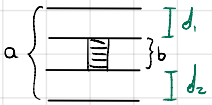
Pregunta 1

Notar que son 2 capacitores en serie $\Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$



$a = d_1 + b + d_2$

$\Rightarrow a - b = d_1 + d_2$

Capacitancia C_1 y C_2: $C_1 = \frac{A\varepsilon_0}{d_1}$ $\quad C_2 = \frac{A\varepsilon_0}{d_2}$

$\therefore C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{\frac{(A\varepsilon_0)^2}{d_1 d_2}}{\frac{A\varepsilon_0}{d_1} + \frac{A\varepsilon_0}{d_2}}$

$\Rightarrow C_{eq} = \frac{(A\varepsilon_0)^2}{A\varepsilon_0(d_1 + d_2)} = \frac{A\varepsilon_0}{d_1 + d_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{A\varepsilon_0}{a - b}$ } No importa donde ponga mi barra rígida.

Energía inicial $U_i = \frac{1}{2} C V^2$

$\Rightarrow U_i = \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{2(a-b)}$

Si saco la barra, $b = 0 \Rightarrow C_{eq} = \frac{A\varepsilon_0}{a}$

Y su energía: $U = \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{2a}$

$\therefore \Delta U = \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{2a} - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{2(a-b)} = \frac{-A\varepsilon_0 V_0^2}{2a(a-b)}$ //

Pregunta 2

La esfera tiene una carga Q_0 a un potencial V_0, luego ese potencial cambia a V' ya que se conecta a un capacitor.

Recordar que el potencial de una carga puntual es

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow Q_0 = V_0 4\pi\varepsilon_0 R$$

Luego, por conservación de la carga,

$$Q_0 = \underbrace{Q_C}_{\text{Carga Capacitor}} + \underbrace{Q_F}_{\text{Carga Final esfera}}$$

$$\Rightarrow V_0 4\pi\varepsilon_0 R = CV_1 + V_1 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V_0 4\pi\varepsilon_0 R}{C + 4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{→ Potencial Final}$$

//

Carga Final esfera: $\dfrac{V_0 (4\pi\varepsilon_0 R)^2}{C + 4\pi\varepsilon_0 R}$

// Capacitor: $Q_C = CV_1 \Rightarrow Q_C = \dfrac{V_0 4\pi\varepsilon_0 RC}{C + 4\pi\varepsilon_0 R}$

Problema 3

Para la Capacitancia: $C = \frac{Q}{V}$ (Diferencia de Potencial entre Cargas) $\rightarrow V_{ba} = -\int_b^a E\hat{r}\cdot d\hat{r} \Rightarrow V_{ba} = -\int_b^a E\,dr$ (Campo entre Placas)

Para $\vec{E}$, uso ley de Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dA} \Rightarrow E\,2\pi rL = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q_{en}}{2\pi rL\varepsilon_0}$

Y $q_{en} = Q$.

$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_0} \Rightarrow V = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_0}\,dr \Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln(b/a)$

$\Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln(b/a)} \Rightarrow C_1 = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln(b/a)} \Rightarrow \boxed{\frac{C_1}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}}$

$U = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}\right)\left(\frac{Q\ln(b/a)}{2\pi L\varepsilon_0}\right)^2$

$\Rightarrow U = \frac{Q^2\ln(b/a)}{4\pi L\varepsilon_0}$ //

Problema 4

Conservación de la Carga: $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$

Notar que Ambos Capacitores están en Paralelo, así que Sus Voltajes son lo mismo

Además, $q_1' = C_1 V$ y $q_2' = C_2 V$

¿Cuál es ese Voltaje? → $q_1 + q_2 = C_1 V + C_2 V \Rightarrow V = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$

$\Rightarrow q_1' = C_1 \left(\frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}\right)$

$\Rightarrow q_2' = C_2 \left(\frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}\right)$

$U_{Inicial} = U_1 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2}$

$U_{Final} = U_{1F} + U_{2F} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2}$

$\Delta U = U_i - U_F = \frac{1}{2}\frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}$

- La U Perdida es Por la Corriente en los Conductores que generan Calor
- El $\vec{P}$ se orienta Por el momento del $\vec{E}$

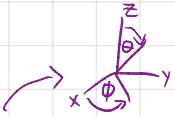
Pregunta 5

Campos de cada esfera para $r_1 > R_1$ y $r_2 > R_2$

$$\vec{E_1}(r) = \frac{K(Q-q)}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{E_2}(r) = \frac{Kq}{r^2}\hat{r}$$

Como no se afectan entre ellas, la energía es:

$$U_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\text{Todo el espacio}} |E_1|^2 \, dv$$



$$\Rightarrow U_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{\infty} K^2\left(\frac{Q-q}{r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$U_1 = \frac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$U_1 = \frac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Análogamente para $U_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$

$$\therefore U_T = U_1 + U_2 = \frac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Para encontrar el min o max:

$$\frac{dU_T}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R_2} - \frac{Q-q}{R_1}\right]$$

$$\Rightarrow q = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}$$

La U_{min} es (Reemplazando q)

$$U_{min} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$$

Los Potenciales a energía mínima son

$$\phi_1 = -\int_{\infty}^{R_1} E_1\, dr = \frac{Q-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$$

$$\phi_2 = -\int_{\infty}^{R_2} E_2\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$$