned}$$

Así, utilizando la condición para la densidad de carga se cumple que:

$$\left(\frac{\partial V_{out}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big[-(l+1)b_l R^{-(l+2)} - l a_l R^{l-1}\Big]P_l(\cos\theta) = -\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\Big[(l+1)\ (2l+1)R^{l+1}C_l\ R^{-(l+2)} + l\ \frac{2l+1}{R^l}C_l\ R^{l-1}\Big]P_l(\cos\theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{2R}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2\ C_l\ P_l(\cos\theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}$$

Finalmente,

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon_0}{2R}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2 C_l P_l(\cos\theta)}$$

■

(4) **[Propuesto]** Una esfera de metal de radio R descargada es colocada en una región del espacio con campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\hat{k}$. Note que, debido a las cargas inducidas en la superficie de la esfera, el campo eléctrico cambia en la vecindad de la esfera. Encuentre el potencial electrostático fuera de la esfera. *HINT:* Para $r \gg R$, $V \to -E_0 z + C$.

Solución:

Consideremos a la esfera como una superficie equipotencial, donde fijaremos un potencial igual a cero sobre la superficie de la misma. Así, la función potencial a encontrar debe satisfacer los siguientes requerimientos:

$$\begin{aligned} V &= 0 \qquad \text{si} \quad r = R \\ V &\to -E_0 z + C \quad \text{si} \quad r \gg R \end{aligned}$$

Considerando ambas condiciones, es claro que $C = 0$. Hagamos $z = r\cos\theta$ para facilitar el análisis. De la primera condición, notamos que:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[a_l R^l + b_l R^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) = 0$$

y por tanto

$$a_l R^l + b_l R^{-(l+1)} = 0 \quad \longrightarrow \quad b_l = -a_l R^{2l+1}$$

Ahora,

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l\left[r^l - \frac{R^{2l+l}}{r^{l+1}}\right]P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l\left[1 - \frac{R^{2l+l}}{r^{2l+1}}\right]P_l(\cos\theta)$$

Si $r \gg R$, entonces $\dfrac{R}{r} \ll 1$ y dicha potencia es despreciable. Así,

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 z = -E_0 \cos\theta$$

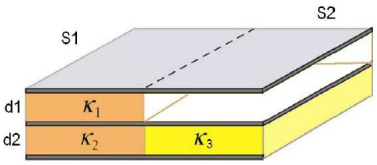
Por ortogonalidad (y dado que $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$) es posible visualizar que, para $l \neq 1 \rightarrow a_l \equiv 0$, mientras que $a_1 = -E_0$. Finalmente, el potencial fuera de la esfera tiene la siguiente forma:

$$\boxed{V(r,\theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) \cos\theta}$$

■

2.2. Dieléctricos

(1) Calcular la capacidad del condensador de la figura, suponiendo que la placa intermedia posee una discontinuidad en el medio.



Solución:

El problema se puede tratar como dos condensadores en paralelo, uno formado por dos dieléctricos de constante κ_1 y κ_2, y el otro formado por dieléctrico de constante κ_3 y vacío. A su vez, el primer condensador (C_1), se puede ver como dos condensadores en serie, llenos de los dieléctricos 1 y 2, así:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{12}}$$

con

$$C_{11} = \frac{\kappa_1 \epsilon_0 S_1}{d_1}\ , \quad C_{12} = \frac{\kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_2}$$

Luego:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{\epsilon_0 S_1}\left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right) \quad \longrightarrow \quad C_1 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1}$$

De manera similar, para el condensador C_2,

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{21}} + \frac{1}{C_{22}}$$

con

$$C_{21} = \frac{\epsilon_0 S_2}{d_1}\ , \quad C_{22} = \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_2}$$

y por ende

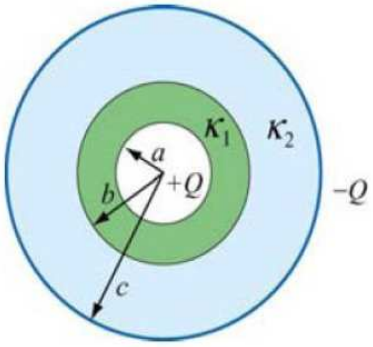
$$C_2 = \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_1 \kappa_3 + d_2}$$

Finalmente, como C_1 y C_2 están en paralelo, la capacidad total será:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1} + \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_1 \kappa_3 + d_2}$$

■

(2) Considere una esfera conductora de radio interior a y radio exterior c. El espacio entre las dos superficies es llenado con 2 dieléctricos distintos, de manera que la constante dieléctrica es κ_1 entre a y b, y κ_2 entre b y c. Determine la capacitancia del sistema.



Solución:

El sistema se puede tratar como dos capacitores conectados en serie, ya que la diferencia de potencial total a través de los capacitores es la suma de las diferencias de potencial a través de cada condensador individual. La capacitancia equivalente para un capacitor esférico de radio interior r_1 y radio exterior r_2 lleno de dieléctrico de constante κ está dado por:

$$C = 4\pi\epsilon_0\kappa\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Así, la capacitancia equivalente del sistema es:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{\kappa_1 ba} + \frac{c-b}{\kappa_2 bc}\right) = \frac{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}{4\pi\epsilon_0\kappa_1\kappa_2 abc}$$

Finalmente:

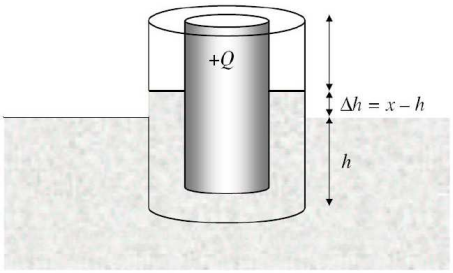
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\kappa_1\kappa_2 abc}{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}$$

Notemos el caso límite en que $\kappa_1, \kappa_2 \to 1$, la expresión se reduce a

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 abc}{c(b-a) + a(c-b)} = \frac{4\pi\epsilon_0 abc}{b(c-a)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ac}{c-a}$$

que concuerda con la capacitancia de un condensador esférico de radios a y c en el vacío. ■

(3) Un condensador cilíndrico de altura ℓ, y cuyos conductores tienen radios a y b ($b > a$), está cargado con una carga Q, i.e. una armadura tiene carga $+Q$ y la otra $-Q$. Entre ellas existe vacío. La armadura es un cilindro metálico macizo. Este dispositivo se sumerge en un líquido dieléctrico de densidad constante ρ y permitividad ϵ, a una profundidad h. Determinar la altura x que sube el nivel del líquido que queda dentro del condensador, en relación al líquido externo (basta llegar a la ecuación correspondiente).



Solución:

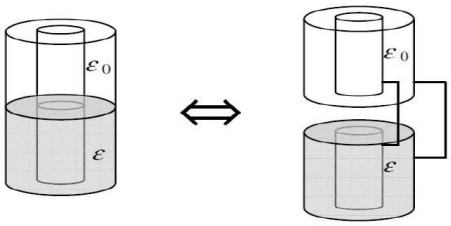
La diferencia de nivel Δh estará dada por el equilibrio entre la fuerza eléctrica sobre el líquido y su peso. La fuerza electrostática es:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Como la carga es constante,

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

con $C(x)$ la capacitancia del condensador cuando el líquido está a una altura x. De esta forma, el problema se traduce en determinar la capacidad del condensador en función de la altura x.



La figura muestra que el condensador puede considerarse como dos condensadores conectados en paralelo, uno de altura $\ell - x$ y otro de altura x. La capacidad total será la suma de las capacidades C_1, C_2. Podemos hacer esta suposición (equivalente con 2 condensadores en paralelo) si despreciamos los efectos de borde y la deformación del campo eléctrico cerca de la superficie del líquido:

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0(\ell - x)}{\ln(b/a)} \qquad \wedge \qquad C_2 = \frac{2\pi\epsilon x}{\ln(b/a)}$$

La capacitancia total será

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi}{\ln(b/a)}\Big(\epsilon x + \epsilon_0(\ell - x)\Big)$$

La energía eléctrica será

$$C = \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2 \ln(b/a)}{x(\epsilon - \epsilon_0) + \ell\epsilon_0}$$

Derivando, se obtiene la fuerza que tiende a subir al líquido:

$$F_x = \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2 \ln(b/a)(\epsilon - \epsilon_0)}{\Big(x(\epsilon - \epsilon_0) + \ell\epsilon_0\Big)^2}$$

Por otra parte, el empuje del líquido es:

$$g(x-h)\pi(b^2-a^2)\rho = E_x$$

Finalmente, es posible determinar x a partir de

$$|F_x| = |E_x|$$

■

(4) Una esfera de radio R, con carga libre q, está sumergida en un medio dieléctrico homogéneo de constante κ y de extensión teóricamente infinita. Calcular:

a) Los vectores de campo eléctrico y polarización a una distancia $r > R$

b) La densidad de carga de polarización

Solución:

a) Debido a que $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$ son todos paralelos entre sí en cada punto, y por la simetría esférica, la naturaleza radial del campo no cambia por la presencia del medio dieléctrico. Además, estos vectores pueden depender solo de la distancia al centro de la esfera y no de alguna coordenada angular. Usando la ley de Gauss, con una superficie esférica de radio $r > R$ concéntrica:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{D}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} D(r)\,dS = D(r)\iint_{\mathcal{S}} dS = q_{libre} = q \quad \longrightarrow \quad D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Es claro que

$$\vec{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

El campo eléctrico y la polarización pueden evaluarse fácilmente:

$$\vec{D} = \kappa\epsilon_0\vec{E} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

además,

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \longrightarrow \quad \vec{P}(r) = (\epsilon-\epsilon_0)\vec{E}(r) = \frac{q(\kappa-1)}{4\pi\kappa r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

b) Claramente, el dieléctrico ha debilitado la magnitud del campo eléctrico (en comparación al espacio vacío). El campo eléctrico es originado por toda la carga, la de polarización y la carga libre. La carga libre es solo la carga de la esfera q. Sin embargo, la carga de polarización se forma de dos contribuciones: una densidad volumétrica

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$$

y una densidad superficial

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

sobre la superficie del dieléctrico en contacto con la carga puntual.

Es claro que, en todos los puntos del dieléctrico,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{P} = 0$$

Usando que

$$\vec{P}(r) = \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

la densidad superficial será

$$\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P}(R) \cdot -\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa R^2}$$

y la carga superficial es

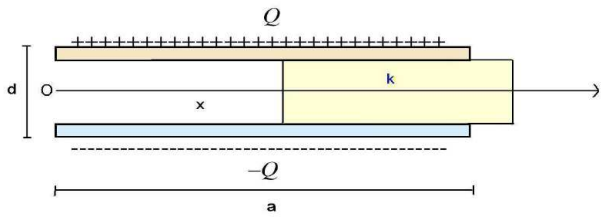
$$Q_s = \iint_{\mathcal{S}} \sigma \, dS = -4\pi R^2 \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa R^2} = -\frac{q(\kappa - 1)}{\kappa}$$

Notar que la carga total será:

$$Q_{total} = Q_{libre} + Q_s = q - \frac{q(\kappa - 1)}{\kappa} = \frac{q}{\kappa}$$

■

(5) Se tiene un condensador plano con placas cuadradas de largo a, distancia d entre placas, y una carga total Q. Calcular la fuerza que se ejerce sobre un material dieléctrico cuando se encuentra a una distancia x del punto O.



Solución:

La energía potencial asociada a esta configuración es

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

Notar que es función de la posición x, puesto que la capacitancia total también lo es. El sistema se puede ver como dos condensadores en paralelo, uno de ellos con un dieléctrico de constante κ. Así,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 a x}{d} + \frac{\kappa\epsilon_0 a(a - x)}{d} = \frac{\epsilon_0 a(x + \kappa[a - x])}{d}$$

Con esto, la energía potencial eléctrica almacenada es:

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\epsilon_0 a(x + \kappa[a - x])}$$

¿Cómo obtenemos la fuerza? Para un sistema aislado a $Q = cte$, la conservación de energía nos dice que el trabajo que hace el sistema más la variación de energía del sistema es cero. O sea, si está aislado, el trabajo que haga el sistema es a costa de su propia energía. Entonces,

$$dW_{sist} + dU_{sist} = 0$$

Como $dW_{sist} = \vec{F}_{sist} \cdot d\vec{r}$ y $dU_{sist} = \nabla U \cdot d\vec{r}$, esto implica que $\vec{F}_{sist} = -\nabla U$. Así, la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico será:

$$F_x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = -\frac{dU}{dx}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \quad \longrightarrow \quad F_x = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a}\frac{1-\kappa}{(x+\kappa[a-x])^2}$$

Notar que $1-\kappa < 0$, i.e. la fuerza apunta según $-\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Esto significa que la placa dieléctrica es atraída hacia el interior del condensador. En este caso que es conservativo, la fuerza que hace el sistema es para ir a una configuración de menor energía, y tira al dieléctrico hacia adentro (a Q constante, $U = \dfrac{Q^2}{2C}$, así que con dieléctrico tiene menor energía).

Una nota adicional. *¿Qué pasaría si el problema no consistiese en un sistema no aislado, i.e. a $V = cte$?* En este caso, la conservación de energía nos dice que el trabajo que hace el sistema más la variación de energía del sistema es igual al trabajo realizado por la batería:

$$dW_{sist} + dU_{sist} = dW_{bat}$$

En este caso,

$$dU_{sist} = \frac{1}{2}V_0\,dq \qquad \wedge \qquad dW_{bat} = V_0\,dq$$

Con ello,

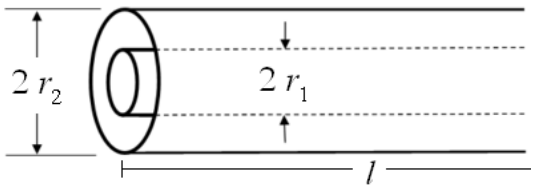
$$dW_{sist} = dW_{bat} - dU_{sist} = \frac{1}{2}V_0\,dq = dU_{sist} \qquad \rightarrow \qquad \vec{F}_{sist} = +\nabla U$$

Aquí no ocurre que la fuerza que hace el sistema sea para lograr un estado de menor energía; eso es solo para el sistema aislado a Q constante. En este caso, obviamente, la fuerza que hace el sistema es la misma, es para tirar el dieléctrico hacia adentro:

- A Q constante:
$$\vec{F} = -\nabla\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\nabla C$$
- A V_0 constante:
$$\vec{F} = \nabla\left(\frac{CV_0{}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}V_0{}^2\nabla C$$

y, utilizando la relación $Q = CV_0$, se constata que son iguales. ■

(6) Un cilindro conductor hueco sin espesor, de radio r_1 y largo ℓ, lleva una carga q uniformemente distribuida. Alrededor de él, otro cilindro conductor hueco sin espesor es colocado de forma coaxial, de radio r_2 y mismo largo, tal como indicado en la figura. Este nuevo cilindro lleva una carga $-q$, también uniformemente distribuida. Se llena la región entre los dos cilindros con un material cuya constante dieléctrica es función de la distancia al eje de los cilindros, $\kappa = \kappa(r)$. Considere $\ell \gg r_1, r_2$.



a) Encuentre una expresión para $\kappa(r)$ que lleva un campo electrostático radial independiente de la distancia al eje

b) Calcule la capacidad del condensador cilíndrico correspondiente

c) Calcule la densidad superficial de cargas de polarización en la superficie del material dieléctrico a $r = r_1$ y $r = r_2$, para el $\kappa(r)$ calculado en el ítem (a)

d) Considerando que, en coordenadas cilíndricas , $\nabla \cdot \vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(rA_r\Big)$, calcular la densidad volumétrica de cargas de polarización en el dieléctrico

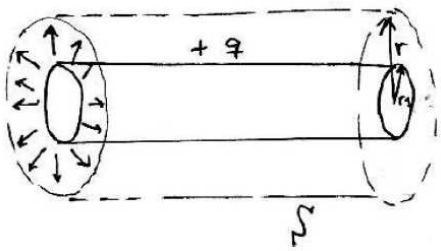
e) Calcular la cantidad total de cargas de polarización, incluyéndose cargas en la superficie y en el volumen del dieléctrico

f) Calcule la energía potencial electrostática almacenada en el condensador

g) Suponiendo que uno puede sacar el material dieléctrico de entre r_1 y r_2 deslizándolo fácilmente sin roce, a lo largo del eje del sistema, calcule el trabajo necesario para remover el material de entre las placas

Solución:

a) Para obtener el campo electrostático en el interior, utilizamos la ley de Gauss para dieléctricos, con una superficie cilíndrica de radio $r \in (r_1, r_2)$ y largo ℓ:



Por simetría, es evidente que $\vec{D} = D(r)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Con esto,

$$\iint_S \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = 2\pi r \ell D(r) = q_{libre} \quad \longrightarrow \quad D(r) = \frac{q}{2\pi r \ell}$$

Así,

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D} = \frac{D(r)}{\kappa(r)\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi\kappa(r)\ell r \epsilon_0}$$

Para que el campo **no** dependa de r, κ debe ser de la forma

$$\kappa(r) = \frac{a}{r}$$

Con ello,

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0 a}$$

b) En este caso, la capacitancia será la misma que un condensador cilíndrico, considerando que $\epsilon = \kappa(r)\epsilon_0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} &= \phi(A) - \phi(B) = \Delta V \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0 a}\,\boldsymbol{\hat{\rho}}\cdot dr\,\boldsymbol{\hat{\rho}} \\
&= \frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0 a}\int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{q(r_2-r_1)}{2\pi\ell\epsilon_0 a} \\
\therefore\ C &= \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\ell\epsilon_0 a}{r_2 - r_1}
\end{aligned}$$

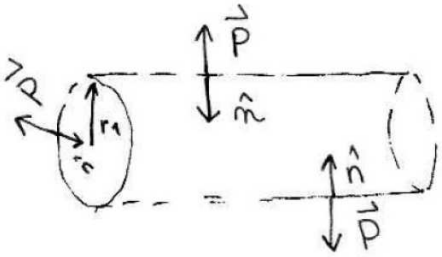
c) La densidad superficial de cargas de polarización está dada por:

$$\sigma = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

y

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = \left(\frac{a}{r} - 1\right)\epsilon_0\vec{E}$$

- Sobre la superficie interior:

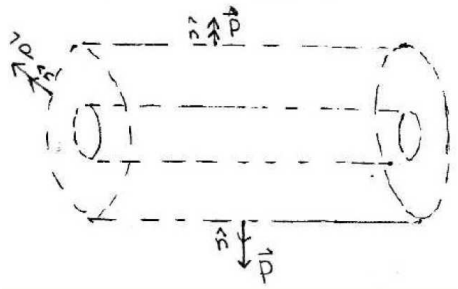


$$\hat{n} = -\,\boldsymbol{\hat{\rho}}\ , \quad \vec{P} = \left(\frac{a}{r_1} - 1\right)\frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0 a}\,\boldsymbol{\hat{\rho}}$$

y entonces,

$$\sigma_1 = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=r_1} = -\left(\frac{a}{r_1} - 1\right)\frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0 a}$$

- Sobre la superficie exterior:



$$\hat{n} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\ , \quad \vec{P} = \left(\frac{a}{r_2} - 1\right) \frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0 a}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

y entonces,

$$\sigma_2 = \vec{P} \cdot \hat{n}\Big|_{r=r_2} = \left(\frac{a}{r_2} - 1\right) \frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0 a}$$

d) La densidad volumétrica de carga de polarización es

$$\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Como $\vec{P} = P(r)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ ya fue calculado anteriormente, simplemente se debe calcular la divergencia como se sugiere en en el enunciado. Así,

$$\rho = \frac{q}{2\pi\ell a r}$$

e) La carga total de polarización es

$$Q_p = \iiint_V \rho\, dV + \iint_{S_1} \sigma_1\, dS + \iint_{S_2} \sigma_2\, dS$$

Como σ_1, σ_2 son constantes en cada superficie respectiva, entonces:

$$\iint_{S_1} \sigma_1\, dS = \sigma_1 \cdot A_1 = -\left(\frac{a}{r_1} - 1\right) \frac{q}{2\pi\ell a} \cdot 2\pi\ell r_1 = -(a - r_1)\frac{q}{a}$$

$$\iint_{S_2} \sigma_2\, dS = \sigma_2 \cdot A_2 = \left(\frac{a}{r_2} - 1\right) \frac{q}{2\pi\ell a} \cdot 2\pi\ell r_2 = (a - r_2)\frac{q}{a}$$

Por otra parte, con $dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$,

$$\iiint_V \rho r\, dr\, d\varphi\, dz = 2\pi\ell \int \rho r\, dr = \frac{q}{a}\int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{q}{a}(r_2 - r_1)$$

Así,

$$Q_p = \frac{q}{a}(r_2 - r_1) - \frac{q}{a}(a - r_1) + \frac{q}{a}(a - r_2) = 0$$

Esto siempre se cumple, pues un dieléctrico es eléctricamente neutro.

f) La energía almacenada por el condensador es:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

donde

$$C = \frac{2\pi\ell\epsilon_0 a}{r_2 - r_1}$$

y por tanto,

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2(r_2 - r_1)}{2\pi\ell\epsilon_0 a}$$

g) Tenemos que, la energía inicial viene dada por:

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{q^2(r_2 - r_1)}{2\pi\ell\epsilon_0 a}$$

Por otra parte, la energía final será

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_f}$$

donde C_f es la capacidad final (en el vacío):

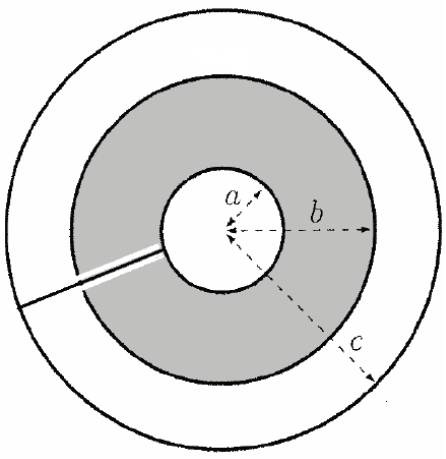
$$C_f = \frac{2\pi\ell\epsilon_0}{\ln(r_2/r_1)} \quad \longrightarrow \quad U_f = \frac{1}{2}\frac{q^2 \ln(r_2/r_1)}{2\pi\ell\epsilon_0}$$

Finalmente, el trabajo necesario para remover el dieléctrico es:

$$W = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\ell\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - \frac{r_2 - r_1}{a}\right)$$

■

(7) Se tienen tres esferas conductoras concéntricas de radios a, b, y c. El espacio entre las dos primeras está lleno con un dieléctrico de constante κ. Inicialmente, la esfera de radio a está descargada y las esferas de radios b y c tienen carga q_1 y q_2, respectivamente. La esfera interior de radio a se conecta con la esfera de radio c con un cable aislado delgado.

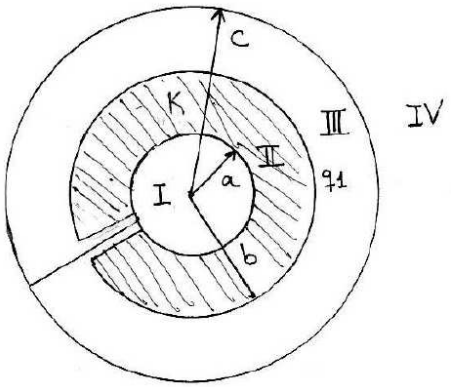


a) Calcular la carga libre en cada esfera

b) Calcular la carga de polarización en la superficie externa y en la superficie interna del dieléctrico

Solución:

a) Definimos las siguientes cuatro regiones:



Al conectar las esferas de radios a y c, éstas distribuirán la carga en ambas de modo que queden al mismo potencial, luego

$$q_2 = q_a + q_c$$

Ahora, para la Región I,

$$\vec{E}(r < a) = \vec{0}$$

pues corresponde al interior de un conductor. Para la Región II, $a < r < b$, se utiliza la ley de Gauss para dieléctricos:

$$\iint_{S_r} \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = 4\pi r^2 D(r) = q_a \quad \longrightarrow \quad \vec{D}(r) = \frac{q_a}{4\pi r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Para la Región III, $b < r < c$,

$$\iint_{S_r} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_a + q_1}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{q_a + q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Por último, para la Región IV con $r > c$, tenemos:

$$\vec{E}(r) = \frac{q_1 + q_a + q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Se sabe que la diferencia de potencial entre las esferas de radios a y c es nula, puesto que ambas están unidas por un cable. Así,

$$0 = \phi(c) - \phi(a) = -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

donde

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{q_a + q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_b^c \frac{dr}{r^2}$$

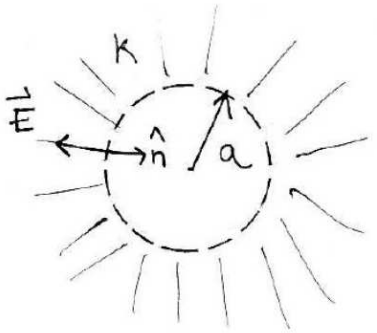
Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{q_a + q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) &= 0 \\
q_a\left(\frac{b-a}{ab}\right) + \kappa(q_a + q_1)\left(\frac{c-b}{bc}\right) &= 0 \\
\therefore\ q_a &= -\left[\frac{a\kappa(c-b)}{c(b-a) + a\kappa(c-b)}\right] q_1
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$q_c = q_2 - q_a = q_2 + \left[\frac{a\kappa(c-b)}{c(b-a)+a\kappa(c-b)}\right] q_1$$

b) Sobre la superficie interna del dieléctrico,

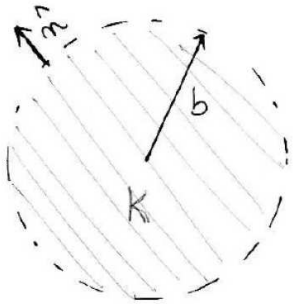


$$\sigma = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=a}\,, \quad \vec{P} = (\epsilon-\epsilon_0)\vec{E}\,, \quad \hat{n} = -\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Así,

$$\sigma_a = -\frac{(\epsilon-\epsilon_0)q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0 a^2} = -\frac{(\kappa-1)q_a}{4\pi\kappa a^2}$$

Sobre la superficie externa,

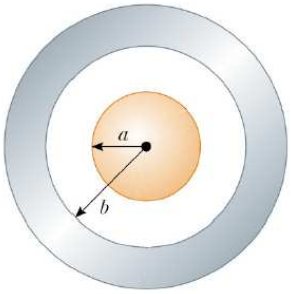


$$\sigma = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=b}\,, \quad \hat{n} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_b = \frac{(\epsilon-\epsilon_0)q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0 b^2} = \frac{(\kappa-1)q_a}{4\pi\kappa b^2}$$

■

2.3. Corriente eléctrica y ley de Ohm microscópica

(1) Dos esferas metálicas concéntricas, de radios a y b, están separadas por un material conductor de conductividad σ constante.



a) Si estas esferas son mantenidas a una diferencia de potencial V constante, encuentre la corriente que va de una a la otra

b) Encuentre la resistencia entre las esferas

c) Observe que, en el caso anterior, se cumple $R \propto 1/C$, donde C es la capacidad. Demuestre que dicha fórmula el válida para dos conductores cualesquiera, separados por un material conductor de conductividad σ constante

Solución:

a) Al establecer una diferencia de potencial sobre los conductores

$$V = \phi(a) - \phi(b)$$

se inducirán cargas Q y $-Q$ sobre las superficies $r = a$ y $r = b$, respectivamente. El campo eléctrico en la región interior se puede determinar a partir de la Ley de Gauss debido a la simetría esférica del problema:

$$\iint_{\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}\ , \quad a < r < b$$

Por otro lado,

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

donde se ha elegido una trayectoria radial. Con ello,

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 abV}{b-a} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{V\, ab}{(b-a)r^2}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Debido a que la zona $a < r < b$ está llena con un material conductor, el campo eléctrico dará origen a un movimiento de cargas (corriente), en donde la densidad está relacionada con el campo mediante la Ley de Ohm Microscópica

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma V\, ab}{(b-a)r^2}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

La corriente que fluye entre los conductores se puede obtener integrando sobre una superficie esférica $\mathcal{S}$ de radio r, $a < r < b$:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS = 4\pi r^2 J(r) = \frac{4\pi\sigma V\, ab}{(b-a)}$$

b) La resistencia vendrá dada por la Ley de Ohm Macroscópica, $V = IR$, y con ello:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

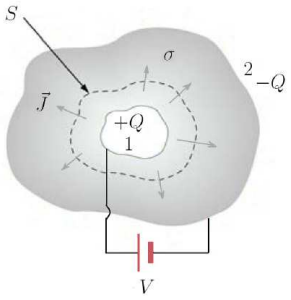
c) Recordando que la capacidad de un condensador esférico es

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\, ab}{b-a}$$

entonces, se tiene que:

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

Veamos que esto se cumple en el caso general: Sean 1 y 2 dos conductores cualesquiera, separados por un material de conductividad σ:



Se tendrá un flujo de corriente dado por:

$$I = \iint_{\Omega} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS$$

Por ley de Ohm,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Reemplazando,

$$I = \sigma \iint_{\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \sigma \frac{Q}{\epsilon_0}$$

por ley de Gauss. Por otro lado, si C es la capacidad del sistema, se cumple que

$$Q = CV$$

Reemplazando,

$$I = \frac{\sigma}{\epsilon_0} CV \quad \longrightarrow \quad R = \frac{V}{I} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

■

(2) Considere un conductor perfecto, inicialmente con carga Q_0, y completamente rodeado por un medio uniforme de conductividad σ y constante dieléctrica ϵ.

a) Si el conductor es una esfera de radio a, muestre que su carga como función del tiempo es

$$Q(t) = Q_0\, e^{-\sigma t/\epsilon}$$

b) Muestre que el resultado anterior es válido independientemente de la forma del conductor

Solución:

a) Sea $Q(t)$ la carga sobre la superficie esférica en el instante t. Esta generará un campo eléctrico esféricamente simétrico para $r > a$:

$$\vec{E}(r,t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Al ser el medio circundante un conductor, se tendrá una densidad de corriente como respuesta a dicho campo:

$$\vec{J}(r,t) = \sigma\,\vec{E}(r,t) = \frac{\sigma Q(t)}{4\pi\epsilon r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Esta es una corriente que fluye isotrópicamente de forma radial. La corriente se obtiene de integrar $\vec{J}$ sobre una superficie cerrada que contenga a la esfera conductora, en particular se puede tomar una esfera de radio $r > a$:

$$I(t) = \iint\limits_{esfera} \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{\sigma Q(t)}{\epsilon}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\frac{dQ}{dt} = -I(t) \quad\longrightarrow\quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma Q}{\epsilon} \quad\longrightarrow\quad Q(t) = Q_0\,e^{-\sigma t/\epsilon}$$

donde el signo aparece por tratarse de una descarga.

b) El resultado anterior es válido sin importar la forma de los conductores. En efecto, sea $\mathcal{S}$ una superficie cerrada que contenga completamente al conductor. La corriente que se genera está dada por:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS = \sigma\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sigma\,\frac{Q}{\epsilon}$$

donde hemos utilizado la ley de Ohm y la ley de Gauss. Es claro que

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma Q}{\epsilon}$$

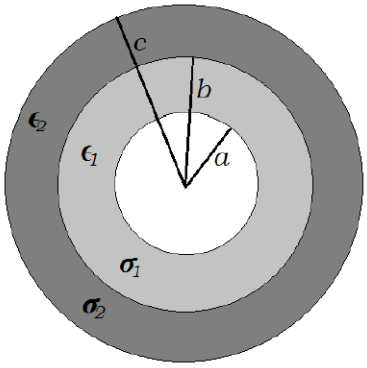
y se obtiene la misma ecuación diferencial que en el caso anterior.

■

(3) Entre dos cilindros conductores coaxiales muy largos, de radios a y $c > a$, se llena con materiales de conductividades σ_1 y σ_2, y permitividades ϵ_1 y ϵ_2, como muestra la figura.

a) Encuentre la resistencia entre el núcleo y el conductor externo.

b) Si se conecta una diferencia de potencial V_0 entre el núcleo y el conductor externo, calcule la densidad de corriente J y la corriente I que circula.



Solución:

a) Asumimos que la corriente circula radialmente desde la placa interna a la externa, de tal forma que una corriente I se relaciona con la densidad como:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_{\mathcal{S}} J(r)\, dS$$

en donde $\mathcal{S}$ es el manto de un cilindro de radio r coaxial con los cascarones conductores. Por simetría, la densidad de corriente sale de la integral. Si ℓ denota el largo de los cables, entonces

$$I = J(r) \iint_{\mathcal{S}} dS = 2\pi r\ell\, J(r) \quad \longrightarrow \quad J(r) = \frac{I}{2\pi r\ell}$$

Suponiendo válida la ley de Ohm en este material, el campo eléctrico podemos calcularlo fácilmente. No obstante, debemos ser cuidadosos pues la conductividad varía en cada región llena de material conductor. El campo en las regiones queda, respectivamente,

$$E_1 = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r\ell}\,, \quad E_2 = \frac{I}{2\pi\sigma_2 r\ell}$$

ambos en dirección radial. La diferencia de potencial entre ambas placas es

$$|\Delta V| = \int_a^c E(r)\, dr = \int_a^b E_1(r)\, dr + \int_b^c E_2(r)\, dr = \frac{I \ln(b/a)}{2\pi\sigma_1\ell} + \frac{I \ln(c/b)}{2\pi\sigma_2\ell}$$

y, por tanto, la resistencia es:

$$R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma_1\ell} + \frac{\ln(c/b)}{2\pi\sigma_2\ell}$$

Observación. Notar que $|\Delta V| = |\Delta V_1| + |\Delta V_2|$, por lo que $R = R_1 + R_2$. Esto demuestra que el sistema pudo haberse considerado como dos resistores en serie, para el cual sabemos que vale la relación $R = \sum_k R_k$.

b) Por la ley de Ohm, si se aplica una diferencia de potencial V_0 entre las placas, la corriente que fluirá de una a la otra es

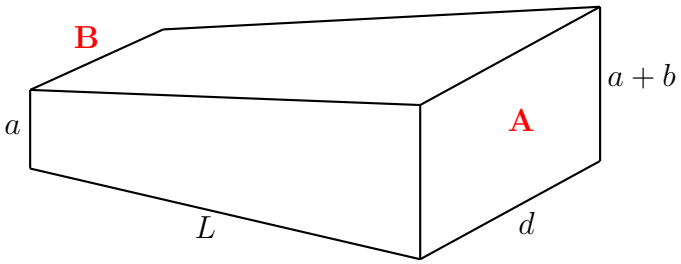
$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{2\pi\ell V_0}{\dfrac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \dfrac{\ln(c/b)}{\sigma_2}}$$

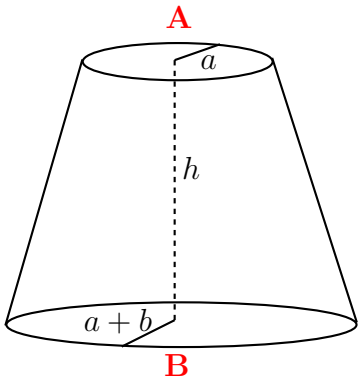
y la densidad de corriente es

$$J(r) = \frac{I}{2\pi\ell r} = \frac{V_0}{\dfrac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \dfrac{\ln(c/b)}{\sigma_2}} \frac{1}{r}$$

■

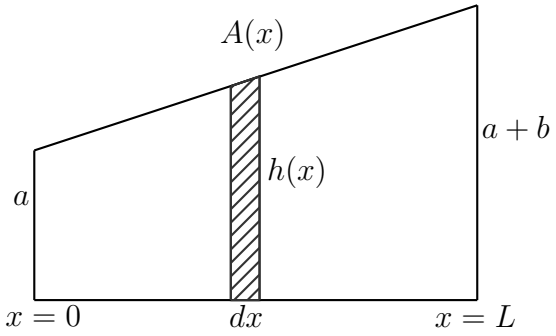
(4) Suponga que se construye una cuña (figura abajo izquierda) usando material de resistividad ρ. Determine la resistencia del cuerpo entre las caras A y B mostradas en la figura. Repita para el cono truncado mostrado abajo a la derecha. El material es el mismo que en el primer resistor.





Solución:

Para este problema debemos saber que la resistencia de un conductor de área transversal A y largo L, hecho con un material de resistividad ρ, está dada por $R = \rho\, L/A$. La idea consiste en que, si la corriente circula como indica el enunciado, el resistor se puede considerar como una sucesión de resistores de área $A(x)$ y ancho dx:



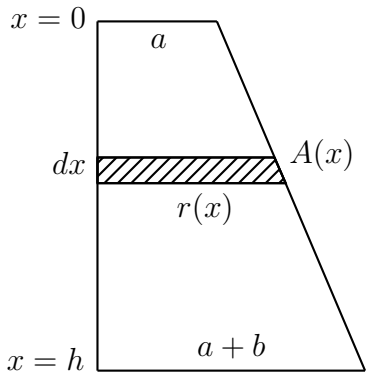
La resistencia neta del cuerpo se obtiene sumando todas estas contribuciones, dado que podemos considerar la sucesión como muchos resistores en serie, para lo cual sabemos que se cumple $R = \sum_i R_i$ con:

$$A = A(x) = h(x)\, d = \left(a + \frac{b}{L}\, x\right)\, d \quad \longrightarrow \quad dR = \frac{\rho\, dx}{A(x)}$$

Por lo tanto,

$$R = \int_0^L \frac{\rho}{\left(a + \dfrac{b\, x}{L}\right)}\, dx = \frac{\rho L}{d} \int_0^1 \frac{dt}{a + b\, t} = \frac{\rho L}{bd} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

Para el caso del cono truncado,



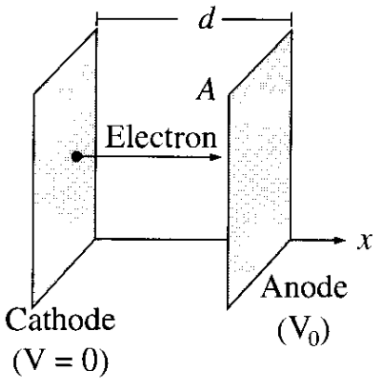
$$A = A(x) = \pi r^2(x) = \pi \left(a + \frac{b}{h}\, x\right)^2 \quad \longrightarrow \quad dR = \frac{\rho\, dx}{\pi \left(a + \dfrac{b\, x}{h}\right)^2}$$

Así,

$$R = \int_0^h dR = \frac{\rho}{\pi} \int_0^h \frac{dx}{\left(a + \dfrac{b\, x}{h}\right)^2} = \frac{\rho h}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{(a + b\, t)^2} = \frac{\rho h}{b\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + b}\right)$$

■

(5) **[Propuesto]** En un diodo de vacío, los electrones son "evaporados" en un cátodo caliente, a potencial cero, y acelerados a través de una separación con el ánodo, que se mantiene a potencial positivo V_0. La nube de electrones que se mueven dentro de la separación (llamados *carga espacial*) rápidamente confluyen al otro lado. A partir de entonces existe una corriente constante entre las placas. Supongamos que las placas son relativamente grandes comparadas con la separación entre placas ($A \gg d^2$ en la figura), de modo tal que se pueden despreciar los efectos de borde. Entonces V, ρ, and v (la velocidad de los electrones) son solo funciones de x:



a) Escriba la ecuación de Poisson para la región entre las placas.

b) Asumiendo que los electrones parten del reposo, ¿cuál es su velocidad en el punto x, donde el potencial es $V(x)$?

c) En el estado estacionario, I es independiente de x. ¿Cuál es, entonces, la relación entre ρ y v?

d) Use los tres resultados anteriores para obtener la ecuación diferencial para V, luego de eliminar ρ y v.

e) Resuelva esta ecuación para V como función de x, V_0, and d. Grafique $V(x)$, y compare con el resultado sin *carga espacial*. Además, encuentre ρ y v como funciones de x.

f) Muestre que

$$I = K\, V_0^{\,3/2}$$

y encuentre la constante K. Esta ecuación es llamada **Ley de Child-Langmuir**. Note que el *diodo de carga espacial* es no-lineal, y por tanto no obedece la ley de Ohm.

Solución:

a) Como el potencial es solo función de x, entonces $\dfrac{d^2\,V}{dx^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

b) De la conservación de energía,

$$qV = \frac{mv^2}{2} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

c) Es claro que:

$$dq = \rho\, dV = \rho\, A\, dx \quad \longrightarrow \quad \frac{dq}{dt} = \rho\, A\, \frac{dx}{dt}$$

Así,

$$I = \rho\, A\, v$$

Nota: ρ, y por tanto también I, son negativos.

d) Ahora,

$$\frac{d^2\,V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{I}{\epsilon_0\, A\, v} = -\frac{I}{\epsilon_0 A}\sqrt{\frac{m}{2qV}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2\,V}{dx^2} = \beta\, V^{-1/2}$$

con $\beta = -\dfrac{I}{\epsilon_0 A}\sqrt{\dfrac{m}{2q}}$. **Nota:** I es negativa, entonces β es positivo; q es positivo.

e) Multiplicando por $V' = \dfrac{dV}{dx}$,

$$V' \frac{dV'}{dx} = \beta\, V^{-1/2} \frac{dV}{dx} \quad \longrightarrow \quad \int V\, dV' = \beta \int V^{-1/2}\, dV \quad \longrightarrow \quad \frac{{V'}^2}{2} = 2\beta\, V^{1/2} + cte$$

Pero $V(0) = V'(0) = 0$ (el cátodo está a potencial cero, y el campo en el cátodo es cero), y entonces la constante es cero. Así,

$${V'}^2 = 4\beta\, V^{1/2} \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dx} = 2\sqrt{\beta}\, V^{1/4} \quad \longrightarrow \quad V^{-1/4}\, dV = 2\sqrt{\beta}\, dx$$

$$\therefore \ \frac{4}{3} V^{3/4} = 2\sqrt{\beta}\, x + cte$$

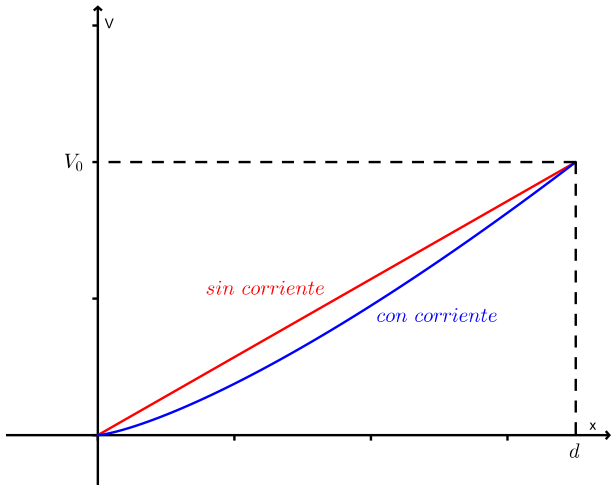
Pero $V(0) = 0$, y esta nueva constante también es nula. Así,

$$V^{3/4} = \frac{3}{2}\sqrt{\beta}\, x \quad \longrightarrow \quad V(x) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\beta}\right)^{4/3} x^{4/3} = \left(\frac{9\beta}{4}\right)^{2/3} x^{4/3} = \left(\frac{81 I^2 m}{32 {\epsilon_0}^2 A^2 q}\right)^{1/3} x^{4/3}$$

En términos de V_0, en vez de I,

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$$

Sin la *carga espacial*, el potencial crecería linealmente con la distancia: $V(x) = V_0 \left(\dfrac{x}{d}\right)$



Por otra parte,

$$\rho = -\epsilon_0 \frac{d^2 V}{dx^2} = -\epsilon_0 V_0 \frac{1}{d^{4/3}} \frac{4}{3} \frac{x^{-2/3}}{3} = -\frac{4\epsilon_0 V_0}{9 (d^2\, x)^{2/3}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}} \sqrt{V} = \sqrt{2qV_0/m} \left(\frac{x}{d}\right)^{2/3}$$

f)

$$V(d) = V_0 = \left(\frac{81 I^2 m}{32 {\epsilon_0}^2 A^2 q}\right)^{1/3} d^{4/3} \quad \longrightarrow \quad {V_0}^3 = \frac{81 m d^4}{32 {\epsilon_0}^2 A^2 q} I^2 \quad \longrightarrow \quad I^2 = \underbrace{\frac{32 {\epsilon_0}^2 A^2 q}{81 m d^4}}_{= K^2} {V_0}^3$$

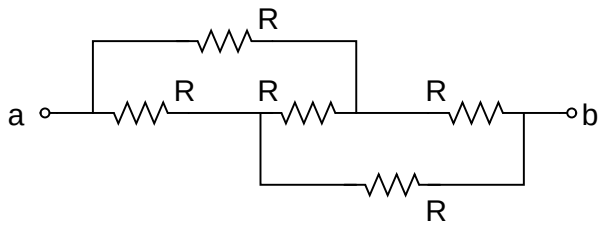
y por tanto,

$$I = K\, {V_0}^{3/2}$$

■

2.4. Ley de Ohm macroscópica: circuitos fem/R

(1) Determine la resistencia equivalente, o de *Thevenin*, entre los puntos a y b:



Solución:

Optaremos por un método muy sencillo: aplicando una corriente I al circuito, sea V el voltaje entre los puntos a, b. Así,

$$V = V_a - V_b = I\,R_{eq}$$

Sean c, d los nodos intermedios. De las Reglas de Kirchhoff,

$$\sum_{nodo\ \ a} i_k = 0 \quad \longrightarrow \quad I + i_{d\to a} + i_{c\to a} = I + \frac{V_d - V_a}{R} + \frac{V_c - V_a}{R} = 0$$

$$\sum_{nodo\ \ c} i_k = 0 \quad \longrightarrow \quad i_{a\to c} + i_{b\to c} + i_{d\to c} = \frac{V_a - V_c}{R} + \frac{V_b - V_c}{R} + \frac{V_d - V_c}{R} = 0$$

$$\sum_{nodo\ \ d} i_k = 0 \quad \longrightarrow \quad i_{a\to d} + i_{b\to d} + i_{c\to d} = \frac{V_a - V_d}{R} + \frac{V_b - V_d}{R} + \frac{V_c - V_d}{R} = 0$$

$$\sum_{nodo\ \ b} i_k = 0 \quad \longrightarrow \quad -I + i_{d\to b} + i_{c\to b} = -I + \frac{V_d - V_b}{R} + \frac{V_c - V_b}{R} = 0$$

De las dos ecuaciones intermedias, es claro que $V_c = V_d$ y por tanto $i_{c\to d} = i_{d\to c} = 0$. Así, llamando V_o al voltaje en los nodos c, d:

$$I + \frac{V_o - V_a}{R} + \frac{V_o - V_a}{R} = 0 \quad \leftrightarrow \quad V_a = \frac{IR}{2} + V_o$$

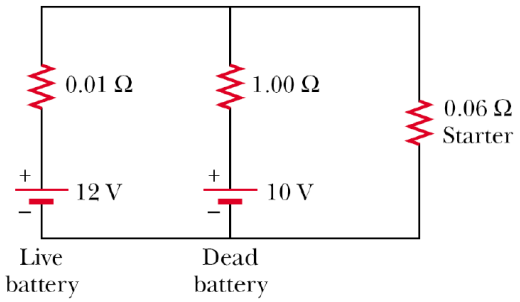
$$-I + \frac{V_o - V_b}{R} + \frac{V_o - V_b}{R} = 0 \quad \leftrightarrow \quad V_b = -\frac{IR}{2} + V_o$$

Por lo tanto,

$$V = V_a - V_b = IR \quad \longrightarrow \quad R_{eq} = R$$

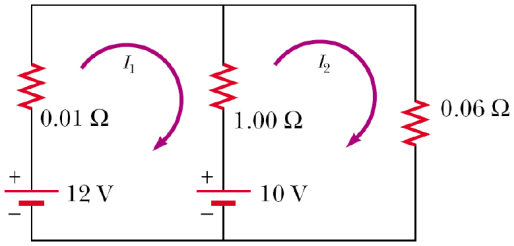
■

(2) Una batería descargada se carga conectándola a la batería cargada de otro automóvil mediante cables para corriente. Determine la corriente del motor de arranque y en la batería descargada.



Solución:

Utilizaremos la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) para cada malla:



- **Malla 1.**

$$-12 + 0.01 \cdot I_1 + 1 \cdot (I_1 - I_2) + 10 = 0$$

- **Malla 2.**

$$-10 + 1 \cdot (I_2 - I_1) + 0.06 \cdot I_2 = 0$$

De la primera ecuación se obtiene que

$$I_2 = 1.01\, I_1 - 2$$

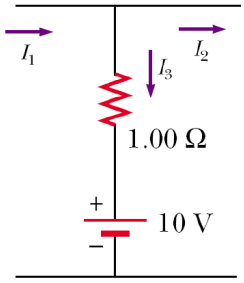
Reemplazando,

$$0.0706\, I_1 - 2.02 = 10 \quad \longrightarrow \quad I_1 = 170.25\,\text{A}$$

Con esto,

$$I_2 = 169.95\,\text{A}$$

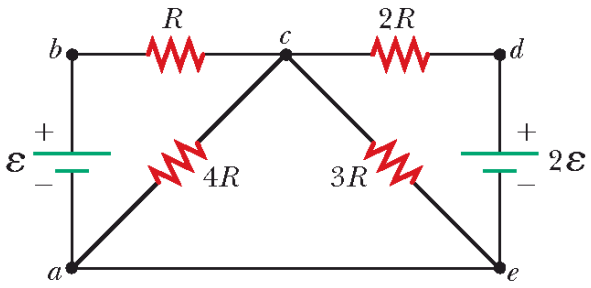
I_2 es la corriente a través del motor de arranque, mientras que la corriente a través de la batería descargada será, según nuestra convención,



$$I_{batery} = I_3 = I_1 - I_2 = 0.2975\,\text{A}$$

■

(3) Tomando $R = 1\,\text{k}\Omega$ y $\varepsilon = 250\,\text{V}$ en la figura, determine la dirección y magnitud de la corriente en el cable horizontal entre los puntos a y e.



Solución:

Definamos las siguientes corrientes:

- I_1 la corriente que circula por el $\triangle abc$ en dicho orden
- I_2 la corriente que circula por el $\triangle cde$ en dicho orden
- I_3 la corriente que circula por el $\triangle cea$ en dicho orden

Utilizando la LVK, se cumple que:

$$-\varepsilon + I_1 R + 4R(I_1 - I_3) = 0\ , \quad 2RI_2 + 2\varepsilon + 3R(I_2 - I_3) = 0\ , \quad 4R(I_3 - I_1) + 3R(I_3 - I_2) = 0$$

Escribiendo el sistema en forma matricial,

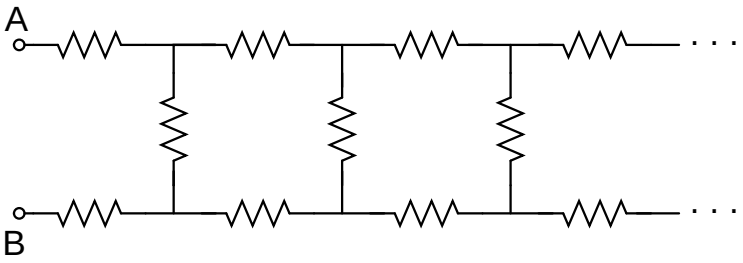
$$\begin{pmatrix} 5R & 0 & -4R \\ 0 & 5R & -3R \\ -4R & -3R & 7R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -2\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, I_3 viene dada por:

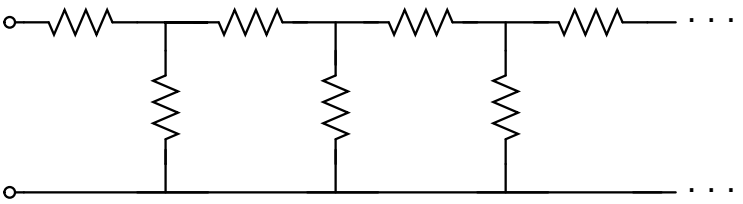
$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5R & 0 & \varepsilon \\ 0 & 5R & -2\varepsilon \\ -4R & -3R & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5R & 0 & -4R \\ 0 & 5R & -3R \\ -4R & -3R & 7R \end{vmatrix}} = \frac{5R(0 - 6\varepsilon R) + \varepsilon(0 + 20R^2)}{5R(35R^2 - 9R^2) - 4R(0 + 20R^2)} = \frac{-10\varepsilon R^2}{50R^3} = -\frac{\varepsilon}{5R} = -50\,\text{mA}$$

y con ello sabemos que va en dirección $a \to e$. ■

(4) *a*) Se tiene un circuito de infinitos resistores, cada uno con resistencia R, como muestra la figura. Calcular la resistencia equivalente entre los puntos A y B.

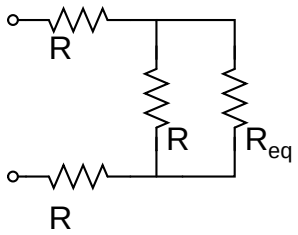


b) Lo mismo para la siguiente configuración:



Solución:

a) La idea es la siguiente: si hacemos un corte luego del primer elemento del patrón de resistencias, notaremos que el resto de ellas es exactamente igual al caso antes de hacer el corte (pues son infinitas resistencias) y por tanto son iguales a la resistencia equivalente pedida.



De acuerdo a las reglas para combinar resistencias en serie y en paralelo, se establece la ecuación:

$$R_{eq} = R + R + R \parallel R_{eq} \quad \longrightarrow \quad {R_{eq}}^2 - 2RR_{eq} - 2R^2 = 0$$

Resolviendo,

$$R_{eq} = R(1 + \sqrt{3})$$

b) Repetimos el cálculo anterior, hasta obtener que:

$$R_{eq} = \varphi\, R$$

con φ el **número áureo**. Para mayor información se sugiere revisar aquí.

■

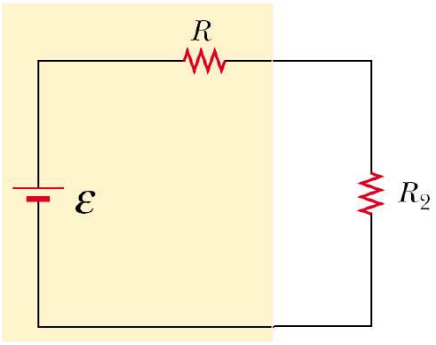
(5) Una batería real puede modelarse por una *f.e.m.* ε ideal y una resistencia interna en serie R. Una resistencia de carga R_2 se conecta a los terminales de la batería.

a) Determine el valor de R_2 tal que la diferencia de potencial aplicada a los terminales sea máxima

b) Determine el valor de R_2 para obtener una corriente máxima en el circuito

c) Determine el valor de R_2 para que la potencia consumida por ésta sea la máxima posible

d) Determine el valor de R para que la potencia consumida por R_2 sea la máxima posible



Solución:

a) Primero que todo, determinamos la corriente circulante,

$$-\varepsilon + IR + IR_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R + R_2}$$

Así, la diferencia de potencial entre los extremos de la batería es:

$$V = IR_2 = \frac{R_2\varepsilon}{R + R_2} = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{R}{R_2}}$$

Luego, la diferencia de potencial será máxima cuando $R_2 \to \infty$ y valdrá ε, igual que la *f.e.m.*

b) Teníamos que

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_2}$$

Luego, la corriente será máxima si $R_2 = 0$, y equivale a cortocircuitar los terminales de la batería.

c) La potencia consumida por R_2 está dada por

$$\mathcal{P} = IV = \frac{R_2\varepsilon}{R + R_2}\frac{\varepsilon}{R + R_2} = \frac{R_2\varepsilon^2}{(R + R_2)^2}$$

Para maximizar,

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R_2} = \frac{\varepsilon^2(R + R_2)^2 - 2(R + R_2)R_2\varepsilon^2}{(R + R_2)^4} = 0$$

Así,

$$(R + R_2)^2 - 2(R + R_2)R_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad R_2 + R - 2R_2 = 0$$

Finalmente, la potencia será máxima si

$$R_2 = R$$

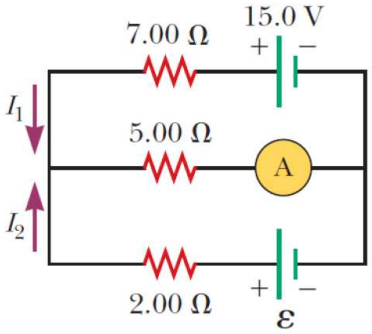
es decir, se debe colocar una resistencia igual a la resistencia interna de la batería.

d) Se puede repetir el cálculo anterior, pero es más fácil optar por la intuición: si R es distinta de cero, entonces ésta consumirá parte de la potencia que suministra la fuente. Así, para que la resistencia de carga consuma toda la potencia suministrada por la fuente, se debe cumplir que:

$$R = 0$$

■

(6) El amperímetro ideal de la figura mide 2 A. Determine I_1, I_2 y ε. Obtenga la potencia disipada en cada resistencia.



Solución:

Suponemos que la corriente fluye como muestra la figura. Por la ley de nodos aplicada al nodo de la izquierda, se debe cumplir que

$$-I_1 - I_2 + 2 = 0 \quad \longrightarrow \quad I_1 + I_2 = 2$$

en donde 2 A es la corriente que, por enunciado, pasa por el amperímetro. La ley de las mallas aplicada a la malla superior entrega

$$2 \cdot 5 - 15 + 7I_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad I_1 = \frac{5}{7}\,\mathrm{A}$$

y por tanto

$$I_2 = 2 - I_1 = \frac{9}{7}\,\mathrm{A}$$

La misma ley aplicada a la malla de abajo implica

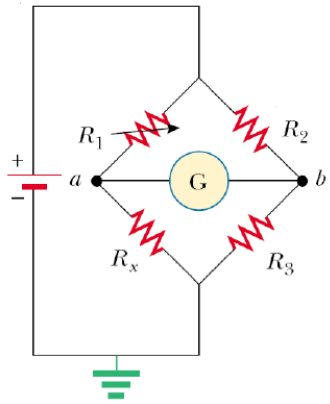
$$2 \cdot 5 - \varepsilon + 2I_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{88}{7}\,\mathrm{V}$$

La potencia en cada resistencia la obtenemos a partir del Efecto Joule, $\mathcal{P} = I^2 R$:

$$\mathcal{P}_{7\,\Omega} = \frac{25}{49} \cdot 7\,\mathrm{W} = \frac{25}{7}\,\mathrm{W}\ , \quad \mathcal{P}_{5\,\Omega} = 4 \cdot 5\,\mathrm{W} = 20\,\mathrm{W}\ , \quad \mathcal{P}_{2\,\Omega} = \frac{81}{49} \cdot 2\,\mathrm{W} = \frac{162}{49}\,\mathrm{W}$$

■

(7) El circuito de la figura es llamado Puente de Wheastone y se usa para calibrar resistencias. El dispositivo está formado por 3 resistencias, de las cuales 2 son ajustables, y un galvanómetro (dispositivo que sirve para medir corrientes). Para realizar la medida, se ajustan las resistencias variables R_1 y R_2 hasta que el galvanómetro marque cero. Exprese el valor de R_x en función de las otras 3 resistencias. Modele al galvanómetro como una resistencia R_g.



Solución:

La corriente que circula por el galvanómetro es:

$$I_g = \frac{V_a - V_b}{R_g}$$

Para que sea nula, debe cumplirse que: $V_a = V_b$. Luego, aplicando LCK,

- **Nodo a:**
$$\frac{V - V_a}{R_1} = \frac{V_a - 0}{R_x} \quad \longrightarrow \quad V - V_a = \frac{R_1}{R_x} V_a$$
- **Nodo b:**
$$\frac{V - V_b}{R_2} = \frac{V_b - 0}{R_3} \quad \longrightarrow \quad V - V_b = \frac{R_2}{R_3} V_b$$

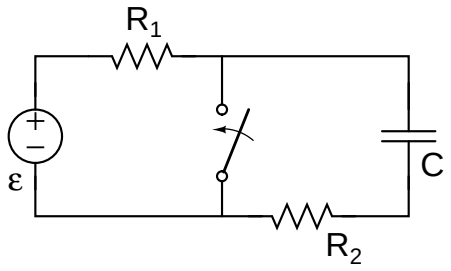
Igualando, obtenemos:

$$\frac{R_1}{R_x} V_a = \frac{R_2}{R_3} V_b \quad \longrightarrow \quad R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

■

2.5. Circuitos RC

(1) En el circuito de la figura, suponga que el interruptor ha estado abierto por un tiempo muy largo, y en $t = 0$ se cierra.



a) ¿Cuál es la constante de tiempo antes de que se cerrara el interruptor?

b) ¿Cuál es la constante de tiempo después de que se cierra el interruptor?

c) Encuentre la corriente a través del interruptor como función del tiempo una vez que el interruptor se ha cerrado

Solución:

a) Antes que el interruptor se cerrara, las dos resistencias R_1 y R_2 están en serie con el condensador. Debido a que la resistencia equivalente es $R_{eq} = R_1 + R_2$, la constante de tiempo está dada por

$$\tau = R_{eq} = (R_1 + R_2)C$$

y la carga almacenada en el condensador es

$$q(t) = C\varepsilon\Big(1 - e^{-t/\tau}\Big)$$

b) Una vez que el interruptor se cierra, el circuito cerrado a la derecha se vuelve un circuito RC de descarga del capacitor que decae con constante de tiempo $\tau = R_2\, C$. La carga comienza a decaer acorde a

$$q(t) = C\varepsilon\, e^{-t/\tau}$$

c) La corriente a través del interruptor consiste en 2 fuentes: la corriente constante I_1 del circuito izquierdo, y la corriente que decae I_2 del circuito RC. Las corrientes están dadas por

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

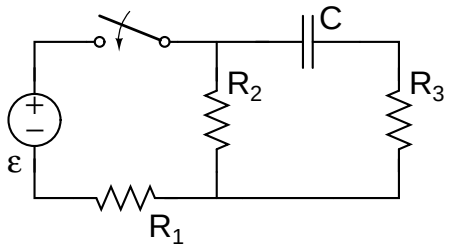
$$I_2(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{C\varepsilon}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/\tau}$$

Así, la corriente total será:

$$I_T(t) = I_1(t) + I_2(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/\tau}$$

■

(2) En el circuito de la figura, el interruptor se encuentra cerrado durante un tiempo muy largo.



a) ¿Cuál es la corriente en cada resistencia?

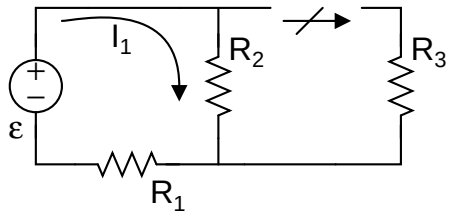
b) ¿Cuál es la carga en el condensador?

c) En $t = 0$ se abre el interruptor. Encuentre la corriente que pasa por la resistencia R_2 en función del tiempo

d) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la carga en C disminuya hasta 4/5 del valor en $t = 0$?

Solución:

a) El interruptor ha estado cerrado durante un tiempo muy largo, esto significa que el condensador se ha cargado completamente. Cuando esto sucede, el condensador equivale a un circuito abierto y no pasa corriente a través de él. Bajo estas circunstancias, solo habrá corriente por la primera malla:



$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

que es la corriente circulante por R_1 y R_2. La corriente por R_3 es nula.

b) Para obtener la carga en el condensador, primero debemos obtener el voltaje a través del mismo y luego utilizar la relación que relaciona el voltaje con la carga acumulada $C\,V_C(t) = q(t)$. Nos interesa la carga final del condensador, esto es

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = C\,V_C(t \to \infty)$$

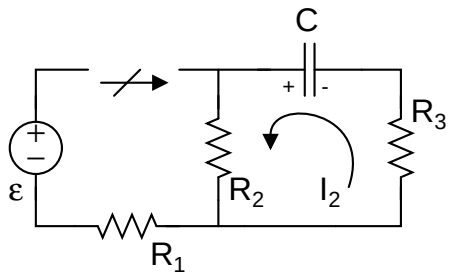
Como ya vimos, después de un tiempo suficientemente largo no hay corriente por la malla derecha, por lo que no hay diferencia de potencial entre los extremos de R_3. Por lo tanto, el voltaje en el capacitor será igual a la caída de voltaje en R_2,

$$V_C(t \to \infty) = V_{R_2} = I_1 R_2 = \frac{\varepsilon\, R_2}{R_1 + R_2}$$

Con ello,

$$q(t \to \infty) = \frac{\varepsilon\, C\, R_2}{R_1 + R_2}$$

c) Notemos que, al abrir el interruptor, no pasa corriente por la malla de la izquierda y se inicia un proceso de descarga en el condensador:



$$I_2 R_3 - V_C(t) + I_2 R_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad I_2(R_2 + R_3) = V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Notemos que I_2 es positiva; esto significa que las cargas positivas están dejando la placa positiva y están llegando a la placa negativa. Es decir, la carga entre las placas está disminuyendo a medida que I_2 sea positiva:

$$I_2 = -\frac{dq}{dt}$$

Así, obtenemos una EDO de primer orden para $q(t)$:

$$-\frac{dq}{dt}(R_2 + R_3) = \frac{q}{C} \quad \longrightarrow \quad q(t) = q_0\, e^{-t/C(R_2+R_2)}$$

con q_0 la carga inicial del condensador, calculada en el apartado anterior.

d) Para determinar el tiempo que debe pasar para obtener 4/5 de la carga inicial, resolvemos la ecuación:

$$\frac{4}{5}\, q_0 = q_0\, e^{-t^*/C(R_2+R_3)}$$

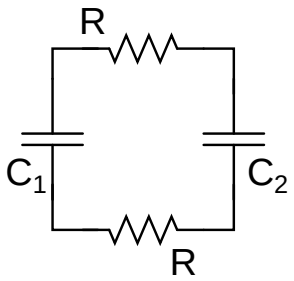
$$\ln(4/5) = -\frac{t^*}{C(R_2 + R_3)}$$

con lo que

$$t^* = C(R_2 + R_3)\ln(5/4)$$

■

(3) Dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 están conectados a dos resistencias iguales R, como muestra la figura. En $t = 0$ el condensador C_1 posee una carga Q_0, mientras que C_2 está descargado.



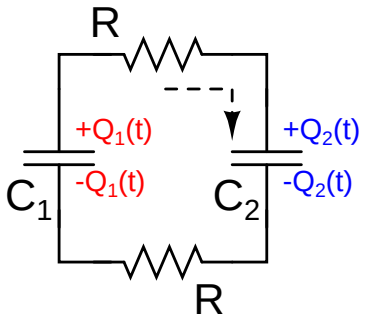
a) Obtenga las cargas de los condensadores en función del tiempo

b) ¿Cuál es la energía disipada por las resistencias?

c) Encuentre la energía disipada total hasta que se alcance el equilibrio. ¿De qué depende dicha cantidad? Corrobore o refute su hipótesis y explique el por qué de ello

Solución:

a) Intuitivamente, esperamos que en presencia de las resistencias, y ausencia de baterías externas, el condensador inicialmente cargado se descargue, traspasando parte de su carga al condensador inicialmente descargado. Veamos el comportamiento general de las cargas en cada condensador, como función del tiempo. Aplicando la ley de las mallas, y tomando como sentido de la corriente el de la figura, vemos que:



$$IR + \frac{Q_2}{C_2} + IR - \frac{Q_1}{C_1} = 0$$

La corriente que viaja por la malla es la misma, por lo que la tasa a la que se carga o descarga cada condensador es exactamente I. En ese caso, tenemos que

$$I(t) = -\frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt}$$

Note que ambas cargas no son independientes, ya que están supeditadas a la ley de conservación de carga:

$$Q_0 = Q_1(t) + Q_2(t) \ , \quad \forall t$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$2R\,\frac{dQ_2}{dt} + \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_0 - Q_2}{C_1} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dQ_2}{dt} + \frac{Q_2}{2RC_0} = \frac{Q_0}{2RC_1}$$

con ${C_0}^{-1} \equiv {C_1}^{-1} + {C_2}^{-1}$. La EDO anterior puede ser resuelta con su método favorito del curso de Ecuaciones Diferenciales; en este caso, utilizaremos la Transformada de Laplace: *Sea* $F(s) = \mathcal{L}\{Q_2(t)\}$, *así*

$$s\,F(s) - Q_2(0) + \frac{F(s)}{2RC_0} = \frac{Q_0/2RC_1}{s} \quad \longrightarrow \quad F(s) = \frac{Q_0 C_0/C_1}{s(2RC_0\,s+1)} = \frac{Q_0/2RC_1}{s(s+1/2RC_0)}$$

ya que $Q_2(0) = 0$. Aplicando fracciones parciales,

$$F(s) = \frac{Q_0\,C_0}{C_1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/2RC_0}\right) \quad \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{} \quad Q_2(t) = \frac{Q_0\,C_0}{C_1}\left(1 - e^{-t/2RC_0}\right)$$

Por tanto,

$$Q_2(t) = \frac{Q_0\, C_0}{C_1}\left(1 - e^{-t/2RC_0}\right) \qquad \wedge \qquad Q_1(t) = Q_0 - \frac{Q_0\, C_0}{C_1}\left(1 - e^{-t/2RC_0}\right)$$

Las cargas finales de los condensadores serán:

$$Q_{1,f} = Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right) \ , \quad Q_{2,f} = Q_0\,\frac{C_0}{C_1}$$

b) Del problema anterior, podemos obtener la corriente circulante por la malla:

$$I(t) = \frac{dQ_2}{dt} = \frac{Q_0}{2RC_1}\, e^{-t/2RC_0}$$

La potencia que disipa ambas resistencias es, por lo tanto,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(t) = 2I^2R = \frac{{Q_0}^2}{2R{C_1}^2}\, e^{-t/RC_0}$$

c) La energía disipada corresponde a la integral de la potencia disipada por las resistencias desde $t = 0$ hasta el infinito, cuando se alcanza el equilibrio. Así,

$$\Delta E = \int_0^\infty \mathcal{P}(t)\, dt = \frac{{Q_0}^2}{2R{C_1}^2}\int_0^\infty e^{-t/RC_0}\, dt = \frac{{Q_0}^2\, C_0}{2{C_1}^2}$$

que es **independiente** de R. La energía neta disipada es la diferencia entre la energía inicial y la final del sistema. Por una parte, la energía inicial corresponde a la energía almacenada en el condensador cargado, la cual es por supuesto, independiente de R. Por otra parte, la energía final corresponde a la energía almacenada ahora en ambos condensadores, cargados con sus respectivas cargas finales. Nuevamente, nada depende de R, por lo que la diferencia de energía tampoco lo hará. Por ello esperamos que la energía disipada sea independiente de R. Note que

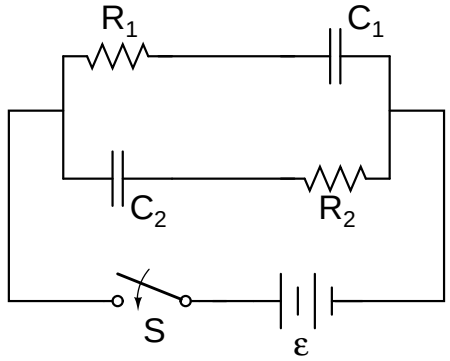
$$E_i = \frac{{Q_0}^2}{2C_1} \ , \quad E_f = \frac{{Q_{1,f}}^2}{2C_1} + \frac{{Q_{2,f}}^2}{2C_2}$$

de donde

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{{Q_0}^2\, C_0}{2{C_1}^2}$$

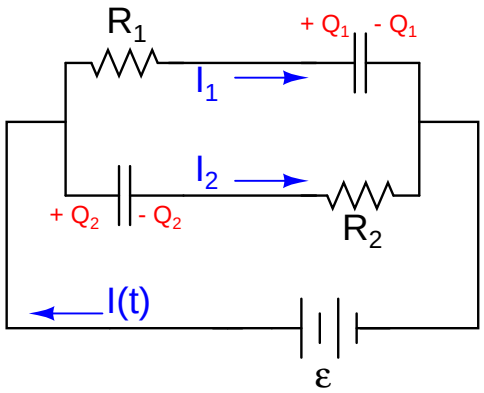
■

(4) En $t = 0$ el interruptor del circuito mostrado abajo se cierra. Obtenga las cargas en los capacitores, y las corrientes que fluyen por las resistencias, si los condensadores inicialmente estaban descargados.



Solución:

Supongamos que la corriente circula como muestra la figura de abajo, y apliquemos ley de las mallas a la malla del borde exterior:



$$-\varepsilon + I_1 R_1 + \frac{Q_1}{C_1} = 0$$

Mientras que en la malla interior,

$$-\varepsilon + \frac{Q_2}{C_2} + I_2 R_2 = 0$$

Claramente, la tasa a la que se carga cada condensador es igual a la corriente que pasa por dicho condensador. Así,

$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt} \ , \quad I_2 = \frac{dQ_2}{dt}$$

Reemplazando en las ecuaciones,

$$-\varepsilon + R_1 \frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} = 0 \ , \quad -\varepsilon + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 \frac{dQ_2}{dt} = 0$$

Resolveremos detalladamente la primera ecuación mediante Separación de variables:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_1} - \frac{Q_1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_1 C_1}\left(\varepsilon C_1 - Q_1\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{dQ_1}{\varepsilon C_1 - Q_1} = \frac{dt}{R_1 C_1}$$

Así,

$$\ln\left(\varepsilon C_1 - Q_1\right) = -\frac{t}{R_1 C_1} + A$$

Tomando la exponencial, y definiendo $B = e^A$, una nueva constante,

$$Q_1(t) = \varepsilon C_1 - B\, e^{-t/R_1 C_1}$$

Como inicialmente el condensador estaba descargado, $B = \varepsilon C_1$, y por tanto:

$$Q_1(t) = \varepsilon C_1 \left(1 - e^{-t/R_1 C_1}\right)$$

Para el segundo condensador es un proceso análogo,

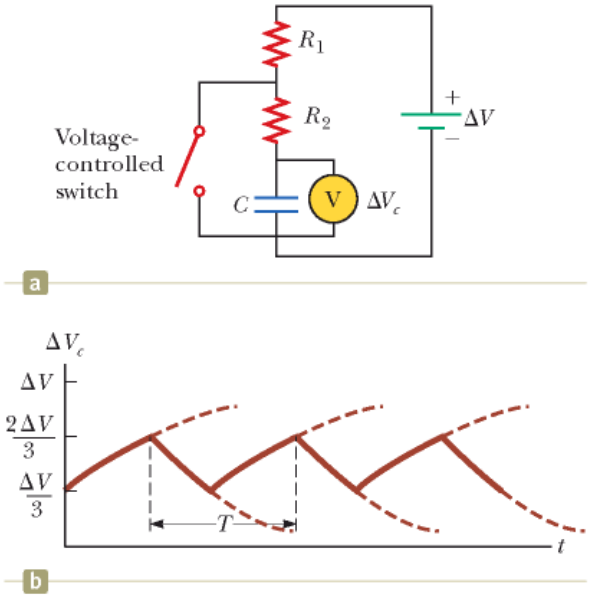
$$Q_2(t) = \varepsilon C_2 \left(1 - e^{-t/R_2C_2}\right)$$

Derivamos para obtener las corrientes,

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\, e^{-t/R_1C_1} \ , \quad I_2(t) = \frac{\varepsilon}{R_2}\, e^{-t/R_2C_2}$$

■

(5) El *switch* en la figura (a) se cierra cuando $\Delta V_c > \frac{2}{3}\,\Delta V$ y se abre cuando $\Delta V_c < \frac{1}{3}\,\Delta V$. El voltímetro ideal mide la diferencia de potencial graficada en la figura (b). ¿Cuál es el periodo T de la onda en función de R_1, R_2 y C?



Solución:

Partamos en el punto cuando el voltaje recién ha alcanzado el valor de $\frac{2}{3}\,\Delta V$ y el *switch* acaba de cerrarse. El voltaje es $\frac{2}{3}\,\Delta V$ y decae hacia 0 con una constante de tiempo R_2C:

$$\Delta V_c(t) = \frac{2}{3}\,\Delta V\, e^{-t/R_2C}$$

Queremos hallar t_1 cuando ΔV_c alcanza el valor de $\frac{1}{3}\,\Delta V$. Así,

$$\frac{1}{3}\,\Delta V = \frac{2}{3}\,\Delta V\, e^{-t/R_2C} \quad \longrightarrow \quad t_1 = R_2C\, \ln(2)$$

Después se abre el *switch*, el voltaje es $\frac{1}{3}\,\Delta V$ y crecerá hasta ΔV con una constante de tiempo $(R_1 + R_2)C$:

$$\Delta V_c(t) = \Delta V - \frac{2}{3}\,\Delta V\, e^{-t/(R_1+R_2)C}$$

Ahora, queremos hallar t_2 cuando ΔV_c alcanza el valor de $\frac{2}{3}\Delta V$. Así,

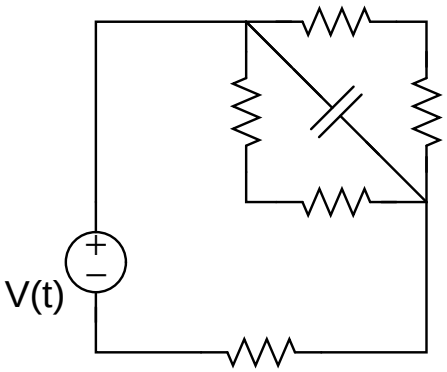
$$\frac{2}{3}\Delta V = \Delta V - \frac{2}{3}\Delta V\, e^{-t/(R_1+R_2)C} \quad \longrightarrow \quad t_2 = (R_1+R_2)C\,\ln(2)$$

Finalmente,

$$T = t_1 + t_2 = (R_1 + 2R_2)C\,\ln(2)$$

■

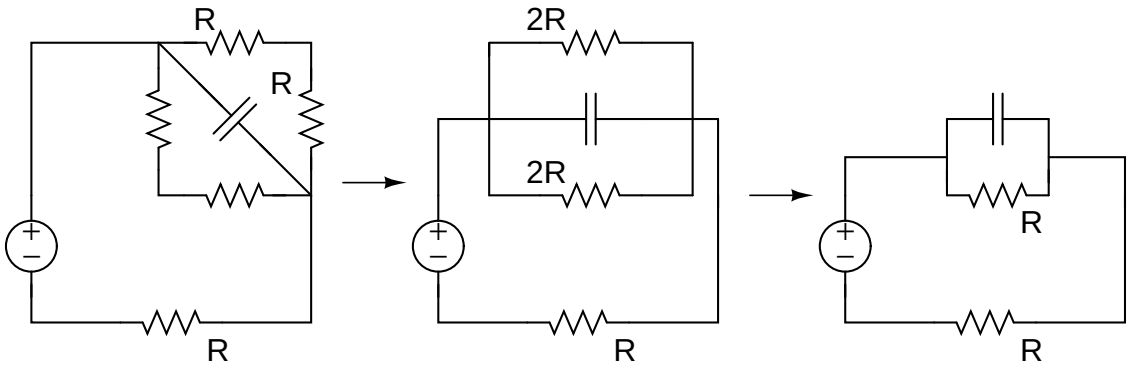
(6) **[Propuesto]** Considere el siguiente circuito, donde todas las resistencias tienen un valor de R y el condensador vale C:



Si $V(t) = V_o\,H(t)$, con H el escalón unitario, determine el valor de la corriente inicial ($t = 0$) y final ($t \to \infty$) que circula por la fuente de voltaje, considerando que el capacitor está inicialmente descargado.

Solución:

Notemos lo siguiente:



En $t = 0$, el condensador se comporta como un cortocircuito, por lo cual la resistencia en paralelo con ella no influye en el circuito, y por tanto la corriente será limitada solo por la resistencia restante en serie. Así,

$$I(t=0) = \frac{V_o}{R}$$

Por otra parte, en el infinito el condensador se comporta como un circuito abierto, por lo cual la resistencia equivalente será la suma de las resistencias en serie, $2R$, y por tanto la corriente será

$$I(t \to \infty) = \frac{V_o}{2R}$$

Comprobemos lo anterior: Consideremos la ecuación básica del condensador

$$Q = C\,V \quad \longrightarrow \quad I = C\,\frac{dV}{dt} \quad \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \quad I(s) = sC\,V(s) - V(0)$$

como $Q(0) = 0$, entonces $V(0) = 0$. En el dominio de Laplace,

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

y se comporta como una **resistencia**. Para evitar la confusión, diremos que el condensador y la resistencia son ejemplos de *impedancias*, i.e. elementos resultantes del cociente entre voltaje y corriente en Laplace. Con esto en mente, podemos definir una impedancia equivalente:

$$Z_{eq} = R + (R \parallel C) = R + \left(\frac{1}{R} + sC\right)^{-1} = \frac{2R + s\,R^2C}{1 + s\,RC}$$

Así,

$$\begin{aligned} I(s) \;=\; \frac{V(s)}{Z_{eq}} \;&=\; \left(\frac{1 + s\,RC}{2R + s\,R^2C}\right)\frac{V_o}{s} \\ &=\; \frac{V_o}{2R + s\,R^2C}\cdot\frac{1}{s} + \frac{RCV_o}{2R + s\,R^2C} \\ &=\; \frac{V_o/R^2C}{s + 2/RC}\cdot\frac{1}{s} + \frac{V_o/R}{s + 2/RC} \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa,

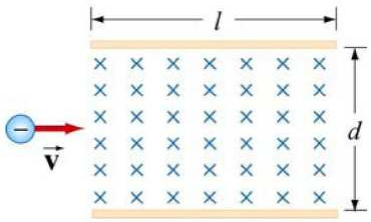
$$\begin{aligned} I(t) \;&=\; \frac{V_o}{R^2C}\left(\frac{1 - e^{-2t/RC}}{2/RC}\right) + \frac{V_o}{R}\,e^{-2t/RC} \\ &=\; \frac{V_o}{2R}\Big(1 - e^{-2t/RC}\Big) + \frac{V_o}{R}\,e^{-2t/RC} \\ &=\; \frac{V_o}{2R}\Big(1 + e^{-2t/RC}\Big) \end{aligned}$$

que corrobora nuestro análisis inicial. ■

3. Magnetostática

3.1. Fuerza de Lorentz y torque sobre una espira

(1) Se lanza un electrón (e^-) con velocidad inicial $\vec{v}$ en el medio de dos placas entre las cuales existe un campo magnético $\vec{B}$ constante (entrando a la hoja). Ignore todo efecto gravitacional.



a) ¿Hacia dónde se deflecta la trayectoria?

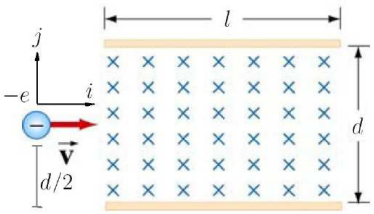
b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad si la partícula choca exactamente con el fin de la placa?

Solución:

a) La fuerza de Lorentz corresponde a la unión entre electromagnetismo y mecánica clásica, y establece que:

$$\vec{F} = q\Big(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\Big)$$

En este caso, $q = -e$ y $\vec{E} \equiv \vec{0}$. Dado que la velocidad inicial es perpendicular al campo magnético, la trayectoria será una circunferencia en el plano XY:



Para analizar hacia dónde se deflectará la partícula, basta con analizar lo que ocurre en el instante inicial $t = 0$,

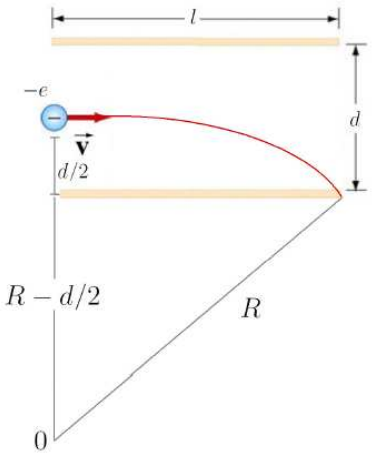
$$\vec{v}(0) \times \vec{B} = v_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \times -B\,\hat{\boldsymbol{k}} = v_0 B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Luego, la fuerza inicial es:

$$\vec{F}(0) = -ev_0 B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

y, por tanto, se deflectará hacia abajo.

b) Dado que el electrón impactará al extremo derecho de la placa inferior, entonces debe realizar una trayectoria como la siguiente:



La magnitud de la fuerza magnética está dada por $F = ev_0B$, y su dirección es radial (apuntando hacia el centro de curvatura). Por mecánica clásica, se tendrá:

$$ev_0B = \frac{mv_0{}^2}{R} \quad \longrightarrow \quad R = \frac{mv_0}{eB}$$

De trigonometría plana, se sabe que:

$$l^2 + \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 = R^2 \quad \longrightarrow \quad R = \frac{l^2}{d} + \frac{d}{4}$$

Igualando,

$$\frac{mv_0}{eB} = \frac{l^2}{d} + \frac{d}{4} \quad \longrightarrow \quad v_0 = \frac{eB}{m}\left(\frac{l^2}{d} + \frac{d}{4}\right)$$

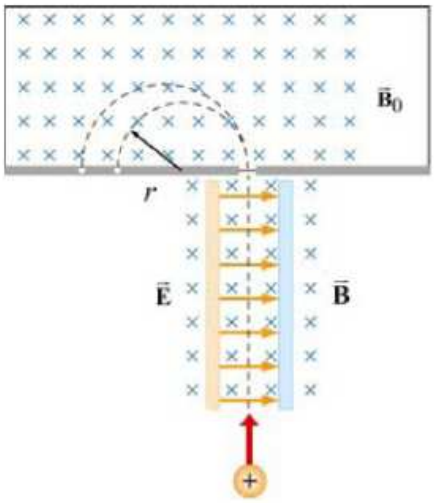
■

(2) Suponga que la figura representa esencialmente los componentes de un espectrómetro de masas. Este aparato se usa para medir la masa de partículas cargadas. En una fuente se produce un ion de masa m y carga q, el cual parte del reposo y es acelerado por una diferencia de potencial ΔV, entrando en una sección con un campo magnético uniforme (entrando a la hoja), y un campo eléctrico deflector. Solo partículas con velocidad $\vec{v}$ constante abandonan la sección (es un selector de velocidades). Las partículas emergentes entran a una segunda región donde existe otro campo magnético (entrando a la hoja), donde ellas siguen una trayectoria circunferencial hasta estrellarse en un detector a distancia $2r$ del punto de entrada.

a) Encuentre la velocidad $\vec{v}$

b) Encuentre el la relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$

c) Finalmente, encuentre la masa m de la partícula



Solución:

a) La velocidad v con que el ion entra al selector se obtiene por conservación de energía:

$$q\,\Delta V = \frac{mv^2}{2}$$

donde el cambio en energía potencial se traduce en un aumento en la energía cinética. Así,

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2q\,\Delta V}{m}}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

b) Para que la velocidad de la partícula permanezca constante y salga a través del selector, se requiere que la fuerza de Lorentz actuando sobre ella sea nula. Se tiene:

$$\vec{E} = E\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\ , \quad \vec{B} = -B\,\hat{\boldsymbol{k}}\ , \quad \vec{v} = v\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$qE\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - qv\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times B\,\hat{\boldsymbol{k}} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \Big(qE - qvB\Big)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad E = vB$$

c) Luego de ingresar a la región de campo magnético $\vec{B}_0$, la partícula describe una circunferencia de radio r. La magnitud de la fuerza magnética es qvB_0. Por dinámica circular,

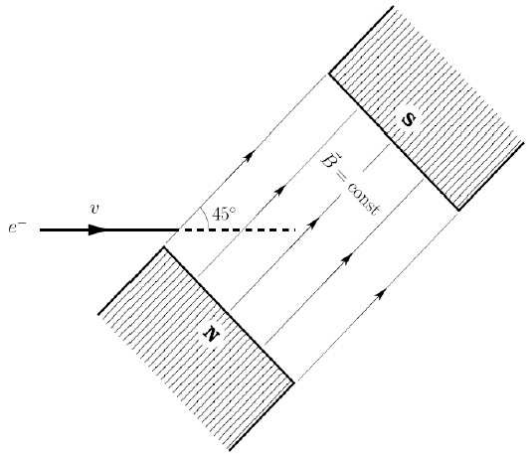
$$qvB_0 = \frac{mv^2}{r} \quad \longrightarrow \quad qB_0 = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{2q\,\Delta V}{m}}$$

y finalmente:

$$m = \frac{qB_0{}^2r^2}{2\,\Delta V}$$

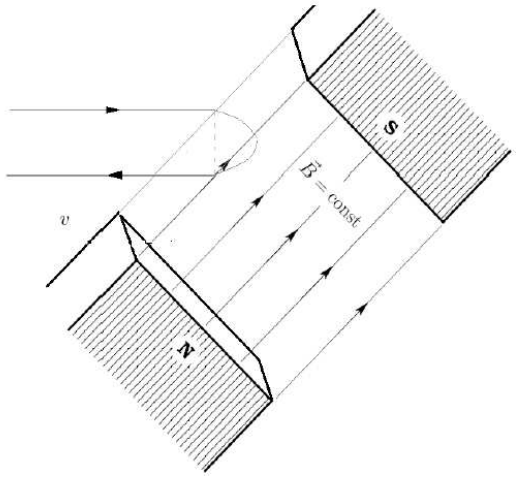
■

(3) Una partícula de carga q y masa m entra con velocidad v en un campo magnético uniforme B como se muestra en la figura. ¿Cuánto tiempo transcurre entre que la carga ingresa al campo magnético y sale?



Solución:

Es sabido que la fuerza magnética sobre una carga en movimiento q está dada por la fuerza de Lorentz. Esta fuerza es siempre perpendicular a $\vec{v}$; luego, se sigue que esta fuerza **no ejerce trabajo**. Con esto, la energía cinética de la partícula es constante y entonces su rapidez también. La trayectoria que sigue la partícula bajo este campo magnético uniforme es una hélice:



Si se observa el movimiento proyectado en un plano perpendicular al campo magnético, la trayectoria describe una semicircunferencia, hasta volver a salir de la región donde se encuentra el campo magnético. Sea R el radio de ésta, luego podemos determinar el tiempo que demora en salir como

$$T = \frac{\pi R}{v'}$$

con v' la componente de velocidad perpendicular al plano. De la segunda ley de Newton,

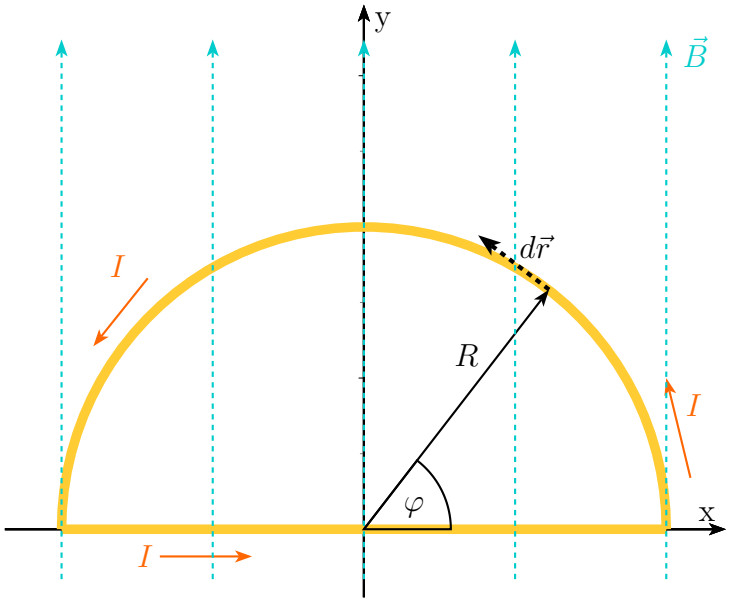
$$\frac{mv'^2}{R} = F = qvB\sin(\pi/4) = qv'B \quad \longrightarrow \quad R = \frac{mv'}{qB}$$

Finalmente,

$$T = \frac{\pi m}{qB}$$

■

(4) Considere el circuito cerrado de la figura que lleva una corriente I en el sentido contrario al reloj. Un campo magnético uniforme apuntando en la dirección $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ es aplicado. Encuentre la fuerza magnética que actúa sobre el elemento rígido y el arco semicircular.



Solución:

Tenemos un campo uniforme dado por $\vec{B} = B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, llamemos $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ a las fuerzas actuando sobre el segmento rígido y la parte semicircular, respectivamente. La fuerza sobre el segmento rígido es:

$$\vec{F}_1 = I\left(\int_{-R}^{R} d\vec{r}\right) \times B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = I\left(\int_{-R}^{R} dr\right)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = 2IRB\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Ahora, para calcular $\vec{F}_2$, notamos que elemento infinitesimal en el semicírculo se puede escribir como:

$$d\vec{r} = dr\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = R\,d\varphi\Big(-\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\Big)$$

La fuerza que actúa sobre un elemento $d\vec{r}$ es:

$$d\vec{F}_2 = I\,d\vec{r} \times \vec{B} = IR\,d\varphi\Big(-\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\Big) \times B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -IBR\sin\varphi\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Integrando sobre el arco semicircular, tenemos:

$$\vec{F}_2 = -IBR\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi\right)\,\hat{\boldsymbol{k}} = -2IBR\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Así, la fuerza neta que actúa sobre el circuito completo es

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Consistente con el hecho de que la fuerza sobre un circuito cerrado en un campo magnético uniforme es siempre nula. ■

(5) Considere una partícula de carga q y masa m, sometida a un campo eléctrico $\vec{E}$ y a un campo magnético $\vec{B}$, ambos uniformes y perpendiculares entre si. Suponga que inicialmente ($t = 0$) la carga se encuentra en el origen y en reposo.

a) Describa *cualitativamente* el movimiento posterior ($t > 0$) seguido por la partícula. Haga un dibujo de la trayectoria.

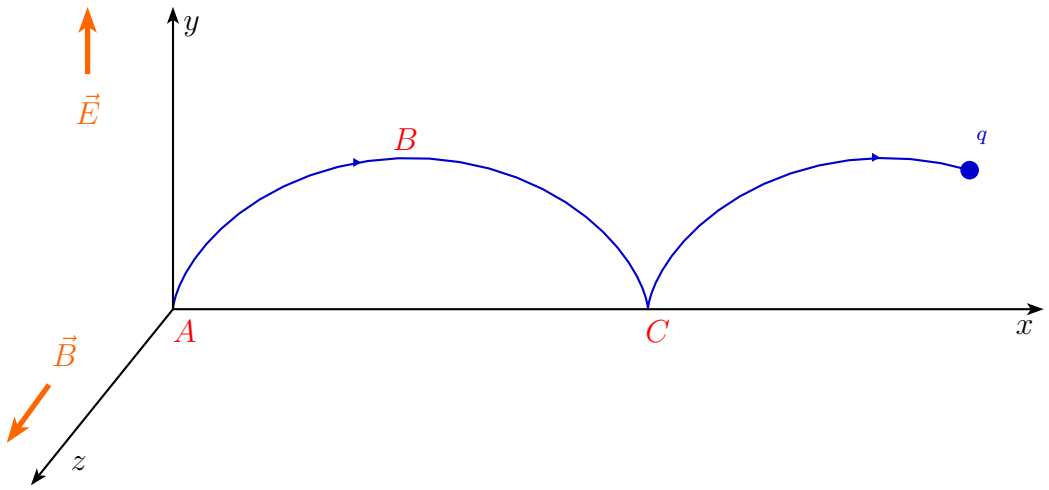
b) Resuelva las ecuaciones de movimiento, sujetas a las condiciones iniciales mencionadas. Usando esta solución, describa el movimiento de la partícula y compare con el apartado anterior.

Solución:

a) Sea $q > 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el campo eléctrico y el campo magnético están dados por

$$\vec{E} = E\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,, \quad \vec{B} = B\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Dado que en $t = 0$ la velocidad inicial de la partícula es nula, no hay fuerza magnética (instante A en la figura). La fuerza eléctrica, en cambio, apunta en la dirección $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, acelerando la partícula. La partícula comienza a moverse aumentando su velocidad, y con ello la fuerza magnética. Esta última deflecta la partícula hacia $x > 0$ según la regla de mano derecha. A diferencia de los problemas anteriores, esta vez el movimiento no es circunferencial. A medida que la fuerza magnética va aumentando, también cambia su dirección de acción: cada vez se alinea más a la fuerza eléctrica (que actúa en el eje Y), frenando la partícula en esta dirección. Dado que entre los instantes A y B la partícula desacelera en la dirección señalada, ésta se mueve barriendo una suerte de arco "alargado". En el punto B la fuerza magnética ha sido tal que se opone justo a la fuerza eléctrica, y la partícula comienza a volver hacia $y, z = 0$ (instantes entre B y C). A partir de este instante, el campo eléctrico es el que ahora intenta frenar a la partícula, por lo que la rapidez disminuye y con ello la fuerza magnética, hasta llegar a C, instante en el cual la partícula está en reposo, lista para un nuevo ciclo:



b) De la ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\Big(E\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \vec{v}\times B\,\hat{\boldsymbol{k}}\Big) \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_x{}' \\ v_y{}' \\ v_z{}' \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} B\,v_y \\ E - B\,v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

La última ecuación, $v_z{}' = 0$ con $z(0) = v_z(0) = 0$ nos dice que

$$z(t) \equiv 0$$

y el movimiento es en el plano. Si definimos $\omega = qB/m$, entonces el sistema de 2×2 queda como:

$$\begin{pmatrix} v_x{}' \\ v_y{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega E/B \end{pmatrix}$$

Notamos que el sistema es de la forma $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}$, y podemos resolverlo mediante Variación de Parámetros:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\vec{f}(s)\,ds$$

De Álgebra Lineal, sabemos que:

$$e^{At} = V\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}V^{-1}$$

con V la matriz de vectores propios y λ_k los valores propios asociados. En este caso,

$$\lambda_1 = \omega\,i\ , \quad \lambda_2 = -\omega\,i\ , \quad V = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & -ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} \\ ie^{i\omega t} - ie^{-i\omega t} & e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Como la velocidad inicial es nula, la solución homogénea es

$$\vec{x}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mientras que la solución particular es

$$\vec{x}_p = \frac{\omega E}{B}\int_0^t \begin{pmatrix} \sin\omega(t-s) \\ \cos\omega(t-s) \end{pmatrix} ds = \frac{E}{B}\begin{pmatrix} 1-\cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$v_x(t) = \frac{E}{B}\Big(1-\cos\omega t\Big)\ , \quad v_y(t) = \frac{E}{B}\Big(\sin\omega t\Big)$$

He integrando para obtener la posición,

$$x(t) = \frac{E}{\omega B}\Big(\omega t - \sin\omega t\Big)\ , \quad y(t) = \frac{E}{\omega B}\Big(1-\cos\omega t\Big)$$

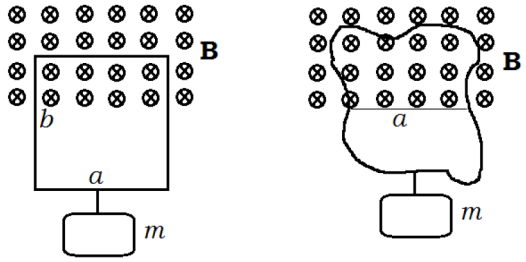
que de Cálculo II sabemos que corresponde a la parametrización de una **cicloide**. *Para mayor información se sugiere visitar aquí.* Notar que podemos escribir, haciendo $R = E/\omega B$,

$$\Big(x(t) - R\omega t\Big)^2 + \Big(y(t) - R\Big)^2 = R^2$$

que corresponde a un círculo cuyo centro se mueve con velocidad constante $v = \omega R$ en x.

■

(6) Un *loop* rectangular de masa despreciable, soportando una masa m, se mantiene verticalmente con la parte superior en un campo magnético uniforme, como muestra la figura. El campo apunta hacia dentro del papel. Suponga que la gravedad actúa uniformemente hacia abajo.



a) Encuentre la corriente I (magnitud y dirección de circulación) para la cual el *loop* mantiene a la masa m sin que se mueva

b) Suponga que aumentamos la magnitud de la corriente, sin variar el sentido de circulación anterior. Naturalmente, esperamos que el *loop* suba, llevando la masa consigo. Es correcto afirmar entonces que se realiza trabajo para que la masa pueda subir. Una expresión de este trabajo (errada) sería $W = \vec{F}_{mag} \cdot \vec{h}$ cuando m sube una altura h. Sin embargo, sabemos que la fuerza magnética **NO** realiza trabajo. ¿Qué ocurre en este caso? ¿Quién realiza el trabajo?

c) Suponga ahora que al *loop* rectangular le cambiamos la forma arbitrariamente (segunda parte de la figura). Muestre que la fuerza magnética sobre este *loop* es la misma que la obtenida en el apartado inicial, sin importar la forma del *loop*.

Solución:

a) La fuerza magnética que ejerce un campo sobre una corriente que circula sobre un tramo C es

$$\vec{F} = \int_C I\, d\vec{r} \times \vec{B}$$

Notemos que no todo el *loop* está dentro del campo. La fuerza sobre los segmentos verticales se cancelan, así que solo aporta el segmento horizontal superior. Necesitamos que la fuerza sea hacia arriba, para que se oponga al peso del cuerpo de masa m. Para ello, notemos que eso solo se cumple si la corriente circula en sentido horario, en cuyo caso $d\vec{r}$ va en dirección $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (hacia la derecha), $\vec{B}$ va en dirección $-\hat{\boldsymbol{k}}$ (entra al papel) y por ende $\vec{F}$ va en dirección $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (hacia arriba). Para este segmento tenemos

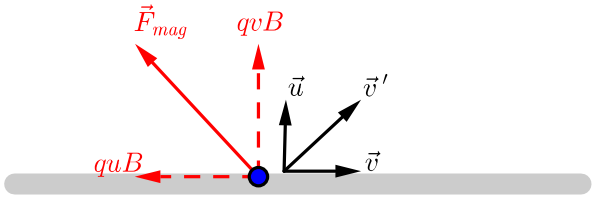
$$\vec{F} = IB\left(\int dr\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} = IBa\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Necesitamos que esta fuerza sostenga al peso, por lo que

$$IBa = mg \quad \longrightarrow \quad I = \frac{mg}{Ba}$$

b) Como la fuerza magnética **jamás** realiza trabajo, alguien o algo debe estar haciéndolo para que efectivamente la energía potencial de la masa aumente.

Cuando el *loop* comienza a moverse, las cargas en los segmentos horizontales ya no se mueven más de forma horizontal, ya que adquieren una componente vertical $\vec{u}$ asociada a la subida del *loop*, por lo que su velocidad será $\vec{v}\,'$. La fuerza magnética ya no apuntará directamente hacia arriba, sino que apuntará diagonalmente hacia la izquierda. Si $q = \lambda\, a$ denota la carga neta en un segmento de largo a, evidentemente la componente horizontal de la fuerza magnética sería $quB = \lambda\, auB$, que se opone al sentido de la corriente, frenando las cargas:



Lo que sea que mantiene la corriente estacionaria (una batería quizás) debe entonces EMPUJAR estas cargas para mantener la corriente estacionaria, para que no sean frenadas por esta nueva fuerza horizontal. Si v denota la componente horizontal de la velocidad de las cargas, entonces el trabajo hecho por el agente externo empujando las partículas es

$$W = F_{horizaontal}\; d = \lambda\, auBvt = IaBut$$

donde $d = vt$ es la distancia horizontal recorrida por las cargas en un instante t. Notemos que $I = \lambda\, v$ es la corriente. Finalmente, notemos que $h = ut$ es la distancia vertical que recorren las cargas (mientras sube el *loop*), por lo que el trabajo queda como sigue:

$$W = IaBh$$

que es la misma expresión que si se calculase usando un argumento físico erróneo, i.e. suponiendo que la fuerza magnética trabaja. ¿Quién hace trabajo? El agente externo, una batería, o lo que sea que mantiene la corriente estacionaria en el tiempo.

c) La fuerza en un caso general viene dada por:

$$\vec{F} = \int_C I\, d\vec{r} \times \vec{B} = I \left(\int_C d\vec{r} \right) \times \vec{B}$$

en donde hemos sacado el campo por ser uniforme. Notemos que:

$$\int_C d\vec{r} = \vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial} = \vec{a} = a\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

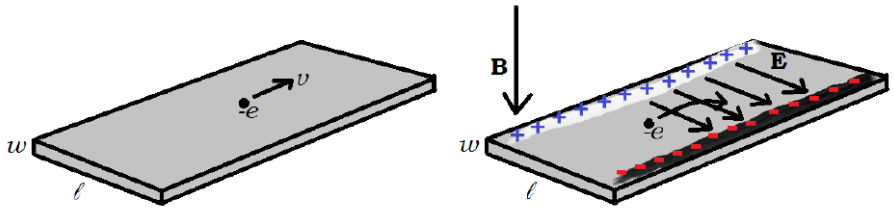
según nuestro sistema. Luego la fuerza es la misma que la del inciso inicial, sin importar la forma de la curva C.

■

(7) En un experimento diseñado para medir el campo magnético de la Tierra usando el efecto Hall, una barra de cobre de 0.5 cm de espesor es posicionada a lo largo de un eje que va de este a oeste. Asuma que la densidad de electrones es $n = 8.46 \times 10^{28}$ electrones por metro cúbico, y que el plano de la barra es puesto perpendicular a la dirección del campo magnético de la Tierra. Si una corriente de 8 A en el conductor resulta en un voltaje de Hall de 5.1×10^{-12} V, ¿Cuál es la magnitud del campo magnético terrestre en el lugar del experimento?

Solución:

Como sabemos, el efecto Hall ocurre cuando un campo magnético $\vec{B}$ uniforme es aplicado perpendicularmente al plano de un cable plano por el que circula una corriente I. Este campo produce una fuerza magnética sobre las cargas en movimiento, las cuales se desvían y acumulan en los bordes del conductor (figura de abajo).



La figura muestra el caso real: los electrones (cargas negativas) son los portadores de corriente, y por ende, quienes se ven afectados por el efecto Hall. El exceso de cargas en cada borde produce una diferencia de potencial, y un consecuente campo eléctrico que apunta a lo ancho del conductor. Esta desviación en la trayectoria de las cargas ocurre hasta que la fuerza eléctrica es capaz de oponerse a la fuerza magnética. Notar del dibujo que la fuerza magnética y eléctrica se oponen (el campo eléctrico apunta en una dirección, pero si las cargas son negativas, la fuerza apunta contraria al campo). En dicho caso, si v representa la velocidad de los electrones, entonces el equilibrio requiere que:

$$qv\,B = qE = q\ell\,V \quad \longrightarrow \quad v = \frac{V}{\ell B}$$

en donde se usó que $V = \ell E$ es la diferencia de potencial entre los bordes, y ℓ es el ancho. A esta diferencia de potencial se le conoce como voltaje de Hall. Por otra parte, si I denota la corriente que circula, entonces:

$$I = JA = J\ell w = \rho v \ell w = new v \ell$$

en donde n es el número de partículas por unidad de volumen, $\rho = ne$ es la densidad de carga, y $J = \rho v$ la densidad de corriente. Es posible entonces expresar el voltaje de Hall en función de la corriente que circula,

$$V = \frac{BI}{new} \quad \longrightarrow \quad B = \frac{new\,V}{I}$$

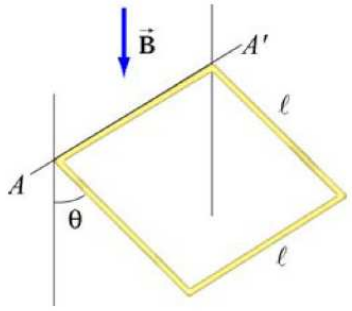
En este problema buscamos el valor del campo magnético de la Tierra, el cual apunta perpendicular a nuestro conductor en el laboratorio. Es directo porque tenemos todos los datos numéricos. El campo

que mediremos será:

$$B = \frac{8.46 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}} \cdot 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 5.1 \times 10^{-12}\,\mathrm{V}}{8\,\mathrm{A}} \approx 4 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

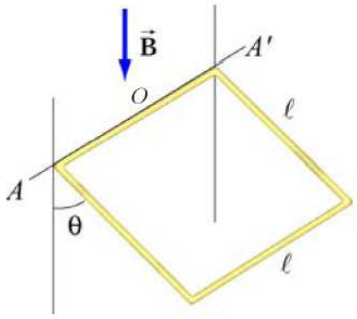
■

(8) Un circuito cuadrado rígido, de lado L y masa M, está pivoteado en torno a uno de sus ejes en presencia de un campo magnético $\vec{B}$ uniforme, y el campo gravitatorio. El circuito lleva una corriente I que es capaz de mantenerlo en equilibrio en un ángulo θ. Encuentre el sentido y magnitud de dicha corriente:

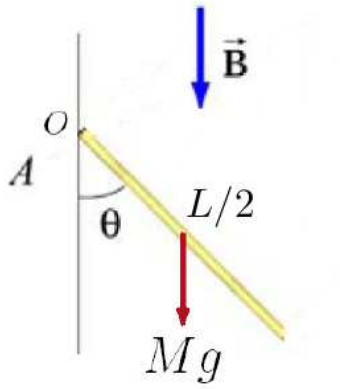


Solución:

Para el equilibrio, se requiere que el torque neto sobre la espira con respecto a algún punto de aceleración nula sea cero. Se escoge como origen el punto O ubicado en una de las esquinas de la espira, como se muestra en la figura.



Para el torque que ejerce el peso, usamos que la fuerza de gravedad se puede concentrar en el centro de masa



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{L}{2}\Big(\sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \Big) \times -Mg\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\frac{MgL}{2} \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

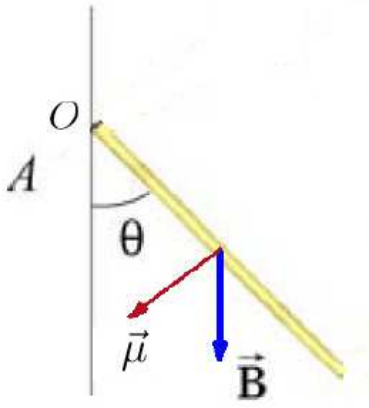
Por otro lado, el torque que ejerce la fuerza magnética es

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

donde $\vec{\mu}$ es el momento magnético de la espira,

$$\vec{\mu} = IA\hat{n} = IL^2\hat{n}$$

Requerimos en primer lugar que este torque tenga dirección $\hat{\boldsymbol{k}}$. Luego $\hat{n}$ debe tener la dirección de $\vec{\mu}$ en el dibujo



$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = IL^2 B \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

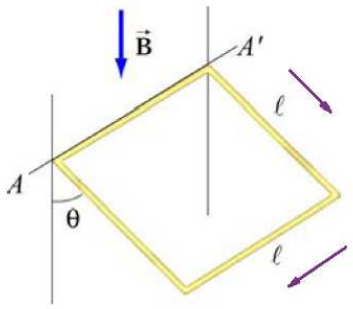
El equilibrio exige entonces

$$\left(Mg\frac{L}{2} \sin\theta - IL^2 B \cos\theta \right) \hat{\boldsymbol{k}} = \vec{0}$$

Luego, la corriente I debe ser

$$I = \frac{Mg \tan\theta}{2LB}$$

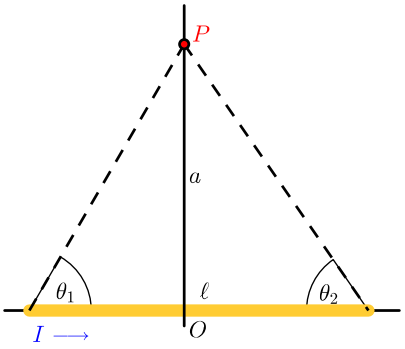
La dirección debe ser acorde con la dirección del momento magnético, la cual se muestra en la siguiente figura



■

3.2. Ley de Biot-Savart

(1) Un alambre delgado y rígido, que lleva una corriente I, es colocado a lo largo del eje X. Calcular el campo magnético en el punto P. Analice el caso particular en que el alambre es simétrico con respecto al eje Y. ¿Qué sucede cuando $\ell \to \infty$?



Solución:

Recordemos la Ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\vec{R} \times (\vec{r} - \vec{R})}{\|\vec{r} - \vec{R}\|^3}$$

Consideremos un elemento diferencial $d\vec{R} = dx\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$ que lleva una corriente I en la dirección X. Por otra parte, $\vec{r} = a\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y por tanto:

$$\vec{r} - \vec{R} = a\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} - x\, \hat{\boldsymbol{\imath}}\ , \quad \|\vec{r} - \vec{R}\| = \sqrt{a^2 + x^2}\ , \quad I\, d\vec{R} \times (\vec{r} - \vec{R}) = aI\, dx\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

Los límites de integración serán $-x_1$ y x_2 tales que $x_1 + x_2 = \ell$ y

$$x_1 = \frac{a}{\tan\theta_1} \qquad \wedge \qquad x_2 = \frac{a}{\tan\theta_2}$$

Por lo tanto,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-x_1}^{x_2} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

Usando el cambio de variable $x = a\tan\theta$,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_{-\arctan\cot\theta_1}^{\operatorname{arctan}\cot\theta_2} \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^3\sec^3\theta}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1-\pi/2}^{\pi/2-\theta_2}\cos\theta\, d\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\Big(\cos\theta_1+\cos\theta_2\Big)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

recordando que $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$. En el caso simétrico, $\theta_1 = \theta_2$ y por tanto $\cos\theta_k = \dfrac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + a^2}}$ y así,

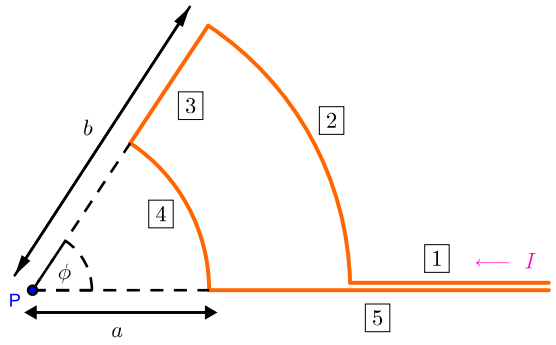
$$\vec{B}_{sim}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2/4 + a^2}}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Si $\ell \to \infty$, entonces $\theta_k \to 0$ y por tanto:

$$\vec{B}_{\infty}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Notemos que en este límite, el sistema posee simetría cilíndrica, y las líneas de campo magnético son circulares. Este resultado se comprobará más adelante con la Ley de Ampère. ■

(2) Considere la espira de corriente formada por segmentos radiales y arcos de circunferencia como se muestra en la figura. Obtenga el campo magnético $\vec{B}$ en el punto P.



Solución:

Si fijamos el origen en P, notamos inmediatamente que las contribuciones de los segmentos $\boxed{1}$ y $\boxed{5}$ son nulas, ya que en ambos casos el vector $d\vec{R}$ es paralelo al vector $\vec{r} - \vec{R}$, con $\vec{x} = \vec{0}$. Para el sector $\boxed{2}$:

$$\vec{r} = \vec{0}\ , \quad \vec{R} = b\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\ , \quad d\vec{R} = b\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \longrightarrow \quad d\vec{R}\times(\vec{r}-\vec{R}) = b^2\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} \quad \wedge \quad \|\vec{r}-\vec{R}\| = b$$

Por lo tanto,

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_0^{\phi} d\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0\phi\, I}{4\pi b}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

De manera análoga, para el segmento $\boxed{4}$,

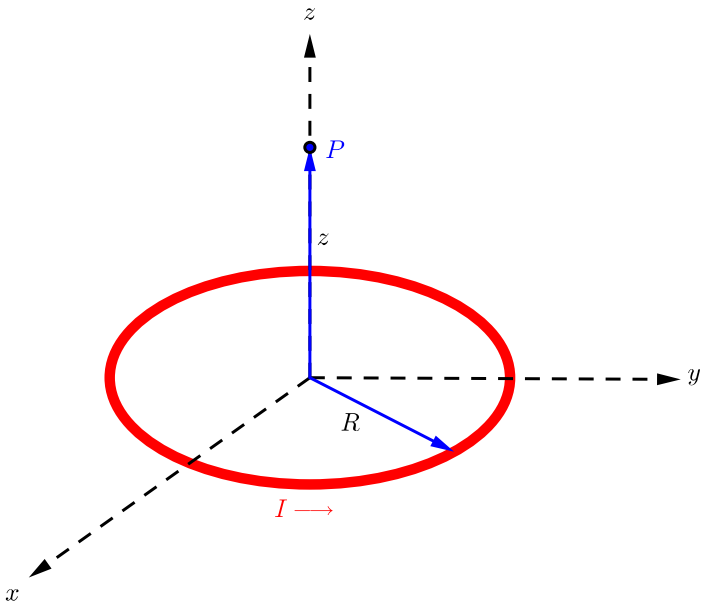
$$\vec{B}_4 = -\frac{\mu_0\phi\, I}{4\pi a}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Por último, para la sección 3, es fácil notar que su contribución es nula, ya que en este caso el vector $d\vec{R}$ apunta en la dirección contraria al vector unitario radial en coordenadas polares, y a su vez $d\vec{R}$ apunta en la dirección radial, de esta forma, el producto cruz entrega al vector nulo. Resumiendo, solo los segmentos pares contribuyen al campo en P, y el campo total será la suma de ambas contribuciones:

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 \phi\, I}{4\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

■

(3) Considere una espira circular que lleva corriente I en el sentido indicado por la figura. Calcule el campo magnético a una distancia z en el eje de simetría de la espira.



Solución:

En este caso,

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= z\,\hat{\boldsymbol{k}} \\
\vec{R} &= R\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \\
d\vec{R} &= R\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\|\vec{r} - \vec{R}\| &= \sqrt{z^2 + R^2} \\
d\vec{R} \times (\vec{r} - \vec{R}) &= zR\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R^2\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

Como $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, entonces:

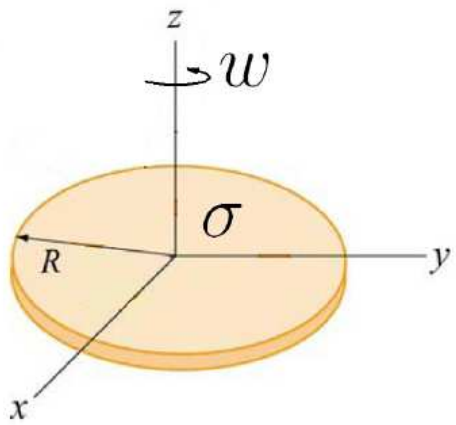
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R^2\,\hat{\boldsymbol{k}} + zR\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + zR\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,d\theta$$

Las integrales en el plano XY son nulas por estar integradas entre 0 y 2π, con lo que:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

que es consistente con los argumentos de simetría. ■

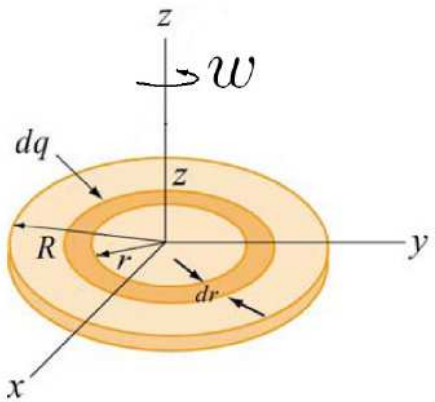
(4) Considere un disco muy delgado que tiene una densidad de carga superficial σ uniformemente distribuida. El disco se pone a girar a velocidad angular ω en torno a su eje. Encuentre el campo magnético en el eje del disco.



Solución:

Se tiene una distribución de carga en movimiento, y por tanto una corriente, de forma que ésta generará un campo magnético. Anteriormente se determinó el campo en el eje de un anillo de radio r con corriente I.

Podemos ver el disco como una superposición de anillos con corriente de ancho infinitesimal dr, de modo que el campo magnético total será la suma de las contribuciones de estos anillos. Veamos que ocurre en la porción de disco comprendida entre r y $r + dr$, con $r \in [0, R]$:



$$q = \sigma\, \pi r^2 \quad \longrightarrow \quad dq = 2\pi\sigma r\, dr$$

La carga dq da una vuelta completa en un tiempo

$$\Delta t = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

La rotación del anillo genera una corriente:

$$dI = \frac{dq}{\Delta t} = \sigma\omega\, r\, dr$$

Así, el campo magnético a una distancia z sobre el eje del disco generado por este anillo es:

$$dB = \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \frac{\mu\, dI}{2} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr$$

El campo total es:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

Haciendo el cambio de variables $t^2 = r^2 + z^2$, $t\, dt = r\, dr$ obtenemos la siguiente integral:

$$\int \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr = \int \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, r\, dr = \int \frac{t^2-z^2}{t^3}\, t\, dt = \int \left(1 - \frac{z^2}{t^2}\right) dt = t + \frac{z^2}{t} + c_1$$

Volviendo a las variables originales,

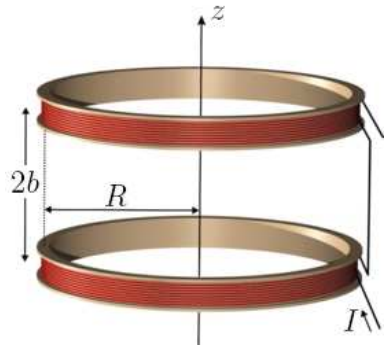
$$\int_0^R \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr = \left(\sqrt{z^2+r^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)\Bigg|_0^R = \sqrt{R^2+z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2|z|$$

Finalmente,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\sqrt{R^2+z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2|z|\right) \hat{\boldsymbol{k}}$$

■

(5) Considere dos bobinas de N espiras de igual radio R, separados por una distancia $2b$ como muestra la figura. En ambas bobinas circula una corriente I en el mismo sentido.



a) Obtenga el campo magnético en el punto medio P entre las dos bobinas, y muestre que en este punto la primera derivada del campo es nula

b) Escoja una distancia $2b$ tal que la segunda derivada del campo se anule en P

c) Muestre que con la elección anterior, la tercera derivada se anula en P

Solución:

a) De algún problema anterior, sabemos que para una espira circular con corriente I, radio R y a una altura z de su centro, el campo en el eje de simetría es:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{k}}$$

Como esta bobina consta de N espiras circulares, separadas por una distancia despreciable con respecto a z, podemos utilizar el principio de superposición y obtener el campo resultante:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I\, N}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{k}}$$

Ahora, localicemos el origen en P. Sea un punto en el eje a una distancia z del origen; el campo provocado por la bobina de abajo es:

$$\vec{B}_{down}(z) = \frac{\mu_0 I\, N}{2} \frac{R^2}{(R^2+(z+b)^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{k}}$$

mientras que la bobina de arriba contribuye con:

$$\vec{B}_{up}(z) = \frac{\mu_0 I\, N}{2} \frac{R^2}{(R^2+(z-b)^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{k}}$$

Así, el campo magnético total, por el principio de superposición, es:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I\, N}{2} \left(\frac{R^2}{(R^2+(z-b)^2)^{3/2}} + \frac{R^2}{(R^2+(z+b)^2)^{3/2}} \right) \hat{\boldsymbol{k}} = B\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

Si derivamos una vez,

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{3\mu_0 I\, N}{2R} \left(\frac{z-b}{\left(1+([z-b]/R)^2\right)^{5/2}} + \frac{z+b}{\left(1+([z+b]/R)^2\right)^{5/2}} \right)$$

vemos que al evaluar en P –origen con $z=0$– la derivada será:

$$\left.\frac{dB}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

b) Para escoger la distancia, vemos la segunda derivada. Derivando lo anterior,

$$\begin{aligned} \frac{d^2B}{dz^2} &= -\frac{3\mu_0 I\, N}{2R} \left[\left(1+\left(\frac{z-b}{R}\right)^2\right)^{-5/2} + \left(1+\left(\frac{z+b}{R}\right)^2\right)^{-5/2} \right] \\ &\quad + \frac{3\mu_0 I\, N}{2R} \left[\frac{5(z-b)^2}{R^2} \left(1+\left(\frac{z-b}{R}\right)^2\right)^{-7/2} + \frac{5(z+b)^2}{R^2} \left(1+\left(\frac{z+b}{R}\right)^2\right)^{-7/2} \right] \end{aligned}$$

Evaluado en el origen,

$$\frac{d^2B}{dz^2}(0) = -\frac{3\mu_0 I\, N}{2R} \left[2\left(1+\frac{b^2}{R^2}\right)^{-5/2} - \frac{10b^2}{R^2}\left(1+\frac{b^2}{R^2}\right)^{-7/2} \right]$$

Necesitamos que esta expresión sea nula. Imponer esto nos lleva a una ecuación que nos permite despejar b como función de R:

$$2\left(1+\frac{b^2}{R^2}\right) = 10\frac{b^2}{R^2} \quad \longrightarrow \quad 2b = R$$

Esto significa que si escogemos la separación entre las bobinas igual al radio de las mismas, entonces la segunda derivada también se anula en P.

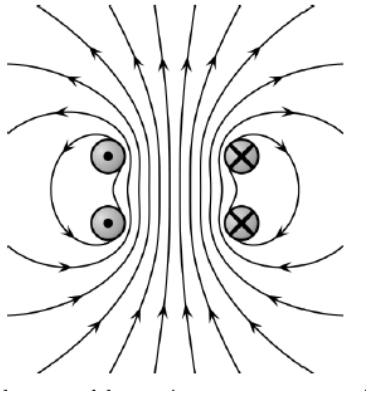
c) Volviendo a la segunda derivada, reemplazando $2b = R$ y derivando por tercera vez, se ve que en P la tercera derivada también es nula. Todos estos cálculos nos sirven para mostrar que el campo en la vecindad de P es aproximadamente uniforme. En efecto, si expandimos en Taylor el campo cerca del origen,

$$B(z) = B(0) + B'(0)\,z + \frac{B''(0)}{2!}\,z^2 + \frac{B'''(0)}{3!}\,z^3 + \frac{B^{(iv)}(0)}{4!}\,z^4 + \ldots$$

Reemplazando las derivadas antes calculadas,

$$B(z) \approx B(0) + \frac{B^{(iv)}(0)}{4!}\,z^4$$

Esta configuración se conoce como *Helmholtz coils* (bobinas de Helmholtz). El segundo término es de orden de z^4, lo cual es **muy pequeño**. Es por esto que el campo en la vecindad de P resulta muy uniforme. La figura de abajo muestra el campo real dentro de las bobinas:



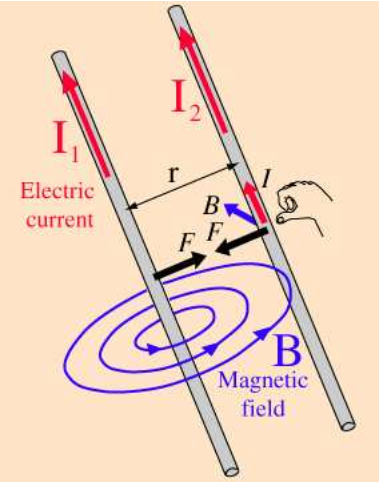
■

(6) Considere dos alambres, de longitud ℓ, paralelos separados por una distancia $a \ll \ell$ y que llevan corrientes I_1 e I_2 en la dirección y. Calcule la fuerza entre ambos conductores.

Solución:

La fuerza magnética $\vec{F}_1$, que ejerce el alambre 2 sobre el alambre 1, se puede obtener como

$$\vec{F}_1 = I_1 \int d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2$$



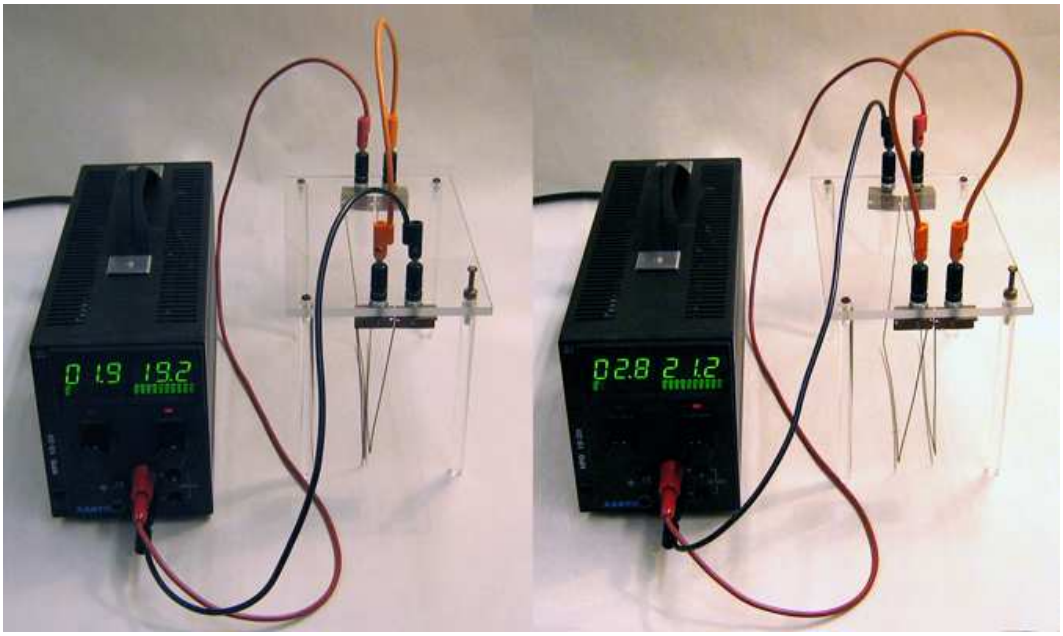
donde $\vec{B}_2$ es el campo magnético creado por el conductor 2. Usando el resultado del primer problema, para alambres suficientemente largos, las líneas del campo magnético debido a I_2 son círculos concéntricos con el alambre 2, con el campo apuntando en la dirección tangencial. Así, en un punto arbitrario P sobre el alambre 1, tenemos

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Al ser este campo uniforme a lo largo del conductor 1, y siendo éste un alambre rectilíneo, la fuerza que experimenta está dada por:

$$\vec{F}_1 = I_1\,\vec{\ell}\times\vec{B}_2 = I_1\ell\,\hat{\boldsymbol{j}}\times\left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right)\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0\ell\, I_1 I_2}{2\pi a}\,\hat{\boldsymbol{i}}$$

Claramente esta fuerza apunta hacia el conductor 2. Resulta evidente que $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. De esta forma, dos cables paralelos que llevan corriente en la misma dirección se atraerán. Por otro lado, si las corrientes fluyen en direcciones opuestas, la fuerza resultante será repulsiva.



■

(7) ¿Cuál debe ser la velocidad v (medida en un sistema inercial) de dos hilos paralelos muy largos y no conductores, cargados uniformemente con densidad λ, y separados una distancia d, para que la fuerza magnética anule la fuerza eléctrica ejercida entre los hilos?

Solución:

Sabemos que el campo magnético generado por el cable es:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Con este campo es fácil calcular la fuerza que ejerce un cable sobre otro cable igual, con la misma corriente, situado a una distancia d. El campo magnético que ejerce el primero sobre el segundo es constante a lo largo de todo el segundo cable, debido a que depende solo de la distancia, y todos los puntos del segundo cable están a la misma distancia, d. Así,

$$\vec{F}_m = ILB(d)\,\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi d}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

en donde L es el largo de cada cable. El signo negativo implica que la fuerza es atractiva. En el caso de dos cables muy largos cargados que se mueven, evidentemente la corriente corresponde a $I = \lambda v$, en donde v es la velocidad del cable. La fuerza magnética entre dos cables cargados con densidad de carga λ es entonces $F_m = \mu_0\lambda^2 v^2 L/2\pi d$. Por otra parte, el campo eléctrico que ejerce una línea de carga muy larga es, usando la ley de Gauss,

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

y claramente ese campo ejerce una fuerza repulsiva sobre otro cable exactamente igual situado a una distancia d:

$$\vec{F}_e = \int \lambda\vec{E}(d)\,d\ell = \frac{\lambda^2 L}{2\pi\epsilon_0 d}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Para que la fuerza magnética anule la eléctrica tiene que ocurrir que:

$$\frac{\mu_0\lambda^2 v^2 L}{2\pi d} = \frac{\lambda^2 L}{2\pi\epsilon_0 d} \quad \longrightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$$

Evaluando numéricamente este resultado vemos que $v \approx 3\times 10^8$ m/s, que es la velocidad de la luz. Evidentemente los alambres nunca podrán viajar tan rápido, por lo que siempre predomina la fuerza eléctrica por sobre la magnética. ■

3.3. Ley de Ampère

(1) Considere un conductor cilíndrico de radio R y de extensión infinita, que lleva una corriente I con una densidad de corriente no uniforme $J = \alpha\, r$, donde α es una constante desconocida, y r es la distancia de un punto interior en el conductor al eje de simetría. Encuentre el campo magnético en

todo el espacio.

Solución:

La Ley de Ampère nos dice que

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \, I_{enc}$$

en donde I_{enc} representa la corriente encerrada por la curva cerrada γ. Esta ley es análoga a la ley de Gauss de electrostática, y no depende de la forma de γ. Aunque esta ley **siempre** es válida, no siempre es útil, y tal como ocurre con la ley de Gauss, se usa en situaciones de alta simetría. Para aplicarla, es preciso saber en qué dirección debe apuntar el campo, de modo tal que la integral de línea se simplifique considerablemente. Saber en qué dirección apunta el campo magnético generalmente no es difícil, y solo requiere entender bien la naturaleza vectorial del mismo. En particular, el campo siempre debe ser perpendicular a la corriente, y su sentido no debe depender del sistema coordenado que se use.

Para una corriente que circula en la dirección z (coordenadas cilíndricas) es sencillo establecer en qué dirección debe ir el campo. Primero, no puede tener una componente en la dirección z, porque el campo no puede ser paralelo a la corriente. Por otra parte, si tuviera componente radial, cambiaría el sentido de la misma si se invierte el sentido de la corriente. Pero invertir el sentido de la corriente es, físicamente, lo mismo que escoger el eje z en la dirección opuesta a la inicial. Entonces se deduce que la componente radial del campo depende de la elección del eje z, lo cual contradice el hecho de que las magnitudes físicas no pueden depender de la elección de coordenadas. Por ende, tampoco puede tener componente radial. Se concluye que el campo debe estar en la dirección tangencial, y debe únicamente depender del radio por la simetría axial del problema

$$\vec{B} = B(r) \, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Sea γ una circunferencia de radio $0 < r < R$, cuyo centro coincide con el eje de simetría del cilindro. Así,

$$\vec{r} = r \, \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \longrightarrow \quad d\vec{r} = r \, d\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Con ello,

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r) r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r \, B(r) = \mu_0 \, I_{enc}$$

En este caso,

$$I_{enc}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} J(u) u \, du \, d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} u^2 \, du = \frac{2\pi\alpha \, r^3}{3}$$

De esta forma,

$$\vec{B}_{in}(r) = \frac{\mu_0 \alpha \, r^2}{3} \, \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \wedge \quad B_{in} \propto r^2$$

Para el exterior, $r > R$, lo único que cambia es que ahora debemos considerar toda la corriente que circula por el cable, que ya **no** depende del radio:

$$I_{enc} = I = \frac{2\pi\alpha \, R^3}{3} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

Finalmente,

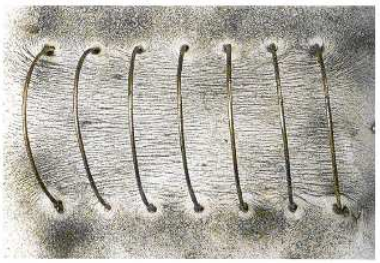
$$\vec{B}_{out}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \wedge \quad B_{out} \propto \frac{1}{r}$$

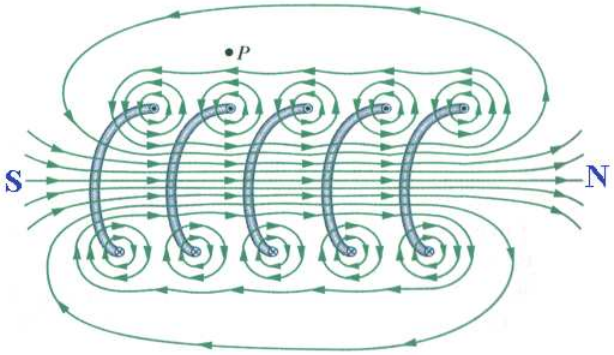
■

(2) Calcule el campo magnético dentro de un solenoide ideal de largo ℓ, N vueltas y que lleva una corriente estacionaria I.

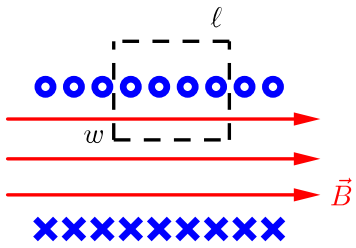
Solución:

Un solenoide es una bobina enrollada en forma helicoidal. La figura muestra las líneas de campo magnético de un solenoide con corriente constante I:





Vemos que si las vueltas están muy cercanas espacialmente, el campo magnético resultante dentro del solenoide es parcialmente uniforme, siempre que la longitud del solenoide sea mucho mas grande que su diámetro. Para un solenoide ideal, que es infinitamente largo con vueltas infinitesimalmente cercanas, el campo magnético dentro es uniforme y paralelo al eje x, utilizando la ley de la mano derecha, y es nulo fuera del solenoide. Podemos utilizar la ley de Ampère para calcular el campo magnético dentro de un solenoide ideal. Una vista transversal de un solenoide ideal se muestra en la figura:



Consideremos el camino rectangular de largo ℓ y ancho w y en sentido contra-reloj. La integral de línea del campo a través de este camino es

$$\oint_{\square} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \oint_{\leftarrow} \vec{B}\cdot d\vec{r} + \oint_{\downarrow} \vec{B}\cdot d\vec{r} + \oint_{\rightarrow} \vec{B}\cdot d\vec{r} + \oint_{\uparrow} \vec{B}\cdot d\vec{r}$$

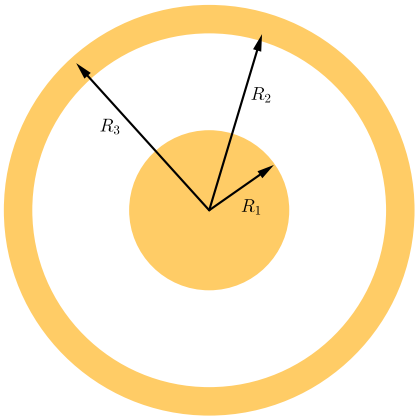
Ahora, la integral sobre $\leftarrow$ es nula, ya que el campo es nulo en el exterior del solenoide. Las integrales sobre $\uparrow$ y $\downarrow$ también son nulas, ya que el campo a lo largo de estas trayectorias es perpendicular a $d\vec{r}$.

Con esto, podemos estirar el camino cerrado de manera que encierre todo el solenoide,notando que la corriente total que atraviesa la superficie encerrada por la trayectoria es NI, con N el número de vueltas del solenoide

$$\oint_{\square} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B\ell = \mu_0 NI \quad \longrightarrow \quad B = \frac{\mu_0\, NI}{\ell}$$

■

(3) La figura muestra la sección transversal de un cable compuesto por dos cilindros concéntricos. Asuma que una corriente I, de densidad constante, "sale de la página" por el cilindro central ($r \leq R_1$) y "entra en la página" por el cilindro exterior ($R_2 \leq r \leq R_3$). Calcule el campo magnético $\vec{B}$ en todo el espacio.



Solución:

La ley de Ampère nos dice que:

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}$$

En nuestro caso, por la simetría axial del problema, $\vec{B} = B\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y por tanto:

$$B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}$$

- $\boxed{r < R_1}$

$$J_1 = \frac{I}{\pi {R_1}^2} \quad \longrightarrow \quad I_{enc} = I\left(\frac{r}{R_1}\right)^2$$

y con ello:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I\, r}{2\pi {R_1}^2}$$

- $\boxed{R_1 < r < R_2}$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}$$

- $\boxed{R_2 < r < R_3}$

$$J_2 = -\frac{I}{\pi({R_3}^2 - {R_2}^2)} \quad \longrightarrow \quad I_{enc} = I - I\,\frac{r^2 - {R_2}^2}{{R_3}^2 - {R_2}^2}$$

y con ello:

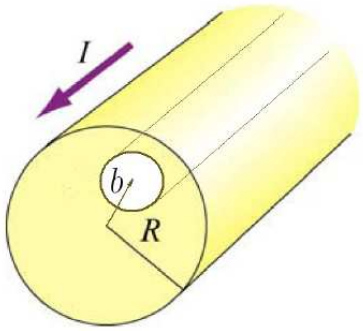
$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}\left(\frac{{R_3}^2 - r^2}{{R_3}^2 - {R_2}^2}\right)$$

- $\boxed{r > R_3}$

$$B_4 = 0$$

■

(4) Un cable de radio R lleva una densidad de corriente $\vec{J} = J_0\,\hat{\boldsymbol{k}}$. El cable tiene una cavidad cilíndrica de radio α paralelo al eje del cable, a distancia b de él. Muestre que el campo magnético dentro de la cavidad es uniforme.

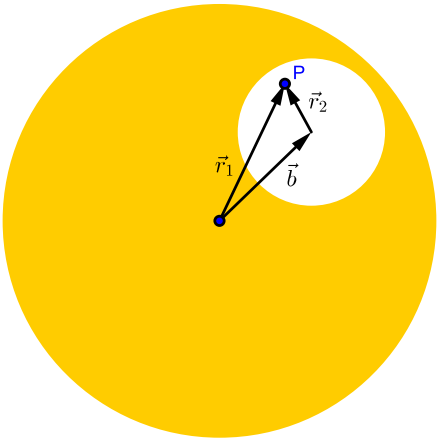


Solución:

Resolvemos el problema por superposición de dos corrientes, una del cilindro completo con densidad de corriente $J_0\,\hat{\boldsymbol{k}}$, y otra en la cavidad con densidad $-J_0\,\hat{\boldsymbol{k}}$. El campo magnético al interior de un cable con densidad de corriente $\vec{J} = J_0\,\hat{\boldsymbol{k}}$ se puede obtener fácilmente con la ley de Ampère: *Tomando la curva circular de radio r, y dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, el campo magnético es constante y tangente sobre la curva.* Así:

$$\oint_{\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{r} = B(r)\,2\pi r = \mu_0 \iint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS = \mu_0 J_0 \pi r^2 \quad \longrightarrow \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0\, r}{2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Sea entonces un punto arbitrario al interior de la cavidad, como muestra la figura:



$$\vec{r}_k = r_k\,\hat{\boldsymbol{\rho}}_k\ , \quad k = \{1, 2\}$$

Por superposición,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 J_0\, r_1}{2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \frac{\mu_0 J_0\, r_2}{2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$$

pero

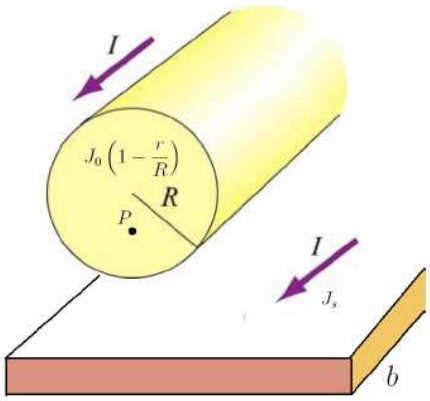
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \qquad \wedge \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_2$$

y por tanto,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r_1\,\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 - r_2\,\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_2\right) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\,\hat{\boldsymbol{k}} \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\,\hat{\boldsymbol{k}} \times \vec{b}$$

el cual es un campo uniforme. ■

(5) Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido (en el dibujo, saliendo de la hoja). Una de ellas circula por el plano infinito y tiene magnitud J_s, y la otra es una corriente cilíndrica infinitamente larga cuya densidad es $J = J_0\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$. Se define al punto P como el punto ubicado a distancia $R/2$ bajo el centro del cilindro, por el eje de simetría que es perpendicular al plano:



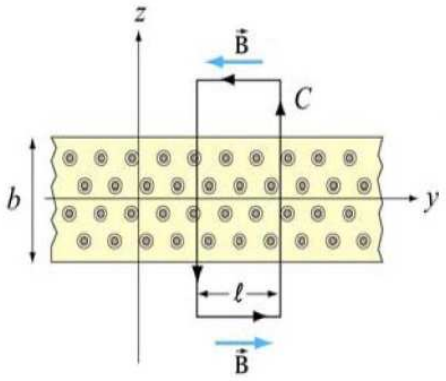
a) Encuentre el campo magnético, en P, generado por J_s

b) Encuentre el campo magnético, en P, generado por J

c) Encuentre el valor de $J_0(J_s)$, que hace que el campo magnético resultante en el punto P sea nulo

Solución:

a) Podemos pensar la región de corriente como una superposición de conductores paralelos que llevan corrientes en la dirección $\hat{\boldsymbol{\imath}}$:



Primero analizamos en qué dirección debiese ir el campo. ¿Puede el campo tener componente en x? No, porque el campo no puede ser paralelo a la dirección de la corriente que lo genera. ¿Puede tener componente en z? Otra vez no. Si suponemos que la superficie se compone de muchos hilos delgados, como muestra la figura, la componente z de la contribución al campo, generada por uno de estos hilos ubicado en $y > 0$, se cancela con su hilo opuesto en $y < 0$. Por ello es que no puede tener componente z. Por tanto,

$$\vec{B} = \pm B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

donde el signo dependerá si estamos sobre o bajo la región, donde el sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha. Ahora, podemos utilizar la ley de Ampère para encontrar el campo magnético debido a esta distribución de corriente. Tomaremos la curva cerrada que aparece en la figura. La corriente que atraviesa la superficie limitada dicha curva es:

$$I_C = J_s b\ell$$

Notando que, en la integral de línea, los segmentos verticales no contribuyen ($d\vec{r}$ perpendicular al campo)

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = B\,2\ell = \mu_0 I_C = \mu_0 J_s b\ell \quad \longrightarrow \quad B = \frac{\mu_0 J_s b}{2}$$

Así,

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0 J_s b}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

b) Para el cilindro, utilizamos nuevamente la ley de Ampère. Dada su extensión infinita, por simetría, el campo magnético en su interior debe ser función únicamente de la coordenada

radial, y su dirección es tal que es tangente en todo punto a una curva circular concéntrica al cilindro:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 2\pi r\, B(r) = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r J_0\left(1-\frac{t}{R}\right) t\, dt = 2\pi\mu_0 J_0\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right)$$

Así,

$$\vec{B}(r) = \mu_0 J_0\left(\frac{r}{2}-\frac{r^2}{3R}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad\longrightarrow\quad \vec{B}(P) = \mu_0 J_0\left(\frac{R}{4}-\frac{R^2}{12R}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{\mu_0 J_0 R}{6}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

c) En el punto P, se tendrá la superposición de ambos campos:

$$\vec{B}_{res}(P) = \left(\frac{\mu_0 J_0 R}{6} - \frac{\mu_0 J_s b}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Para tener un campo magnético nulo, debe tenerse entonces:

$$J_0\frac{R}{6} = \frac{bJ_s}{2} \quad\longrightarrow\quad J_0 = \frac{3bJ_s}{R}$$

■

(6) Considere un plano infinito por el que circula una corriente superficial uniforme $\vec{K} = K\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$.

a) Encuentre el campo magnético en todo el espacio. Para ello, realice un análisis que permita saber a priori en qué dirección debe apuntar el campo.

b) Calcule el flujo magnético a través del manto de un cono de altura h y radio basal R, situado en la región sobre el plano del inciso anterior, con su eje perpendicular al mismo.

c) Obtenga la fuerza magnética por unidad de área que el plano del inciso (*a*) ejerce sobre otro plano paralelo situado a una distancia d del primero, por el que circula la misma corriente $\vec{K} = K\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$.

Solución:

a) Con un análisis **idéntico** al problema anterior, es posible probar que el campo es:

$$\vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}} & z > 0 \\ +\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}} & z < 0 \end{cases}$$

El campo magnético ejercido por este plano resulta uniforme. Note que el campo posee un salto de discontinuidad de $\mu_0 J$ entre la región bajo y sobre el plano. La analogía con el campo eléctrico ejercido por un plano infinito cargado es total.

b) Un hecho experimental muy importante es que, hasta ahora, **no existen** los monopolos magnéticos. Por ejemplo, no podemos separar un imán en un polo norte y un polo sur. Si rompemos un imán a la mitad, cada pedazo se transformará "misteriosamente" en un nuevo imán, con polo norte y polo sur. Como no podemos encontrar monopolos magnéticos, no es

posible encontrar líneas de campo magnético abiertas. Las líneas siempre serán cerradas, o bien, comenzarán y terminarán en el infinito. Consecuencia de esto es que, a través de una superficie cerrada, siempre el flujo magnético es cero, porque toda línea que entra **debe** salir, por ser cerrada. Así,

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

Esta ecuación es la ley de Gauss del magnetismo. Si en cambio se pudiera encontrar un monopolo magnético, las líneas comenzarán o terminarán en una suerte de "carga magnética" q_m, análogo al flujo eléctrico. En ese caso, las líneas ya no serán cerradas, y se obtendría una ley de Gauss del tipo

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = k\, q_m$$

Sin embargo, este hecho nunca ha sido confirmado experimentalmente; así que asumimos que el flujo magnético sobre una superficie cerrada siempre es cero. Basados en este hecho, consideremos un cono sobre el plano del inciso (a). Si lo ponemos con el eje perpendicular al plano, entonces claramente no hay flujo a través de la base. Esto porque ahí $\hat{n} \perp \vec{B}$. El flujo neto, que tiene que ser siempre cero, queda

$$0 = \oint_{tapa} \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS + \oint_{manto} \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \oint_{manto} \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS$$

de donde se concluye que el flujo a través de manto es, por sí solo, igual a cero.

$c)$ Análogamente a la fuerza que un campo magnético $\vec{B}$ ejerce sobre una línea de corriente, $\vec{F} = \int_C I d\vec{r} \times \vec{B}$, es posible decir que la fuerza magnética que este mismo campo ejerce sobre corrientes superficiales $\vec{K}$ y volumétricas $\vec{J}$ es:

$$\vec{F} = \iint_S \vec{K} \times \vec{B}\, dS \qquad \wedge \qquad \vec{F} = \iiint_V \vec{J} \times \vec{B}\, dV$$

luego deducimos que, así como $Id\vec{r} \times \vec{B}$ es la fuerza por unidad de largo, $\vec{K} \times \vec{B}$ representa la fuerza por unidad de superficie sobre S y $\vec{J} \times \vec{B}$ es la fuerza por unidad de volumen sobre V. En nuestro problema, nos interesa la fuerza magnética por unidad de superficie sobre un plano infinito por el que circula una corriente $\vec{K} = K\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Si este plano se encuentra sobre el plano del inciso (a), entonces el campo que siente es $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 K}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y la fuerza por unidad de area es:

$$\vec{f}_m = \vec{K} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 K^2}{2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\frac{\mu_0 K^2}{2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

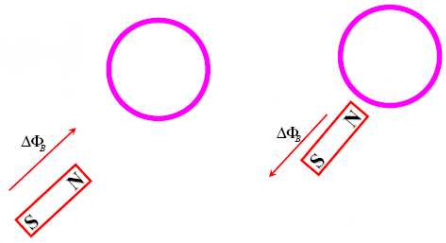
Note el signo negativo. Esto indica que la fuerza apunta hacia abajo, por lo que se concluye que dicha fuerza es *atractiva*. Si, por el contrario, la corriente de los planos corriera en sentidos opuestos, la fuerza sería repulsiva, análogamente a la fuerza magnética entre dos hilos conductores rectos por los que pasa corriente.

■

4. Campos variables en el tiempo

4.1. Ley de inducción de Faraday-Lenz

(1) Este es un problema meramente cualitativo. Si los imanes se mueven de la forma descrita en la figura, determine la dirección de la corriente inducida en cada una de las espiras.



Solución:

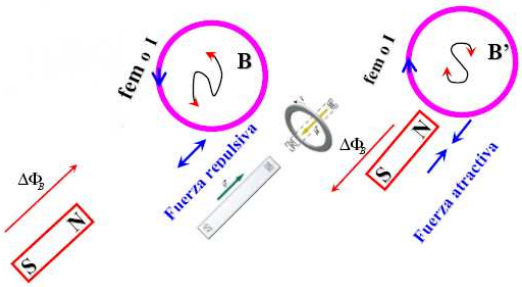
Recordemos la Ley de Lenz:

> *Una f.e.m inducida siempre generará una corriente cuyo campo magnético se oponga al cambio original en el flujo magnético.*

En el caso de la izquierda, el movimiento del imán tiende a aumentar el flujo magnético, por lo que se generará una corriente que cree un campo magnético que se oponga a este hecho. Para reducir el flujo magnético, debe aparecer un campo magnético $\vec{B}$ que apunte **fuera de la espira** y, por la regla de la mano derecha, la corriente circulará en dirección anti-horaria.

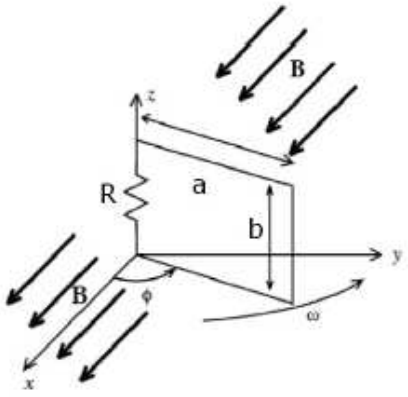
En el caso de la derecha, el flujo disminuye; por tanto, se deberá generar un campo magnético que **entre a la espira**, de modo tal que se oponga a la reducción de flujo. De esta forma, la corriente circulante tendrá dirección horaria.

Finalmente,



■

(2) La espira rectangular de la figura se encuentra sumergida en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{\imath}$. Si la espira gira con velocidad angular ω utilizando el eje z como eje de rotación, y asumiendo que en $t = 0$ la espira se encuentra en el plano YZ, determine la *fem* inducida y la corriente inducida en la espira.



Solución:

Calculamos en flujo magnético, considerando que $\hat{n} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}$,

$$\Phi = -\iint_{\square} B\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}\, dS = BS\sin\theta \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = BS\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

Notemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \longrightarrow \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

Dada la condición inicial, es claro que $\theta_0 = \pi/2$. A partir de la ley de inducción de Faraday, podemos obtener la magnitud de la *fem* inducida en la espira:

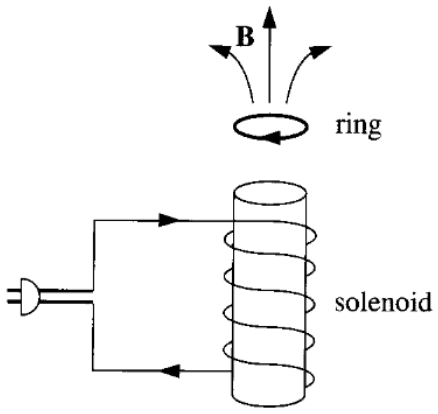
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\omega ab\cos\left(\omega t + \pi/2\right)$$

La magnitud de la corriente es, simplemente

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{B\omega ab}{R}\cos\left(\omega t + \pi/2\right)$$

■

(3) Considere el experimento del siguiente video: Si coloca un solenoide alrededor de un núcleo de hierro (el hierro es solo para reforzar el campo magnético) y coloca un anillo metálico en él, al prender la fuente de voltaje, el anillo saltará varios metros en el aire ¿Por qué? Si repite el experimento con un anillo con un corte a todo lo alto del anillo, éste no se elevará. ¿Por qué?



Solución:

Antes que circule corriente, el flujo a través del anillo es cero. *Después* de encender el aparato, aparece un flujo (hacia arriba en la figura) y la *fem* generada en el anillo hará circular una corriente (en el anillo) que, de acuerdo con la Ley de Lenz, será en dirección tal que el campo magnético generado tienda a anular el nuevo flujo. Esto significa que que la corriente circulará en sentido **opuesto** a la corriente en el solenoide. Corrientes opuestas se repelen, y el anillo saltará.

En el segundo caso, el anillo está cortado y **no permite** que circule una corriente por el perímetro, y por tanto el efecto antes descrito no se generará. ■

(4) Considere un *loop* circular conductor de diámetro D, masa M y resistencia R que cae por acción de la gravedad desde una gran altura h, en una región en donde existe un campo magnético no uniforme con componente $B_z = B_0(1+kz)$, siendo z la altura respecto del suelo y k alguna constante. Suponga que el plano del *loop* se mantiene horizontal en toda la caída. Ignore efectos de roce con el aire.

a) Explique por qué se induce una corriente en el *loop*. Calcule su magnitud e indique su sentido.

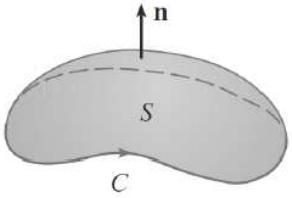
b) Describa cualitativamente la caída del *loop*. ¿Cuál es la velocidad terminal del mismo?

Solución:

a) En la región en donde se encuentra el *loop* circular, existe un campo magnético $\vec{B} = B_x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$, cuyas componentes x e y no son nulas. Esto se puede deducir notando que, si el campo solo tuviese la componente z señalada en el enunciado, su divergencia claramente no es nula, contradiciendo lo que se sabe de los campos magnéticos físicamente plausibles. No obstante, si imponemos que el *loop* se mantiene horizontal toda la caída, solo la componente vertical B_z será relevante en el calculo del flujo magnético a través del área que encierra el mismo. Por otra parte, ya que esta componente no es uniforme, dependerá del tiempo, y lo mismo ocurrirá con el flujo magnético. Por la ley de Lenz, una variación en el flujo magnético induce una *fem* en el circuito:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \varepsilon = -\frac{\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS\right)$$

Es **MUY IMPORTANTE** entender la convención que se usa para el sentido en que se recorre la integral de línea. La convención es simple: regla de mano derecha, la misma de Cálculo en Varias Variables:



Veamos este problema. El flujo a través del *loop* que cae horizontalmente, es debido solo a la componente vertical, por lo que tomando el vector $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{k}}$, obtenemos:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S B_z\, dS = B_z \iint_S dS = B_0(1+kz)\mathcal{A}$$

en donde hemos usado que la componente normal, al depender solo de la altura z, es constante sobre toda la superficie, la cual se encuentra horizontal, así que sale de la integral. En este caso, $\mathcal{A}$ es el área de la espira. La variación en este flujo es:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = B_0 k \mathcal{A} \frac{dz}{dt}$$

y vemos que no es nulo. Notemos que z' es la velocidad con que cae el *loop*, y dado que escogimos el eje z hacia arriba, esta velocidad resulta negativa (la coordenada z del *loop* disminuye en el tiempo). Por Lenz, la *fem* inducida en la espira es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B_0 k \mathcal{A}\, z'$$

un valor **positivo** cuando $k > 0$. Por nuestra convención, entonces vemos que la corriente fluye en el mismo sentido en que se recorre C, tal que $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{k}}$: anti-horario visto desde la parte superior del *loop*. Su módulo es evidentemente

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = -\frac{B_0 k \mathcal{A}\, z'(t)}{R}$$

b) Haremos esto un poco explícito. Podemos descomponer el campo magnético como $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_z$, en donde $B_{\parallel}$ es la componente que vive en el plano XY. Al circular una corriente, el campo ejerce una fuerza magnética sobre el *loop*, dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \oint_{\circlearrowleft} I\, d\vec{r} \times \vec{B} \\
&= I \oint_{\circlearrowleft} d\vec{r} \times \vec{B}_{\parallel} + \oint_{\circlearrowleft} d\vec{r} \times \vec{B}_z \\
&= I \left(\oint_{\circlearrowleft} d\vec{r} \right) \times \vec{B}_z + I \oint_{\circlearrowleft} (dx\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + dy\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (B_x\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}) \\
&= I \left(\oint_{\circlearrowleft} B_y\, dx - B_x\, dy \right) \hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

Recordemos que no conocemos la forma de las otras componentes del campo magnético, pero aun así, podemos deducir que la fuerza neta apunta en la dirección z es $\vec{F}_B = I(t)\eta\, \hat{\boldsymbol{k}}$, en donde η la integral de línea.

El desarrollo anterior nos convence de que sobre el anillo, además de actuar la fuerza de gravedad, actúa una fuerza que resulta ser proporcional a la corriente, y por ende, proporcional a la velocidad con que cae el anillo. Cualitativamente, esperamos que esta fuerza proporcional

aumente conforme aumenta la rapidez con que cae el *loop*. La fuerza magnética aumentará hasta que llegue a ser igual al peso del cuerpo, una fuerza siempre constante. En ese momento la aceleración del *loop* será cero, y el mismo caerá con velocidad constante. Este es un movimiento totalmente análogo a un cuerpo que cae con roce en el aire. La velocidad final con que termina moviéndose el objeto, se conoce como velocidad terminal. Aceptando toda esta descripción del movimiento, es posible obtener la velocidad terminal al menos de dos formas distintas:

- Cuando el *loop* caiga con velocidad igual a la terminal, su aceleración será nula. En este estado, la fuerza magnética será igual al peso,

$$I_{term}\eta = \frac{B_0 \mathcal{A} k v_{term}}{R}\eta = Mg$$

en donde I_{term} es la corriente terminal (constante) que circula por el *loop*. En principio, para calcular η necesitamos explícitamente las componentes B_x, B_y de campo magnético para evaluar la integral; sin embargo, no las conocemos. No obstante, hay una manera astuta de calcular esta integral de todas formas: usando el Teorema de Green,

$$\eta = \oint_{\circlearrowleft} B_y\,dx - B_x\,dy = -\iint \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\,dS$$

pero

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Así:

$$\eta = B_0 k \iint dS = B_0 k \mathcal{A}$$

Por ende, la velocidad terminal resulta ser

$$v_{term} = \frac{MgR}{{B_0}^2 \mathcal{A}^2 k^2}$$

- Cuando el *loop* cae, la variación en la energía potencial gravitatoria se compensa con la energía disipada por efecto Joule en el *loop*. Si en un intervalo Δt ha caído una distancia Δh, entonces

$$Mg\Delta h = I^2 R \Delta t$$

pero si la velocidad es constante en el tramo, entonces $v = \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$. Aplicando esto a cuando el *loop* se mueva con velocidad terminal,

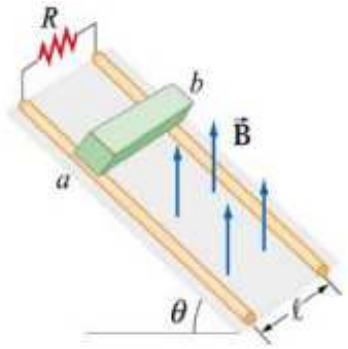
$${I_{term}}^2 R = Mg v_{term}$$

Reemplazando la corriente $I_{term} = \dfrac{B_0 \mathcal{A} k v_{term}}{R}$,

$$v_{term} = \frac{MgR}{{B_0}^2 \mathcal{A}^2 k^2}$$

■

(5) Una barra conductora de masa m desliza entre 2 rieles conductores, sin fricción, que forman un ángulo θ con la horizontal, están separados una distancia ℓ y unidos por una resistencia R. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ es aplicado verticalmente. La barra se suelta del reposo y desliza hacia abajo.



a) Determine la corriente inducida en la barra. ¿En qué dirección fluye, de a hacia b o de b hacia a?

b) Calcule la velocidad terminal de la barra.

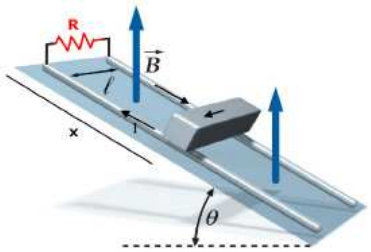
c) Una vez alcanzada la velocidad terminal, ¿Cuál es la corriente inducida?

d) ¿A qué tasa se disipa energía en la resistencia?

e) ¿Cuál es la tasa de variación de trabajo por unidad de tiempo asociada a la gravedad?

Solución:

a) Antes que todo, coloquemos el eje de forma usual, y **no** sobre el plano inclinado. Supongamos que, en un instante dado, la barra se encuentra a una distancia x del extremo, como se ve en la figura:



El circuito formado por los rieles y la barra que desliza encierra una superficie plana cuya normal es:

$$\hat{n} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

y el flujo a través de esta espira es:

$$\Phi_B = \iint_{\square} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = Bx\ell\cos\theta$$

Con esto, la *fem* inducida en los extremos de la barra es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\ell\cos\theta\frac{dx}{dt}$$

Así, la corriente inducida será

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{B\ell}{R}\cos\theta\frac{dx}{dt}$$

La dirección se ve de la siguiente forma: el flujo está aumentando, por lo que se requiere inducir una corriente tal que su campo magnético apunte hacia abajo y se contraponga al cambio en el flujo. de esta forma, por la regla de la mano derecha, la corriente debe circular en dirección $b \to a$.

b) La fuerza magnética que ejerce el campo sobre la barra es:

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B} = I\ell\,\hat{\boldsymbol{k}} \times B\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -BI\ell\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

La fuerza de gravedad viene dada por:

$$\vec{F}_g = -mg\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Haciendo suma de fuerzas en el eje x (proyectando paralelamente sobre la superficie):

$$mx'' = mg\sin\theta - BI\ell\cos\theta = mg\sin\theta - \frac{B^2\ell^2}{R}\cos^2\theta x'$$

$$v' = \alpha - \beta\, v$$

con $v = x'$, $\alpha = g\sin\theta$ y $\beta = B^2\ell^2\cos^2\theta/mR$. Resolviendo,

$$dt = \frac{dv}{\alpha - \beta} \quad \longrightarrow \quad t - t_0 = \int_{v_0}^{v}\frac{ds}{\alpha - \beta\, s} = -\frac{\ln(a - \beta\, v)}{\beta} + \frac{\ln(a - \beta\, v_0)}{\beta}$$

como $t_0 = 0$, $v_0 = 0$:

$$-\beta\, t = \ln\left(1 - \frac{\beta\, v}{\alpha}\right) \quad \longrightarrow \quad v(t) = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1 - e^{-\beta\, t}\Big)$$

Por tanto,

$$v_t = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{mgR\sin\theta}{B^2\ell^2\cos^2\theta}$$

c) La corriente terminal es:

$$I_t = \frac{B\ell}{R}\cos\theta\, v_t = \frac{mg\tan\theta}{B\ell}$$

d) El módulo de la *fem* inducida en este caso es:

$$|\varepsilon_t| = \frac{mgR\tan\theta}{B\ell}$$

Por tanto, la potencia disipada es:

$$\mathcal{P}_{elec} = |\varepsilon_t| I_t = \frac{m^2 g^2 R\tan^2\theta}{B^2\ell^2}$$

e) La potencia asociada a la gravedad es:

$$\mathcal{P}_{grav} = W_{\parallel}\, v_t = \frac{m^2 g^2 R \tan^2\theta}{B^2 \ell^2}$$

con $W_{\parallel} = mg\sin\theta$ la componente del peso en la dirección de desplazamiento. Vemos que el valor de esta potencia es la misma que la potencia que disipa la resistencia. Esto se debe al principio de conservación de la energía.

■

(6) Note la similitud entre la ley de Ampère

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

y la ley de Faraday-Lenz

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

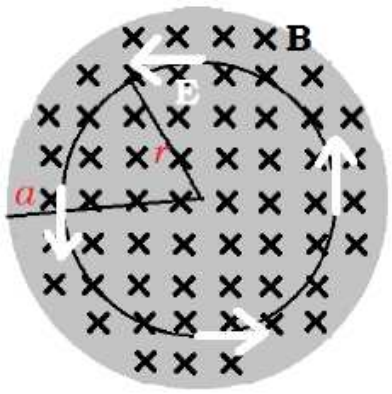
Nada nos impide aplicar los métodos de "anillos amperianos" al cálculo de campos eléctricos generados por campos magnéticos variables, de forma análoga al cálculo de campos magnéticos producidos por corrientes estacionarias. Suponga un solenoide largo y recto, de radio a y con n vueltas por unidad de largo, por el que circula una corriente $I(t)$. Si la corriente varía en el tiempo, encuentre el campo eléctrico que se induce dentro y fuera del solenoide.

Solución:

Como ya calculamos previamente, el campo magnético producido por el solenoide recto es:

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I(t)\,\hat{\boldsymbol{k}} & r < a \\ \vec{0} & r > a \end{cases}$$

en donde hemos usado coordenadas cilíndricas, siendo el eje z coincidente con el eje del solenoide. Supongamos un *loop* circular de radio $r < a$ como muestra la figura. El flujo magnético encerrado por ese *loop* es



$$\Phi_B = B(t)\pi r^2 = \mu_0 \pi r^2 n I(t)$$

y la variación de flujo queda como

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \dot{B}(t)\pi r^2 = \mu_0 \pi r^2 n \dot{I}(t)$$

Por la ley de Faraday-Lenz,

$$\oint_{\bigcirc} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\dot{B}(t)\pi r^2 = -\mu_0 \pi r^2 n \dot{I}(t)$$

Dado que el campo magnético es paralelo al eje z, el campo eléctrico inducido será perpendicular a éste, en la dirección tangencial, por lo que $\vec{E} = E\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Para una descripción más detallada de este argumento, revisar el inicio del problema siguiente. Así, la *fem* inducida será

$$\varepsilon = \oint_{\bigcirc} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_{\bigcirc} E\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot dr\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 2\pi r\, E(r)$$

y por ende

$$2\pi\, E(r) = -\mu_0 \pi r^2 n \dot{I}(t)$$

Con ello,

$$\vec{E}_{in} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \dot{I}(t)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Este es el campo dentro del solenoide. El campo fuera se obtiene de forma análoga, pero el *loop* ahora encierra todo el solenoide. El flujo es

$$\Phi_B = B(t)\pi a^2 = \mu_0 n \pi a^2 I(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 n \pi a^2 \dot{I}(t)$$

Por la ley de Faraday-Lenz,

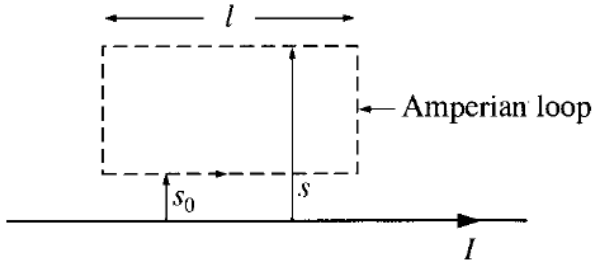
$$2\pi r\, E(r) = -\mu_0 n \pi a^2 \dot{I}(t)$$

Y finalmente:

$$\vec{E}_{out} = -\frac{\mu_0 n a^2}{2r} \dot{I}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

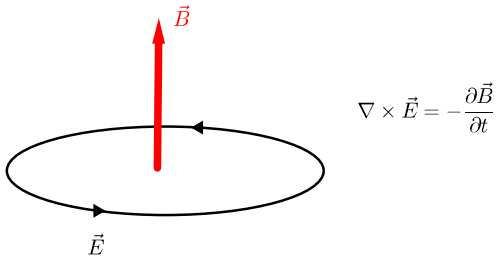
lo cual concluye el problema. ■

(7) Un cable recto infinitamente largo porta una corriente con pequeñas perturbaciones $I(t)$. Determine el campo eléctrico inducido, en función de la distancia s desde el cable. Hint: use el anillo amperiano de la figura.



Solución:

Primero que todo, de la ley de Faraday en su forma diferencial, es posible concluir que el campo eléctrico inducido *circulará* en torno a $\vec{B}$ –dado que, en este caso, al derivar no cambio en la dirección del campo– de manera análoga al caso de un hilo de corriente y la ley de Ampère:



Así, de manera análoga a lo que ocurre en un solenoide al calcular el campo magnético, el campo eléctrico inducido será paralelo al eje. En la aproximación cuasiestática, el campo magnético tiene magnitud $\mu_0 I/2\pi s$ y circula alrededor del cable. Para el anillo amperiano de la figura,

$$\begin{aligned}\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; E(s_0)\ell - E(s)\ell \;&=\; -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS \\ &=\; -\frac{\mu_0\ell}{2\pi}\frac{dI}{dt}\int_{s_0}^{s}\frac{ds'}{s'} \;=\; -\frac{\mu_0\ell}{2\pi}\frac{dI}{dt}(\ln s - \ln s_0)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{E}(s) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s + K\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

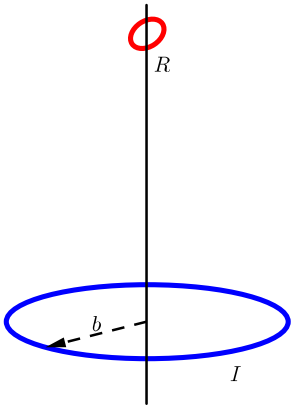
donde K es una constante (independiente de s, pero podría depender de t). El resultado anterior implica que E diverge cuando $s \to \infty$. **Esto no puede ser cierto...** ¿Qué está incorrecto? Respuesta: Hemos sobrepasado los límites de la aproximación cuasiestática. Como veremos en el capítulo final, las "noticias" electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz, y a largas distancias $\vec{B}$ depende no de la corriente *ahora*, sino de la corriente *que era* en un tiempo anterior. Si τ es el tiempo que le toma a I cambiar sustancialmente, entonces la aproximación cuasiestática debe ser correcta solo para

$$s \ll c\tau$$

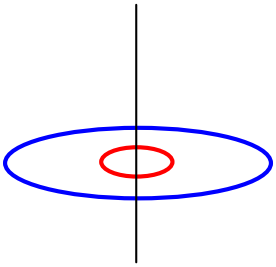
y nuestra solución no es válida para valores grandes de s. ■

4.2. Inductancia. Circuitos RL, LC y RLC

(1) *a*) Considere dos circuitos circulares de radios a y $b \gg a$ separados una distancia z, como muestra la figura. Los centros de ambos circuitos se encuentran sobre el eje z y el plano del circuito menor está inclinado en un ángulo α. Este mismo circuito tiene resistencia R. ¿Cuál es la inductancia mutua del sistema?



b) Considere dos espiras coplanares y concéntricas, de radios R_1 y $R_2 \ll R_1$. Encuentre la inductancia mutua entre ambas espiras.

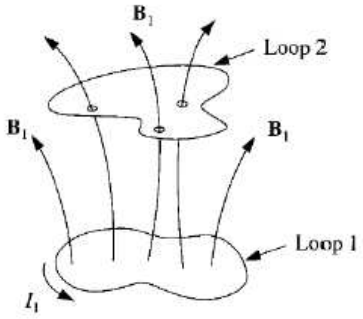


Solución:

Como sabemos, la inductancia mutua se define como

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

en donde Φ_{12} es el flujo a través de la espira 2, del campo magnético producido por la corriente I_1 en la espira 1 (ver figura abajo).



Es posible demostrar que la inductancia mutua es la misma si se invierten los roles del *loop* 1 y el *loop* 2, por lo que

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Es por esto que para calcular la inductancia mutua **podemos escoger uno u otro flujo**. Evidentemente, siempre se escoge el flujo cuyo cálculo sea el más simple.

a) En este caso, podemos suponer que el anillo menor, al ser de radio mucho más pequeño, se encuentra contenido en un punto z sobre el eje vertical. Por ser ínfimo, el campo que lo atraviesa (producido por el anillo mayor) es, en esencia, uniforme e igual al visto en problemas anteriores:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2b}\left(1+\frac{z^2}{b^2}\right)^{-3/2}\hat{\boldsymbol{k}}$$

en donde hemos supuesto que por el anillo mayor circula una corriente I. El flujo a través del anillo menor es, entonces,

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_S B\cos\alpha\,dS = B\cos\alpha\iint_S dS = \frac{\mu_0 I S\cos\alpha}{2b}\left(1+\frac{z^2}{b^2}\right)^{-3/2}$$

con $S=\pi a^2$ el área de la espira menor. Aquí hemos usado que $\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = B\cos\alpha\,dS$. Dividiendo por la corriente, obtenemos la inductancia mutua,

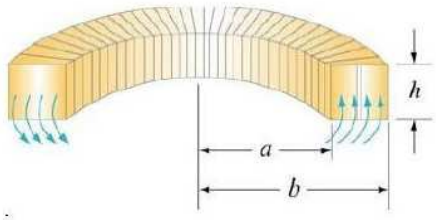
$$M = \frac{\mu_0\pi a^2\cos\alpha}{2b}\left(1+\frac{z^2}{b^2}\right)^{-3/2}$$

b) Este es un caso particular del anterior, con $\alpha = 0$ y $z = 0$. Por tanto,

$$M = \frac{\mu_0\pi {R_2}^2}{2R_1}$$

■

(2) Considere un toroide de N vueltas y de sección rectangular de lado h, radio interior a y radio exterior b.



a) Calcule la autoinductancia y discuta qué ocurre cuando $a \gg b-a$

b) Calcule la energía magnética almacenada en el toroide

Solución:

a) Utilizando la ley de Ampère, el campo magnético dentro del toroide se obtiene como

$$\oint_{\bigcirc}\vec{B}\cdot d\vec{r} = 2\pi r\,B = \mu_0 N I \quad\longrightarrow\quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

donde se ha integrado el campo sobre una circunferencia de radio r ubicada en el centro del toroide. El flujo magnético sobre una vuelta del toroide se puede obtener al integrar sobre todas las secciones rectangulares, con $dS = h\,dr$ como elemento diferencial de área:

$$\Phi_B{}^{una\ \ vuelta} = \iint_{\square} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = h\int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln(b/a)$$

y el flojo total sobre el toroide será $\Phi_B = N\,\Phi_B{}^{una\ \ vuelta}$. Con esto, la autoinductancia será

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln(b/a)$$

Cuando $a \gg b-a$, te tiene que

$$\ln(b/a) = \ln\left(1+\frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$$

y la inductancia sería

$$L_{lim} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\frac{b-a}{a}$$

Recordando que el área de un solenoide es $S = h(b-a)$,

$$L_{lim} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi a}$$

y con $\ell = 2\pi a$,

$$L_{lim} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

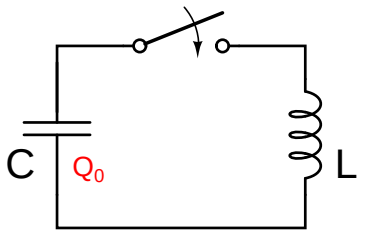
que es, justamente, la autoinductancia de un solenoide.

b) La energía almacenada en el toroide es simplemente

$$U = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi}\ln(b/a)$$

■

(3) Considere el siguiente circuito LC. Suponga que el condensador tiene una carga inicial Q_0. En $t = 0$, el interruptor se cierra.



a) Encuentre la ecuación diferencial para la carga en el condensador mediante consideraciones energéticas.

b) Utilizando las leyes de Kirchhoff, encuentre $I(t)$ y $Q(t)$

Solución:

a) En ausencia de una resistencia, la energía total se transforma constantemente en energía eléctrica y magnética, fenómeno conocido como oscilación electromagnética. Le energía total del circuito LC en un instante arbitrario es

$$E_{total} = U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2\,C} + \frac{L\,I^2}{2}$$

Por el principio de conservación de la energía,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2\,C} + \frac{L\,I^2}{2}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0$$

Además, hay que notar que: Para ver la relación entre carga del condensador y corriente por la inductancia, hagamos el siguiente análisis:

- Si la corriente por la inductancia es positiva, y circula positivamente, entonces significa que el condensador se descarga. Por tanto,

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

- Si la corriente por la inductancia es negativa, entonces circula en la otra dirección y por tanto está cargando al condensador. Así,

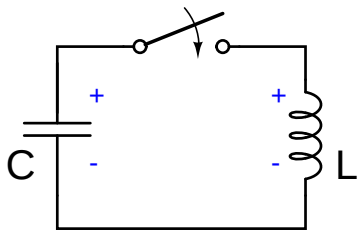
$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

Por tanto:

$$-\frac{Q}{C}\,I + LI\,\frac{dI}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{Q}{C} + L\,\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

que es la ecuación diferencial para la carga en el condensador.

b) Utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff,



$$-V_C + V_L = -\frac{Q}{C} + L\,\frac{dI}{dt} = 0$$

Aquí nuevamente usamos la relación entre variación de carga y corriente. Por tanto,

$$\frac{Q}{C} + L\,\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad Q'' + \frac{1}{LC}\,Q = 0$$

que posee por solución general

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$$

donde la frecuencia angular ω está dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corriente por la inductancia es

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \sin(\omega t + \phi) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

con $I_0 = \omega Q_0$. De las condiciones iniciales $Q(0) = Q_0$ e $I(0) = 0$, la fase es simplemente $\phi \equiv 0$. Con esto, las soluciones para la carga y la corriente en el circuito LC son:

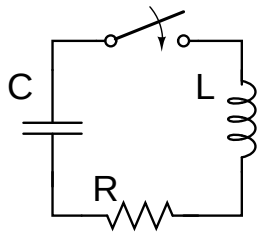
$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t) \qquad \wedge \qquad I(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

Notar que, con $U = U_C + U_L$, se cumple que:

$$U = \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{LI^2(t)}{2} = \frac{{Q_0}^2}{2C}\cos(\omega t) + \frac{L{I_0}^2}{2}\sin(\omega t) = \frac{{Q_0}^2}{2C}\cos(\omega t) + \frac{{Q_0}^2}{2C}\sin(\omega t) = \frac{{Q_0}^2}{2C}$$

■

(4) Considere el circuito RLC en serie, que consta de una resistencia, una inductancia, y un condensador:



Mediante consideraciones energéticas, encuentre la ecuación diferencial para la carga en el condensador.

Solución:

La energía, en un instante arbitrario t, está dada por

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$$

A diferencia del circuito LC, parte de la energía del circuito será disipada por la resistencia. Esto es, la tasa a la cual la energía es disipada es

$$\frac{dU}{dt} = -I^2 R$$

donde el signo negativo implica que la energía total disminuye en el tiempo. Así,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R$$

Nuevamente $\dot{Q} = -I$, y con ello

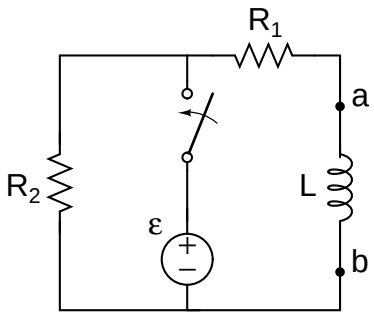
$$-\frac{Q}{C}I + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R \quad \longrightarrow \quad -\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = -IR \quad \longrightarrow \quad -\frac{Q}{C} - L\frac{d^2Q}{dt^2} = R\frac{dQ}{dt}$$

Finalmente, la EDO para la carga es:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

■

(5) En la figura, el interruptor se cierra en $t < 0$ y se establece una condición de estado estable. El interruptor se abre después en $t = 0$.



a) ¿Cuál es la energía almacenada en la bobina justo antes de abrir el interruptor?

b) Encuentre la diferencia de potencial en la bobina justo después de abrir el interruptor. ¿Cuál extremo de la bobina está a mayor potencial, *a* o *b*?

c) Realice gráficas a mano de las corrientes en las resistencias, como funciones del tiempo. Muestre valores antes y después de $t = 0$.

d) ¿Cuánto tiempo después de $t = 0$ la corriente en R_2 es **i**?

Solución:

a) Cuando se ha alcanzado un equilibrio estable, la corriente en un circuito LR ya no varía en el tiempo, y por ende ya no hay diferencia de potencial entre los extremos de la bobina. Decimos en ese caso la bobina se comporta como un cortocircuito. En ese caso el circuito de la figura es simplemente una pila con dos resistencias. Suponiendo que la corriente circula en sentido horario en la malla derecha, y anti-horario en la izquierda, la ley de las mallas –aplicada a la malla derecha– implica que:

$$-\varepsilon + I_1R_1 = 0$$

en donde I_1 es la corriente que pasa por R_1. Esta es la misma corriente que pasa por la bobina, $I_L = \varepsilon/R_1$. La energía en la bobina es, entonces,

$$U_L = \frac{L{I_L}^2}{2} = \frac{L\varepsilon^2}{2{R_1}^2}$$

b) Justo después de cambiar el estado del circuito abriendo el interruptor, la corriente a través de la bobina es la misma que justo antes, pues la bobina se opone a los cambios en la corriente circulante. Esta es, por ende, la corriente que circula en toda la malla exterior. Note que la corriente en R_2 se ha invertido. La ley de mallas nos indica entonces que, en $t = 0^+$,

$$-\varepsilon_L(0^+) + I(0^+)R_1 + I(0^+)R_2 = 0$$

con $I(0^+) = \varepsilon/R_1$. Despejando la diferencia de potencial,

$$\varepsilon_L(0^+) = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\,\varepsilon$$

y como la corriente circula en sentido horario –en la malla externa–, el potencial en b es mayor que en a.

c) Para un instante $t > 0$, la ley de las mallas nos dice que

$$-\varepsilon_L + I(R_1 + R_2) = 0$$

en donde $\varepsilon_L = -L\dot{I}$, por Lenz. La ecuación queda

$$\dot{I} + \frac{R}{L}I = 0 \quad \longrightarrow \quad (D + \alpha)I = 0$$

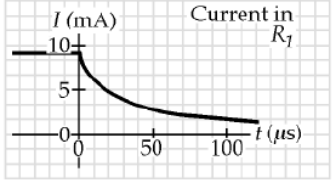
con $\alpha = R/L$ y $R = R_1 + R_2$. Usando el Método del operador diferencial aprendido en el curso de Ecuaciones Diferenciales,

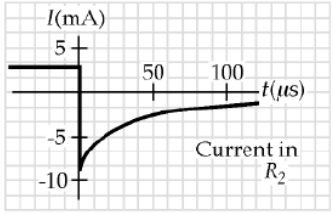
$$I(t) = Ke^{-\alpha t}$$

Reemplazando $I(0) = \varepsilon/R_1$,

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\,e^{-\alpha t}$$

Este resultado era el esperado: en ausencia de una *fem* externa, la corriente decae exponencialmente en un circuito LR. Toda la energía almacenada en el inductor es disipada por la resistencia. Esta corriente es la misma que circula en ambas resistencias. Un bosquejo de ambas corrientes es parecido al que aparece a continuación. Los números corresponden a $\varepsilon = 18\,\mathrm{V}$, $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$ y $L = 0.4\,\mathrm{H}$.





Note que, en R_2, la corriente se vuelve negativa. Esto es porque el sentido se ha invertido respecto de su sentido original.

d) Sea t^* el instante en el cual la corriente vale $\mathbf{i}$. Matemáticamente, $I(t^*) = \mathbf{i}$. Reemplazando en la ecuación de la corriente, podemos despejar el tiempo en función de la corriente deseada,

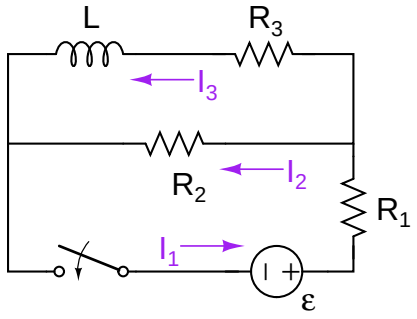
$$\mathbf{i} = I(t^*) = \frac{\varepsilon}{R_1}\, e^{-\alpha t^*} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathbf{i}R_1}{\varepsilon} = e^{-\alpha t^*}$$

Tomando logaritmo y despejando el tiempo,

$$t^* = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\mathbf{i}R_1}{\varepsilon}\right) = \frac{L}{R_1 + R_1} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\mathbf{i}R_1}\right)$$

■

(6) Considere el circuito de la figura



Determine la corriente por cada resistencia:

a) Inmediatamente después de cerrar el interruptor

b) Después de que ha pasado mucho de tiempo de cerrado el interruptor

c) Suponga que el interruptor es reabierto después de que ha estado mucho tiempo cerrado, encuentre nuevamente las corrientes:

(I) Inmediatamente después de que es abierto

(II) Después de un largo tiempo

Solución:

a) Inmediatamente después de que el interruptor es cerrado, la corriente a través de la inductancia es cero ya que la *fem* autoinducida evita que la corriente crezca abruptamente. Así, $I_3 = 0$. Debido a que $I_1 = I_2 + I_3$, se tiene que $I_1 = I_2$. Utilizando las leyes de Kirchhoff,

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + I_1 R_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

b) Después de un largo tiempo, no hay *fem* autoinducida en la inductancia y las corrientes pasan a ser constantes. Para la malla inferior, se tiene ahora

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + I_2 R_2 = 0$$

y para la malla superior,

$$I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0$$

por último, por la ley de nodos, $I_1 = I_2 + I_3$. Resolviendo, se obtiene

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\varepsilon}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{R_3 \varepsilon}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_3 = \frac{R_2 \varepsilon}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

c) (I) Inmediatamente después de que el interruptor es abierto nuevamente, la corriente a través de R_1 es 0, $I_1 = 0$. Esto implica que $I_2 + I_3 = 0$. La malla superior ahora forma un circuito RL que decae e I_3 tiende a mantenerse en el tiempo. Así,

$$I_3 = -I_2 = \frac{R_2 \varepsilon}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

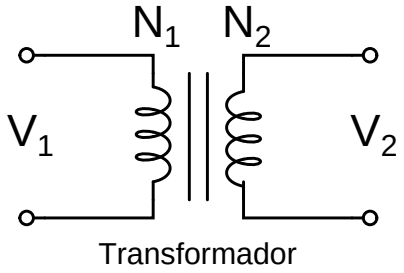
(II) Después de mucho tiempo, toda la energía se ha disipado, y por tanto todas las corrientes son cero:

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0$$

■

4.3. Corriente Alterna

(1) El resultado visto en clases, respecto a un transformador, nos permite obtener un voltaje de salida determinado cambiando el número de espiras en las bobinas dentro del transformador. Por ejemplo, si $N_2 > N_1$, el voltaje de salida resulta mayor al voltaje de entrada. ¿Viola esto el principio de conservación de energía? El problema consiste en convencerse de que la respuesta es **no**. Para ello,



a) Demuestre que $M^2 = L_1 L_2$, en donde M es la inductancia mutua, y $L_{i=1,2}$ son las autoinductancias.

b) Suponiendo que la *fem* en la bobina primaria es $-\varepsilon_1 = V_1 \cos\omega t$, y que la secundaria se conecta a una resistencia R, demuestre que las corrientes satisfacen las ecuaciones

$$L_1\dot{I}_1 + M\dot{I}_2 = V_1 \cos\omega t \ , \quad L_2\dot{I}_2 + M\dot{I}_1 = -I_2 R$$

c) Obtenga las corrientes como función del tiempo, asumiendo que $I_1(t)$ es una corriente puramente alterna.

d) Muestre que el voltaje de salida y el voltaje de entrada satisfacen

$$\left|\frac{V_{in}}{V_{out}}\right| = \frac{N_1}{N_2}$$

e) Finalmente, muestre que la potencia entrante promediada en un ciclo $T = 2\pi/\omega$ es igual a la potencia saliente promediada en el mismo intervalo temporal.

Solución:

a) Si todas las espiras de ambas bobinas son cruzadas por el mismo flujo, digamos Φ, entonces el flujo neto en la espira primaria se puede escribir como una contribución de autoinductancia e inductancia mutua,

$$\Phi_1 = N_1\Phi = L_1 I_1 + M I_2 \quad \longrightarrow \quad \Phi = \frac{L_1}{N_1} I_1 + \frac{M}{N_1} I_2$$

Lo mismo se puede hacer para la bobina secundaria,

$$\Phi_2 = N_2\Phi = L_2 I_2 + M I_1 \quad \longrightarrow \quad \Phi = \frac{L_2}{N_2} I_2 + \frac{M}{N_2} I_1$$

Igualando ambas ecuaciones,

$$\frac{L_1}{N_1} I_1 + \frac{M}{N_1} I_2 = \frac{L_2}{N_2} I_2 + \frac{M}{N_2} I_1$$

De aquí vemos que, si la corriente en la bobina primaria es nula, entonces $M/N_1 = L_2/N2$. Si, en cambio, la corriente en la bobina secundaria es nula, vemos que $L_1/N_1 = M/N_2$. Multiplicando ambas ecuaciones, se prueba que $M^2 = L_1 L_2$. Este resultado deja de ser válido si el flujo en distintas espiras es diferente.

b) Por la ley de Lenz, la *fem* inducida en cada bobina es

$$-\varepsilon_1 = L_1\dot{I}_1 + M\dot{I}_2 \ , \quad -\varepsilon_2 = L_2\dot{I}_2 + M\dot{I}_1$$

Del enunciado hemos de suponer que $-\varepsilon_1 = V_1 \cos\omega t$. Por otra parte, si se conecta una resistencia R a la bobina secundaria, debemos tener por Kirchhoff, $\varepsilon_2 - I_2 R = 0$. Inmediatamente obtenemos las ecuaciones

$$L_1\dot{I}_1 + M\dot{I}_2 = V_1 \cos\omega t \ , \quad L_2\dot{I}_2 + M\dot{I}_1 = -I_2 R$$

c) Para resolver estas ecuaciones, multiplicamos la primera por L_2, la segunda por M y restamos, recordando que $M^2 = L_1 L_2$. Obtenemos:

$$I_2 = -\frac{MV_1}{L_1 R}\cos\omega t = -\frac{L_2 V_1}{MR}\cos\omega t$$

Insertando este resultado en la primera ecuación,

$$L_1\dot{I}_1 = V_1\cos\omega t - M\dot{I}_2 = V_1\cos\omega t - \frac{\omega L_2 V_1}{R}\sin\omega t$$

Integrando,

$$L_1 I_1 = \frac{V_1}{\omega}\sin\omega t + \frac{L_2 V_1}{R}\cos\omega t + A$$

en donde A es una constante de integración. Del enunciado, debemos suponer que la corriente por la bobina primaria es puramente alterna, lo que implica que no puede tener componentes continuas, representados matemáticamente por términos constantes; por ende $A = 0$. La corriente 1 queda:

$$I_1 = \frac{V_1}{\omega L_1}\sin\omega t + \frac{L_2 V_1}{L_1 R}\cos\omega t$$

d) El voltaje de entrada es, por el enunciado, $V_{in} = V_1\cos\omega t$. El voltaje de salida es el de la resistencia, $V_{out} = I_2 R = -L_2 V_1/M\ \cos\omega t$. La razón pedida es

$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{V_1\cos\omega t}{-\frac{L_2 V_1}{M}\cos\omega t} = -\frac{M}{L2}$$

Usando la parte (a), $M/N_1 = L_2/N_2$, vemos que:

$$\left|\frac{V_{in}}{V_{out}}\right| = \frac{N_1}{N_2}$$

e) La potencia de entrada es

$$\mathcal{P}_{in}(t) = V_{in} I_1 = \frac{{V_1}^2}{L_1}\left(\frac{\sin\omega t\ \cos\omega t}{\omega} + \frac{L_2}{R}\cos^2\omega t\right)$$

La potencia de salida es

$$\mathcal{P}_{out}(t) = V_{out} I_2 = \frac{{L_2}^2 {V_1}^2}{M^2 R}\cos^2\omega t$$

Definición. El promedio temporal de una función periódica, de periodo T, es:

$$\langle\, f(t)\,\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Con ello, es posible demostrar (y queda propuesto para el lector) que:

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} , \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

en donde $\omega T = 2\pi$. Por ende, vemos que:

$$\langle \mathcal{P}_{in}(t) \rangle = \frac{{V_1}^2 L_2}{2 L_1 R} , \quad \langle \mathcal{P}_{out}(t) \rangle = \frac{{V_1}^2 {L_2}^2}{2 M^2 R}$$

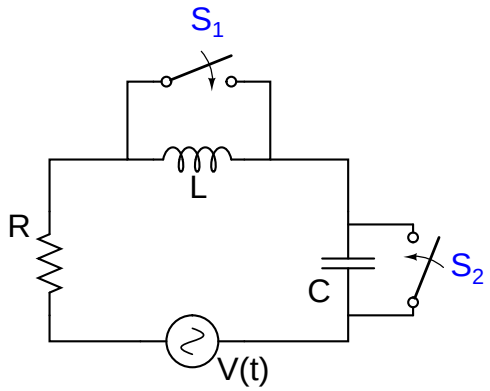
y usando $M^2 = L_1 L_2$, demostramos que

$$\langle \mathcal{P}_{in}(t) \rangle = \langle \mathcal{P}_{out}(t) \rangle$$

luego, la energía disipada en cada ciclo por la resistencia, es compensada con la potencia de entrada en la bobina primaria, y por tanto, NO hay violación al principio de conservación de energía.

■

(2) Considere el circuito de la figura, donde $V(t) = V_o \cos \omega t$. Si S_1 y S_2 se cierran inicialmente, encuentre (los datos son R, L, V_o y ω):



a) La corriente en función del tiempo

b) La potencia promedio entregada al circuito

c) La corriente en función del tiempo mucho después de que S_1 se abre

d) La capacidad C si S_1 y S_2 se abren y después de un tiempo largo, la corriente y el voltaje están en fase

e) La impedancia cuando S_1 y S_2 se abren

f) La energía máxima almacenada en el condensador y la inductancia

g) La diferencia de fase entre voltaje y corriente si se dobla la frecuencia ω

h) La frecuencia para la cual la reactancia inductiva es igual a un medio de la reactancia capacitiva

Solución:

a) Al cerrar ambos interruptores, no circulará corriente por la inductancia ni por el condensador. La impedancia equivalente en este caso es $Z_{eq} = R$ de modo que la corriente es, simplemente:

$$I(t) = \frac{V_o}{R}\cos\omega t$$

b) La potencia instantánea consumida por la resistencia es:

$$\mathcal{P}(t) = V(t)I(t) = \frac{{V_o}^2}{R}\cos^2\omega t$$

Claramente una función periódica, y por tanto el promedio temporal es:

$$\langle\,\mathcal{P}(t)\,\rangle\, = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{P}(t)\,dt = \frac{{V_o}^2}{2R}$$

c) Cuando se abre S_1, se conecta la inductancia al circuito. La impedancia equivalente en este caso es

$$Z_{eq} = R + i\omega L = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,e^{i\theta_\ell}\ , \quad \theta_\ell = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Luego, la corriente es:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z_{eq}} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{-i\theta_\ell}$$

Así,

$$I(t) = \mathrm{Re}\,\{\hat{I}\,e^{i\omega t}\} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t - \theta_\ell\right)$$

d) Ahora se conecta también el condensador, de modo que la impedancia equivalente en este caso es

$$Z_{eq} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z|\,e^{i\phi}\ , \quad \phi = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$

Como no hay desfase entre voltaje y corriente, $\phi = 0$ y el circuito está en resonancia:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \longrightarrow \quad C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

e) Es claro que:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R$$

y es puramente resistiva, como se esperaba por ser resonante.

f) En este caso, la corriente circulante por el circuito será

$$I(t) = \frac{V_o}{R}\cos\omega t$$

En el caso particular del condensador,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \quad \longrightarrow \quad Q(t) = \frac{V_o}{\omega R}\sin\omega t$$

Por lo tanto, la energía es:

$$U_c(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{{V_o}^2}{2\omega^2 R^2(1/\omega^2 L)}\sin^2\omega t = \frac{L{V_o}^2}{2R^2}\sin^2\omega t \quad \longrightarrow \quad U_{c,máx} = \frac{L{V_o}^2}{2R^2}$$

En el caso de la inductancia,

$$U_\ell(t) = \frac{LI(t)^2}{2} = \frac{L{V_o}^2}{2R^2}\cos^2\omega t \quad \longrightarrow \quad U_{\ell,máx} = \frac{L{V_o}^2}{2R^2}$$

g) Si la frecuencia es ahora

$$\widetilde{\omega} = 2\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

el ángulo de desfase entre corriente y voltaje es:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\widetilde{\omega}L - 1/\widetilde{\omega}C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

h) Finalmente, la frecuencia para que $X_L = \dfrac{X_C}{2}$ debe cumplir

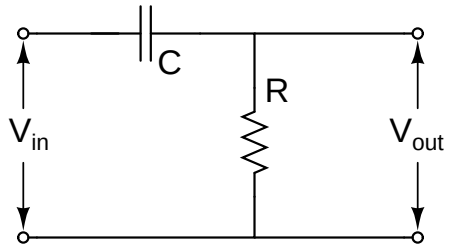
$$\omega_{1/2}L = \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{1/2}C} \quad \longrightarrow \quad \omega_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

■

(3) El circuito de la figura se denomina filtro RC pasa-altos porque transmite con mayor amplitud las señales de alta frecuencia que las de baja. Si la tensión de entrada es $V_{in} = V_o\cos\omega t$, demostrar que la de salida es $V_{out} = V_R\cos(\omega t - \phi)$, donde

$$V_R = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

y estudie los casos en que $\omega \ll \dfrac{1}{RC}$, $\omega = \dfrac{1}{RC}$ y $\omega \gg \dfrac{1}{RC}$.



Solución:

La impedancia equivalente está dada por:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\, e^{i\phi} \ , \quad \phi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Luego, la corriente fasorial circulante por el circuito es:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\, e^{-i\phi}$$

Finalmente, V_{out} es el voltaje entre los extremos de la resistencia,

$$\hat{V}_{out} = \hat{I}R = \frac{RV_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\, e^{-i\phi} = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}\, e^{-i\phi}$$

Con esto,

$$V_{out}(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{V}_{out}\, e^{i\omega t}\right\} = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \phi\right)$$

Estudiemos los casos pedidos:

- $\boxed{\omega \ll \frac{1}{RC}}$

  $$\omega \ll \frac{1}{RC} \quad \longrightarrow \quad 1 \ll \frac{1}{\omega RC} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} \approx \frac{1}{\omega RC} = K$$

  Luego,

  $$V_{out}(t) \approx \frac{V_o}{K} \cos\left(\omega t - \phi\right)$$

  y, como $K \gg 1$, el voltaje de salida se atenúa en gran cantidad. Por tanto, para bajas frecuencias, las señales se **atenúan**.

- $\boxed{\omega = \frac{1}{RC}}$

  $$V_{out}(t) = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \phi\right)$$

  lo que en Circuitos Eléctricos se conoce como **frecuencia de corte** del circuito.

- $\boxed{\omega \gg \frac{1}{RC}}$

  $$\omega \gg \frac{1}{RC} \quad \longrightarrow \quad 1 \gg \frac{1}{\omega RC} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} \approx 1$$

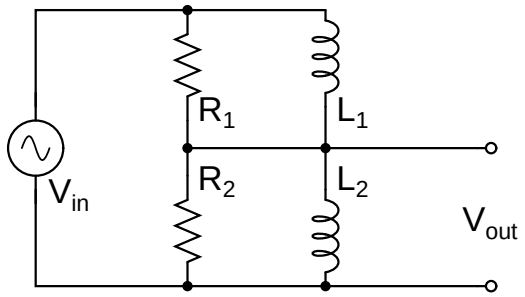
Luego,

$$V_{out}(t) \approx V_o\, cos(\omega t - \phi)$$

y el voltaje de salida preserva su amplitud. Por tanto, para altas frecuencias, las señales se **transmiten**.

Finalmente, el circuito selecciona las altas frecuencias y las transmite, mientras que las bajas frecuencias son filtradas: **filtro pasa-altos**. ■

(4) ¿Qué condición debe cumplirse, en el circuito de la figura, para que el cociente entre voltajes de salida y entrada no dependa de la frecuencia?



Solución:

Es claro que:

$$\frac{\hat{V}_{out}}{\hat{V}_{in}} = \frac{R_2 \parallel L_2}{R_1 \parallel L_1 + R_2 \parallel L_2}$$

Como

$$R_k \parallel L_k = \left(\frac{1}{R_k} + \frac{1}{i\omega L_k}\right)^{-1} = \frac{i\omega L_k R_k}{R_k + i\omega L_k}$$

entonces:

$$\frac{\hat{V}_{out}}{\hat{V}_{in}} = \frac{\dfrac{i\omega L_2 R_2}{R_2 + i\omega L_2}}{\dfrac{i\omega L_1 R_1}{R_1 + i\omega L_1} + \dfrac{i\omega L_2 R_2}{R_2 + i\omega L_2}} = \frac{\dfrac{L_2 R_2}{R_2 + i\omega L_2}}{\dfrac{L_1 R_1}{R_1 + i\omega L_1} + \dfrac{L_2 R_2}{R_2 + i\omega L_2}} = \frac{L_2 R_2}{L_1 R_2 \left(\dfrac{1 + i\omega L_2/R_2}{1 + i\omega L_1/R_1}\right) + L_2 R_2}$$

Necesitamos que el paréntesis se anule:

$$1 + i\omega L_1/R_1 = 1 + i\omega L_2/R_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$$

■

5. Ecuaciones de Maxwell

5.1. Introducción a la teoría electromagnética

(1) Considere las leyes de la electrodinámica que hemos usado en el curso:

$$(i) \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iii) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J}$$

Discuta su validez y analice la contribución de Maxwell.

Solución:

Recordando que la divergencia del rotor es cero, analicemos la consistencia de la ecuación (iii):

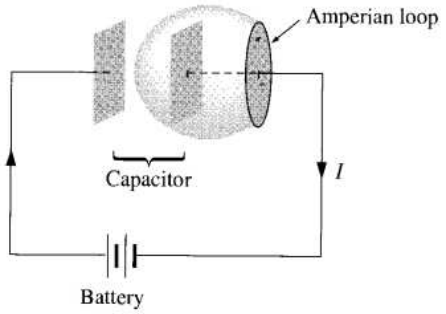
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B})$$

El lado izquierdo es cero porque la divergencia del rotor es nula; el lado derecho es cero debido a la ecuación (ii). Si aplicamos el mismo razonamiento a la ecuación (iv):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{J})$$

El lado izquierdo sigue siendo cero; pero el lado derecho, en general, no lo es. Para corrientes estacionarias, la divergencia de $\vec{J}$ es nula, pero en otros casos hay una error en la ley de Ampère.

Existe otra forma de ver que la ley de Ampère falla para corrientes no estacionarias. Supongamos que estamos en el proceso de carga de un capacitor, y deseamos aplicar la ley de Ampère al *loop* de la figura:



¿Cómo determinar I_{enc}? Bueno, es la corriente total que pasa por el *loop*, o más precisamente, la corriente que atraviesa la superficie que tiene como frontera a dicho *loop*. En este caso:

- Si tomamos la superficie que yace en el plano del *loop*, $I_{enc} = I$
- Si tomamos la segunda superficie dibujada en la figura, entonces **no** hay corriente a través de ella, e $I_{enc} = 0$

Este problema aparece porque la situación no es estática, y ya sabemos que Ampère se restringe a la magnetostática, pero nos hace pensar en la fuerte dependencia de la superficie que elegimos: la física debiese ser la misma, sin importar el *loop* o superficie que elijamos.

¿Qué hizo Maxwell? Mezclemos la ley de Gauss y la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\Big) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Combinando este último término con $\vec{J}$, en la ley de Ampère, lograremos eliminar el término extra de la divergencia. Así,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell llamó a este término extra corriente de desplazamiento:

$$\vec{J}_d \equiv \epsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La confirmación real de la teoría de Maxwell ocurrió en 1888 con los experimentos de Hertz sobre ondas electromagnéticas. Así, las actuales Leyes de Maxwell son:

$$(i) \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iii) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

■

(2) Considerando que una onda satisface la ecuación

$$a^2 \, \Delta u = u_{tt},$$

con a la velocidad de la onda, pruebe que los campos eléctricos y magnéticos en un medio no conductor y libre de fuentes satisfacen la ecuación de onda.

Solución:

En este caso, las ecuaciones de Maxwell son:

$$(i) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iii) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Utilizaremos ahora la conocida identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \Delta \vec{f}$$

con $\Delta \vec{f}$ es el laplaciano aplicado a cada componente del vector. De esta forma,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Pero en las regiones libres de fuente, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, como indica la primera ecuación de Maxwell. Por otro lado,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Igualando,

$$c^2 \, \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

definiendo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Descubrimos que el campo se propaga con velocidad c, que corresponde a la velocidad de la luz en el vacío, lo que indica que la luz no es otra cosa que una onda electromagnética. La deducción para el campo magnético es la misma, y queda propuesta al lector. ■

(3) En este problema estudiaremos la invariancia de gauge del electromagnetismo. Hasta situaciones estáticas, sabemos que que es posible estudiar los campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ a través de los potenciales ϕ, $\vec{A}$ tal que

$$\vec{E} = -\nabla \phi \qquad \wedge \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

a) Estudie por qué, para situaciones dinámicas, se hace necesario que $\vec{E} = -\nabla \phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

b) Pruebe que los campos $\vec{E}\,'$, $\vec{B}\,'$ asociados a

$$\vec{A}\,' = \vec{A} + \nabla f \qquad \wedge \qquad \phi\,' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

satisfacen $\vec{E} = \vec{E}\,'$ y $\vec{B} = \vec{B}\,'$. ¿Qué puede concluir?

c) Usando alguna *gauge fixing condition*, establezca condiciones para los potenciales, de modo tal que sean consistentes con las ecuaciones de Maxwell

Solución:

a) De la ley de Faraday-Lenz, si solo consideramos el aporte estático:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla\phi) = \vec{0}$$

que no es cierta en casos dinámicos; pero, al considerar la sugerencia del enunciado,

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \times \nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla \times \vec{A}\Big) - \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que sí es consistente.

b) Partiendo por el campo magnético,

$$\vec{B}\,' = \nabla \times \vec{A}\,' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Para el campo eléctrico,

$$\vec{E}\,' = -\nabla\phi\,' - \frac{\partial \vec{A}\,'}{\partial t} = -\nabla\phi + \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla f\Big) = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

Lo anterior nos hace pensar dos conclusiones importantes: (1) los potenciales no son magnitudes físicas medibles unívocamente determinadas; muy por el contrario, podemos tener infinitas funciones potencial que darán origen a los mismos campos físicos. (2) por la libertad concedida por la función f, podemos elegir los potenciales que más nos acomoden para resolver problemas, dando origen a la misma física: esto se conoce como invariancia de gauge.

c) Apliquemos la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla\phi - \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla \cdot \vec{A}\Big)$$

Por otra parte, la ley de Ampère para una densidad de corriente total $\vec{J}$ es:

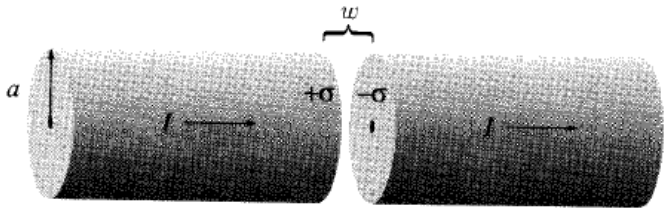
$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

En ambos casos, podemos fijar la condición de Gauge de Coulomb: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Así, las ecuaciones pedidas son:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \wedge \qquad \Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

■

(4) Un cable ancho, de radio a, porta una corriente constante I, uniformemente distribuida sobre su sección transversal. Una estrecha separación en el cable, de ancho $w \ll a$, forma un capacitor de placas paralelas, como muestra la figura. Encuentre el campo magnético en la separación, a distancia $s < a$ del eje.



Solución:

Sabemos que la densidad de corriente de desplazamiento es:

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Dibujando un *loop amperiano* de radio s,

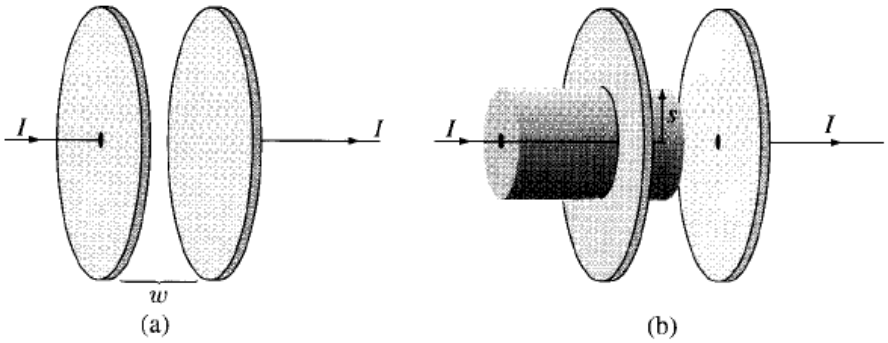
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B\,2\pi s = \mu_0 I_{d_{enc}} = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi s^2 = \mu_0 I \frac{s^2}{a^2}$$

Por lo tanto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

■

(5) El problema anterior fue un modelo artificial para un capacitor cargándose. Para un modelo más realista, considere cables delgados que se conectan al centro de placas metálicas, como en la Figura (a). Nuevamente, la corriente I es constante, el radio del capacitor es a, y la separación de las placas es $w \ll a$. Asuma que las corriente fluye fuera de las placas de modo tal que la carga superficial es uniforme, para toto tiempo, y es nula en $t = 0$.



a) Encuentre el campo eléctrico entre las placas, como función del tiempo t

b) Halle la corriente de desplazamiento a través de un círculo de radio s en el plano intermedio entre las placas. Usando este círculo como *loop amperiano*, y la superficie que lo extiende, halle el campo magnético a una distancia s del eje

c) Repita la parte anterior, pero ahora empleando una superficie cilíndrica, como muestra la Figura (b), que se extiende desde la izquierda y atraviesa la placa, terminando fuera del capacitor. Note que la corriente de desplazamiento a través de esta superficie es cero, y que hay dos contribuciones para I_{enc}.

Solución:

a) En este caso, $\vec{E} = \dfrac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}}$, con:

$$\sigma(t) = \frac{Q(t)}{A} = \frac{It}{\pi a^2}$$

Luego,

$$\vec{E}(t) = \frac{It}{\pi\sigma_0 a^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

b) En este caso,

$$I_{d_{enc}} = J_d \pi s^2 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\pi s^2 = I\frac{s^2}{a^2}$$

Por otra parte,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{d_{enc}} \quad \longrightarrow \quad B\,2\pi s = \mu_0 I\frac{s^2}{a^2} \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

c) Una corriente superficial fluye radialmente fuera de la placa izquierda; sea $I(s)$ la corriente total que cruza el círculo de radio s. La densidad de carga (al tiempo t) es:

$$\sigma(t) = \frac{[I - I(s)]t}{\pi s^2}$$

Como dijimos que era independiente de s, entonces $I - I(s) = \beta s^2$, para alguna constante β. Pero $I(a) = 0$, entonces $\beta a^2 = I$, o $\beta = I/a^2$. Entonces, $I(s) = I(1 - s^2/a^2)$.

$$B\,2\pi s = \mu_0 I_{enc} = \mu_0[I - I(s)] = \mu_0 I\frac{s^2}{a^2} \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

■

(6) Una de las consecuencias de las leyes de Maxwell es que las cargas aceleradas pierden energía en forma de radiación electromagnética (luz). Para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la tasa de pérdida de energía en el tiempo viene dada por la fórmula de Larmor:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde a es la aceleración de la carga y $c = 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad de la luz. Suponga que en el tiempo $t = 0$, el electrón de masa m y carga $-e$ que orbita al protón de carga $+e$ se ubica a una distancia $a_0 = 5.3\times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ de este último. Muestre que existe un tiempo finito t_f en el que dicho electrón alcanza el núcleo, lo que implica que los átomos no son estables clásicamente hablando. Calcule el valor de t_f, la llamada *vida media clásica* del átomo de Hidrógeno.

Solución:

Supondremos que el núcleo atómico se encuentra fijo en el origen. Un electrón de carga $-e$ y masa

m en una órbita de radio r en torno a un núcleo con carga $+e$ siente una fuerza dada por la Ley de Coulomb. Utilizando la segunda Ley de Newton,

$$ma = ma_{centr} = \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

en la aproximación en que la órbita permanece casi circular en todo instante y que la aceleración tangencial es despreciable frente a la aceleración radial (centrípeta). De esta forma, la pérdida de energía por radiación viene dada por

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^6}{96\pi^3\epsilon_0{}^3 m^2 c^3 r^4} = -\frac{2{r_e}^3 mc^3}{3r^4}$$

donde $r_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2) = 2.8 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$ es el llamado *radio clásico del electrón*. La energía total del electrón (cinética y potencial) es:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{r_e mc^2}{2r}$$

Tomando la derivada temporal de la expresión anterior, y utilizando la fórmula de Larmor,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{r_e mc^2}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2{r_e}^3 mc^3}{3r^4}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -\frac{4{r_e}^2 c}{3r^2} \\
3r^2\, dr &= -4{r_e}^2 c\, dt \\
r^3(t) - r^3(0) &= -4{r_e}^2 c\, t \\
\therefore\ r(t) &= \left({a_0}^3 - 4{r_e}^2 c\, t\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

Por tanto, existe un tiempo t_f tal que:

$$r(t_f) = 0 \quad \longrightarrow \quad t_f = \frac{{a_0}^3}{4{r_e}^2 c} = 1.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}$$

Este tiempo es del orden de magnitud de la vida media de un átomo de Hidrógeno excitado, cuyo estado fundamental parece tener una vida media infinita, a diferencia de lo que predice la Física Clásica. Esta fue una de las motivaciones de Bohr para proponer su modelo atómico, que marca el comienzo de la Física Cuántica. ■