Solución Ayudantía 17

14 de Octubre 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

1 Fuerza de Lorentz

1.1 Fuerza de Lorentz - Resultados de Aprendizaje

Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Determinar la fuerza de Lorentz que experimenta una carga al ingresar en un campo magnético y/o eléctrico.
- ☐ Determinar la fuerza experimentada por un circuito por el que circula corriente al estar bajo el efecto de un campo magnético.
- ☑ Usar funciones e identidades trigonométricas básicas, tales como el seno, coseno, tangente, entre otros.
- ☑ Realizar descomposiciones y operaciones vectoriales en el espacio.
- ☑ Calcular el módulo y sentido de un vector.
- ☑ Explicar los efectos magnetostáticos que puede experimentar una carga al ingresar en un campo magnético y/o eléctrico.
- ☑ Utilizar e interpretar el sentido de las variables asociadas a la regla de la mano derecha, tales como la velocidad, el campo magnético y la fuerza magnética.
- ☑ Utilizar conceptos de cinemática circunferencial, tales como velocidad tangencial, aceleración centrípeta, entre otros.
- ☑ Utilizar conceptos de cinemática lineal, tales como ecuación de posición, velocidad y aceleración.
- ☐ Aplicar el principio de conservación de energía según el contexto.

1.2 Fuerza de Lorentz - Aspectos Generales

La fuerza magnética sobre una carga "q" que se mueve con velocidad "$\mathbf{v}$" en un campo magnético "$\mathbf{B}$" está dada por:

$$\mathbf{F}_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1}$$

Análogamente, la fuerza magnética que siente un circuito por el que circula una corriente "I" será:

$$\mathbf{F}_B = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{2}$$

Donde "$\mathbf{B}$" es el campo magnético experimentado por este y "$d\mathbf{l}$" el sentido que sigue la corriente.
Recordar que siempre se puede hacer uso de la tercera Ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{3}$$

Si además existe un campo eléctrico "$\mathbf{E}$", la fuerza neta (o Fuerza de Lorentz) será:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{4}$$

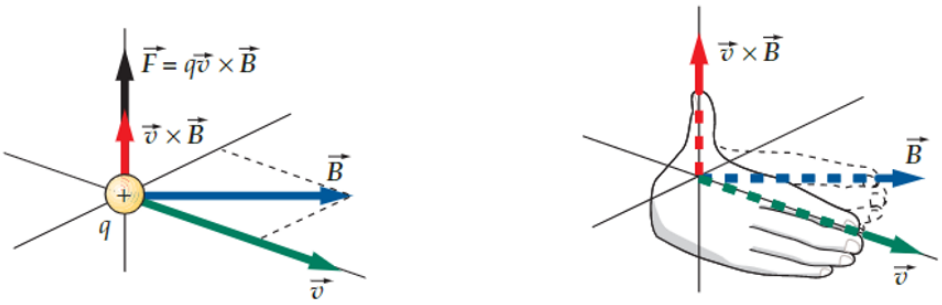


Figura 1. Esquema sobre el uso de la regla de la mano derecha en magnetismo.

1.3 Fuerza de Lorentz - Cinemática Circunferencial

Es importante considerar que las fuerzas magnéticas no realizan trabajo (i.e no alteran la rapidez), pero sí modifican la dirección y sentido del movimiento de la partícula. Luego, en ausencia de campo eléctrico, la carga describirá un movimiento circunferencial en el plano perpendicular al campo magnético uniforme:

$$\mathbf{F}_c = m \cdot \mathbf{a}_c \tag{5}$$

Donde "$\mathbf{a}_c$" y "$\mathbf{F}_c$" son la aceleración y fuerza centrípeta, respectivamente.
La trayectoria podría ser circunferencial o una espiral, según la relación velocidad-campo:

$$a_c = \frac{v_\perp^2}{r} \tag{6}$$

$$p = \frac{2\pi v_\parallel m}{qB} \tag{7}$$

Donde "p" es el paso, "r" el radio de la circunferencia, y "$v_\parallel$" y "$v_\perp$" los módulos de las componentes paralela y perpendicular de la velocidad con respecto al campo magnético, respectivamente.

1.3.1 "C3 2023-2", Problema 2, Facultad de Física

Una partícula positiva y negativa son introducidas en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ con cierta velocidad, tal como se indica en la figura. Ignore todo efecto gravitacional.

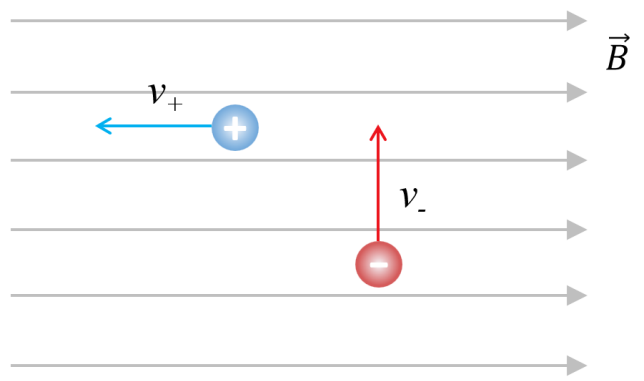


Figura 2. Esquema inicial sobre partículas cargadas en un campo magnético.

Lea las siguientes afirmaciones sobre la situación expuesta e indique si son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique solo las falsas.

a) ____ La partícula positiva empezará a describir un movimiento circunferencial luego de estar un tiempo bajo el efecto del campo magnético $\vec{B}$.

b) ____ La fuerza magnética sobre la partícula negativa debido al campo magnético $\vec{B}$ apuntará hacia la derecha ($\rightarrow$).

c) ____ Ahora, suponga que el campo magnético $\vec{B}$ apunta verticalmente hacia arriba ($\uparrow$). La fuerza magnética sobre la partícula negativa debido a este nuevo campo magnético será cero.

d) ____ La magnitud de la velocidad de la partícula negativa cambiará luego de estar un tiempo bajo el efecto del campo magnético uniforme $\vec{B}$.

e) ____ Ahora, suponga que la velocidad de la partícula negativa se vuelve cero. La fuerza magnética sobre esta partícula debido al campo magnético $\vec{B}$ será 0.

f) ____ Ahora, suponga que no conoce ni el sentido ni dirección del campo magnético $\vec{B}$. Para que la trayectoria de la partícula positiva se deflecte verticalmente hacia abajo ($\downarrow$), es necesario que el campo magnético $\vec{B}$ apunte hacia fuera de la página ($\odot$).

Solución

Paso Único: Solución a)

Utilizando la expresión de fuerza de Lorentz para la partícula positiva:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

En ausencia de campos eléctricos y como $q = +q$, $\vec{B} = B\hat{y}$ y $\vec{v} = -v_+\hat{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= +q(-v_+\hat{y} \times B\hat{y}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Como es un producto cruz entre dos componentes iguales, el resultado es 0. Como la fuerza es nula, la partícula describirá una trayectoria rectilínea hacia la izquierda ($\leftarrow$).

Paso Único: Solución b)

Utilizando la expresión de fuerza de Lorentz para la partícula negativa:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

En ausencia de campos eléctricos y como $q = -q$, $\vec{B} = B\hat{y}$ y $\vec{v} = v_-\hat{z}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -q(v_-\hat{z} \times B\hat{y}) \\ &= qv_-B\ \hat{x} \end{aligned} \tag{9}$$

Para realizar este producto cruz de manera sencilla se recuerda que estamos en la base "(x, y, z)" en coordenadas cartesianas, por lo que $\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$. Al avanzar hacia atrás el signo es negativo. Luego, la fuerza magnética apunta hacia fuera de la página ($\odot$).

Paso Único: Solución c)

Utilizando la expresión de fuerza de Lorentz para la partícula negativa:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

En ausencia de campos eléctricos y como $q = -q$, $\vec{B} = B\hat{z}$ y $\vec{v} = v_-\hat{z}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -q(v_-\hat{z} \times B\hat{z}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Como es un producto cruz entre dos componentes iguales, el resultado es 0. Luego, la fuerza magnética es nula.

Paso Único: Solución d)

La partícula negativa está siendo afectada únicamente por una fuerza magnética. Estas no realizan trabajo (i.e no alteran la rapidez o magnitud de la velocidad), pero sí modifican la dirección y sentido del movimiento de la partícula.

Paso Único: Solución e)

Utilizando la expresión de fuerza de Lorentz para la partícula negativa:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

En ausencia de campos eléctricos y como $q = -q$, $\vec{B} = B\hat{z}$ y $\vec{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -q(0 \times B\hat{z}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Como la velocidad es nula, la fuerza magnética también lo será.

Paso Único: Solución f)

Utilizando la expresión de fuerza de Lorentz para la partícula positiva:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

En ausencia de campos eléctricos y como $q = +q$, $\vec{B} = B\hat{?}$ y $\vec{v} = -v_+\hat{y}$:

$$\vec{F}_B = +q(-v_+\hat{y} \times B\hat{?}) \tag{12}$$

Se requiere que la partícula deflecte verticalmente hacia abajo (i.e $\vec{F}_B = -F_B\hat{z}$), por lo que se debe cumplir que:

$$-\hat{z} = -\hat{y} \times \hat{?}$$

$$\hat{?} = -\hat{x}$$

Para realizar este producto cruz de manera sencilla se recuerda que estamos en la base "(x, y, z)" en coordenadas cartesianas, por lo que $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$. Al avanzar hacia atrás el signo es negativo. Luego, el campo magnético debe apuntar hacia al interior de la página ($\otimes$).

Nota: El ejercicio también se pudo haber resuelto con la ayuda de la regla de la mano derecha, notando que para partículas negativas se realiza un ajuste de inversión para las variables. Además, se consideró el siguiente sistema de referencia para los cálculos realizados:

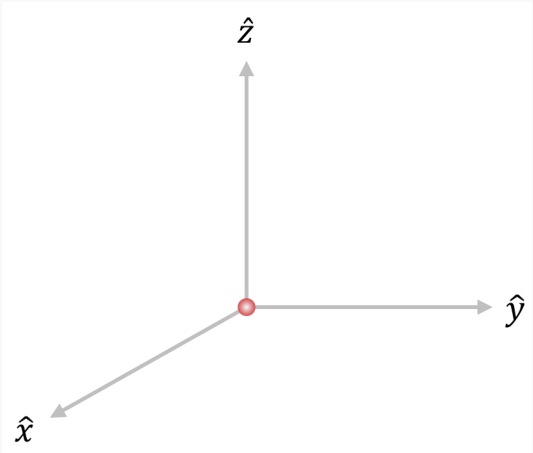


Figura 3. Sistema de coordenadas cartesianas.

1.3.2 "Problemas Resueltos de Electromagnetismo", 11.1, Rodrigo Chi

Un positrón de carga $+e$ y masa m es disparado desde el origen de un sistema de carga con una velocidad $\mathbf{v}_0$ formando un ángulo α entre la velocidad y el eje z. Ignorando el efecto gravitacional y si en el espacio existe un campo magnético constante $\mathbf{B} = B\hat{z}$:

a) Determine la velocidad y la posición de la partícula en el tiempo.

b) Demuestre que el positrón describe una trayectoria helicoidal. Encuentre su radio y su paso.

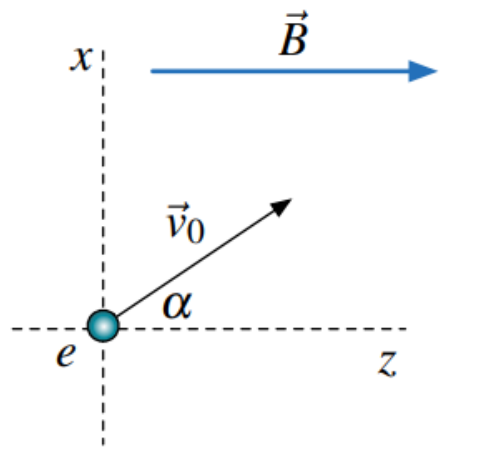


Figura 4. Esquema sobre la partícula.

Solución a) y b)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la velocidad y posición de la partícula en el tiempo. Como no se está bajo la presencia de un campo eléctrico (i.e $\mathbf{E} = 0$), la carga solo experimentará una fuerza magnética asociada al campo magnético:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_L &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

Paso 1: Condiciones Iniciales

La velocidad inicial se puede descomponer como:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_{0x} + \mathbf{v}_{0z} \\ &= v_0 \sin\alpha\ \hat{\boldsymbol{x}} + v_0 \cos\alpha\ \hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

Luego, la fuerza magnética inicialmente será:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0 &= q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \\ &= e(v_0 \sin\alpha\ \hat{\boldsymbol{x}} + v_0 \cos\alpha\ \hat{\boldsymbol{z}}) \times B\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= -eBv_0 \sin\alpha\ \hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned} \tag{13}$$

Para realizar este producto cruz de manera sencilla se recuerda que estamos en la base "(x, y, z)" en coordenadas cartesianas, por lo que $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$. Al avanzar hacia atrás el signo es negativo. Además, en un producto cruz entre dos componentes iguales, el resultado es 0. Finalmente, y como la fuerza apunta hacia $-\hat{y}$, la carga también se deflectará en tal dirección.

Paso 2: Velocidad y Posición Partícula - $v(t)$ y $r(t)$

Entonces, la fuerza magnética para $t > 0$ vendrá dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= e(v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}) \times B\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= eB(-v_x\hat{\boldsymbol{y}} + v_y\hat{\boldsymbol{x}})\end{aligned}$$

Aplicando la 2° Ley de Newton, y reescribiendo la aceleración en términos de la velocidad (i.e $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$), se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_B \\ m\mathbf{a} &= eB(-v_x\hat{\boldsymbol{y}} + v_y\hat{\boldsymbol{x}}) \\ m\dot{\mathbf{v}} &= eB(-v_x\hat{\boldsymbol{y}} + v_y\hat{\boldsymbol{x}}) \\ m(\dot{v}_x\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{v}_y\hat{\boldsymbol{y}} + \dot{v}_z\hat{\boldsymbol{z}}) &= eB(-v_x\hat{\boldsymbol{y}} + v_y\hat{\boldsymbol{x}})\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la siguiente ecuación vectorial:

Eje	Balance Fuerzas
$\hat{\boldsymbol{x}}$	$\dot{v}_x = \frac{eBv_y}{m}$
$\hat{\boldsymbol{y}}$	$\dot{v}_y = \frac{-eBv_x}{m}$
$\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dot{v}_z = 0$

Ahora, se derivará nuevamente con respecto al tiempo las ecuaciones asociadas al eje $\hat{\boldsymbol{x}}$ y $\hat{\boldsymbol{y}}$:

Eje	Balance Fuerzas
$\hat{\boldsymbol{x}}$	$\ddot{v}_x = \frac{eB\dot{v}_y}{m}$
$\hat{\boldsymbol{y}}$	$\ddot{v}_y = \frac{-eB\dot{v}_x}{m}$
$\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dot{v}_z = 0$

Finalmente, se reemplazará una ecuación en otra para obtener la EDO del oscilador armónico:

Eje	EDO
$\hat{\boldsymbol{x}}$	$\ddot{v}_x + (\frac{eB}{m})^2 v_x = 0$
$\hat{\boldsymbol{y}}$	$\ddot{v}_y + (\frac{eB}{m})^2 v_y = 0$
$\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dot{v}_z = 0$

Considerando la velocidad angular $w = \frac{eB}{m}$, se resuelve cada EDO:

Eje	Ecuación Velocidad
$\hat{\boldsymbol{x}}$	$v_x(t) = A_1 \cos(wt) + A_2 \sin(wt)$
$\hat{\boldsymbol{y}}$	$v_y(t) = A_3 \cos(wt) + A_4 \sin(wt)$
$\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_z(t) = v_{0z}$

Aplicando condiciones iniciales a las ecuaciones asociadas al eje $\hat{\boldsymbol{x}}$ y $\hat{\boldsymbol{y}}$:

$$v_x(0) = A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0, \qquad \dot{v}_x(0) = w(-A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0)$$
$$v_y(0) = A_3 \cos 0 + A_4 \sin 0, \qquad \dot{v}_y(0) = w(-A_3 \sin 0 + A_4 \cos 0)$$
$$v_x(0) = v_0 \sin\alpha, \qquad \dot{v}_x(0) = \frac{eBv_y(0)}{m}$$
$$v_y(0) = v_0 \cos\alpha, \qquad \dot{v}_y(0) = \frac{eBv_x(0)}{m}$$

Resolviendo se obtiene que:

Eje	Ecuación Velocidad
$\hat{\boldsymbol{x}}$	$v_x(t) = v_0 \sin(\alpha) \cos(wt)$
$\hat{\boldsymbol{y}}$	$v_y(t) = -v_0 \sin(\alpha) \sin(wt)$
$\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_z(t) = v_0 \cos(\alpha)$

Integrando respecto al tiempo para determinar la posición en el tiempo, considerando que su trayectoria comienza en el origen:

Eje	Ecuación Posición
$\hat{\boldsymbol{x}}$	$x(t) = \frac{v_0}{w} \sin(\alpha) \sin(wt)$
$\hat{\boldsymbol{y}}$	$y(t) = -\frac{v_0}{w} \sin(\alpha)(1 - \cos(wt))$
$\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_z(t) = v_0 t \cos(\alpha)$

Paso 3: Radio Helicoide - R

La ecuación anterior es la forma parámetrica de una trayectoria helicoidal. Desarrollando las ecuaciones de posición, y notando que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, logramos construir una expresión más sencilla:

$$\left.\begin{array}{c}(y + \frac{v_0}{w}\sin(\alpha))^2 = (\frac{v_0}{w}\sin(\alpha))^2 \cos^2(wt) \\ x^2 = (\frac{v_0}{w}\sin(\alpha))^2 \sin^2(wt)\end{array}\right\} \quad x^2 + (y + \frac{v_0}{w}\sin(\alpha))^2 = (\frac{v_0}{w}\sin(\alpha))^2$$

Donde $R = \frac{v_0}{w}\sin(\alpha)$ es el radio de la helicoide, la cual se encuentra desplazada de su centro.

Paso 4: Paso Helicoide - p

Mediante cinemática circunferencial, podemos expresar la velocidad angular de la partícula en términos del paso de la hélice:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{d\theta}{dz}\frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Sabemos que en cada vuelta (i.e 2π) la partícula avanza un paso p en el eje de la altura, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{eB}{m} &= \frac{2\pi}{p}\frac{d}{dt}(v_0 t\cos(\alpha)) \\ \frac{eB}{m} &= \frac{2\pi}{p}v_0\cos(\alpha) \\ p &= \frac{2\pi v_0 m\cos(\alpha)}{eB} \end{aligned} \tag{14}$$

Recuperando así la expresión predeterminada del paso, pues $v_{\parallel} = v_z$.