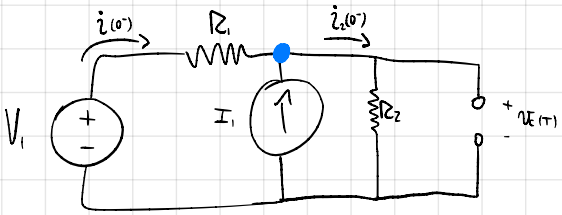
a) Voltaje en el capacitor $T \leq 0$

Como está cargado completamente **No** circula corriente y el circuito es



Para hacer evidente la fuente de corriente, usamos KCL en el nodo azul

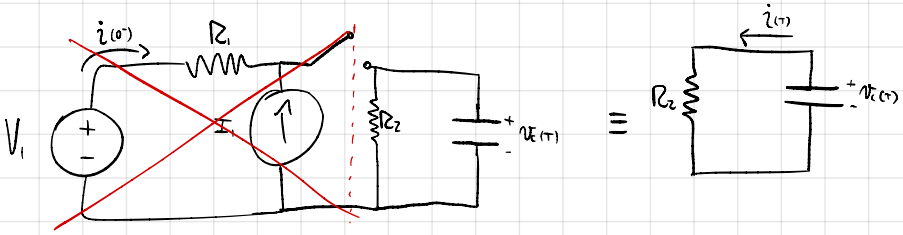
$$\dot{i}(0^-) + I_1 = \dot{i}_2(0^-)$$

El 0^- solo es ayuda para recordar que se trabaja en $T \leq 0$ (antes)

Relacionamos corrientes y voltajes con ley de Ohm

$$\frac{V_1 - v_c}{R_1} + I_1 = \frac{v_c - 0}{R_2} \Rightarrow v_c(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 + I_1 R_1 \| R_2$$

b) $T \geq 0$ S_1 se abre, quedando el circuito



Haciendo KVL: $-v_c(t) - \dot{i}(t) R_2 = 0$, pero la corriente en el capacitor es $\dot{i}(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$ así que

$$v_c = -C \frac{dv_c}{dt} R_2 \quad \text{EDO Separable} \Rightarrow \ln(v_c(t)) = -\frac{1}{R_2 C} + \alpha, \ \alpha \text{ cte arbitraria}$$

$$\Rightarrow v_c(t) = \alpha e^{-\frac{1}{R_2 C}}$$

Aplicando C.I : $v_c(0) = \alpha = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_1 + I_1 R_1 \| R_2$

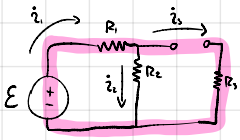
Así,

$$v_c(t) = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} V_1 + I_1 R_1 \| R_2 \right) e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

Y por ley de Ohm:

$$i(t) = \frac{1}{R_2} \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} V_1 + I_1 R_1 \| R_2 \right) e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

Con el capacitor totalmente cargado $T<0$ se tiene lo siguiente



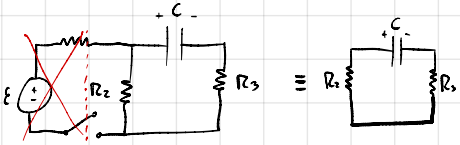
Por KVL en malla izquierda se tiene: $\mathcal{E} - \dot{i}_1(R_1+R_2) = 0 \Rightarrow \dot{i}_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_2+R_3}$ y $\dot{i}_3 = 0$

Para la carga hacemos KVL con la malla (Rosada) que contiene al capacitor: $\mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1 - V_c - \dot{i}_3 R_3 = 0$

Pero $\dot{i}_3 = 0 \rightsquigarrow \mathcal{E} = \dot{i}_1 R_1 + V_c$ ... ¿Como hago Aparecer la carga? $\longrightarrow C = \frac{q}{V_c} \Rightarrow V_c = \frac{q}{C}$

Así, $\mathcal{E} = \dot{i}_1 R_1 + \frac{q}{C} \Rightarrow q(0^-) = C(\mathcal{E} - \dot{i}_1(0^-)R_1) \rightsquigarrow$ Carga antes de abrir S.

Con S_2 abierto $T \geq 0$ se tiene



Se hace lo mismo pero recordando que ahora se descarga el capacitor

$V_c = \frac{q}{C}$ ∧ $\frac{dq}{dt} = \dot{i}_c$

KVL: $-V_{c(T)} - \dot{i}_{c(T)} R_2 - \dot{i}_{c(T)} R_3 = 0 \Rightarrow \dot{i}_c(R_2+R_3) + \frac{q_{(T)}}{C} = 0$

Se tiene la siguiente EDO: $\frac{dq}{dT} + \frac{q}{C(R_3+R_2)} = 0$

$$\Rightarrow \ln(q) = -\frac{T}{C(R_3+R_2)} + A$$

$$\Rightarrow q(T) = A e^{\frac{-T}{C(R_3+R_2)}}$$

Para la CTE, usamos la carga inicial en $T=0$ ya calculada $\rightsquigarrow q(0) = Ae^0 = C(\mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1) \Rightarrow A = C(\mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1)$

$$\Rightarrow q(T) = C(\mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1) e^{\frac{-T}{C(R_3+R_2)}}$$

Para corriente solo debido $q(T)$

$$\dot{q}(T) = \left(-\right) \frac{\mathcal{E} - \dot{q}_1 R_1}{R_3 + R_2} e^{-\frac{T}{C(R_3+R_2)}}$$

↳ indica que el capacitor se descarga.

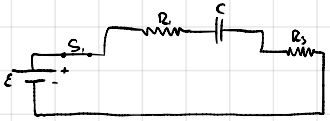
Para encontrar el tiempo hasta $\frac{4}{5}$ de la carga, hago una ecuación simple

$$q(\bar{T}) = \frac{4}{5} q_{(0)} \Rightarrow C(\mathcal{E} - \dot{q}_1 R_1) e^{\frac{T}{C(R_3+R_2)}} = \frac{4}{5} C(\mathcal{E} - \dot{q}_1 R_1)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{T}{C(R_3+R_2)}} = \frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{T}{C(R_3+R_2)} = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow T = C(R_3+R_2)\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

3

Haciendo KVL en la malla exterior



$$\mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1 - \frac{q}{C} - \dot{i}_1 R_3 = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1 - \frac{q}{C} - \dot{i}_1 R_3 = 0$$

Así la EDO queda ($\dot{i}_1 = \frac{dq}{dt}$) :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q - C\mathcal{E}}{(R_1 + R_3)C} = 0 \Rightarrow q(t) = Be^{-\frac{t}{C(R_1+R_3)}} + C\mathcal{E}$$

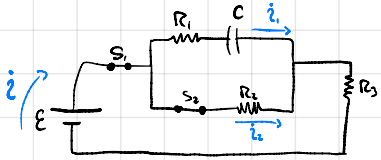
Para la condición inicial B se evalúa : $q(t=0) = 0$ (Despejando) $\rightsquigarrow q(0) = B + C\mathcal{E} = 0 \Rightarrow B = -C\mathcal{E}$

$$\Rightarrow q(t) = -C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{C(R_1+R_3)}} + C\mathcal{E}$$

Derivamos para $I(t)$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_3} e^{-\frac{t}{C(R_1+R_3)}}, \quad 0 < t < T_0$$

b) Al cerrar S_2 el circuito se ve así



Nota que $\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2$, así todo se reduce a calcular $\dot{i}$ que pasa por la batería justo cuando conectamos el capacitor

Por lo mismo, necesito saber la carga final antes de cerrar S_2.

Eso se obtiene evaluando lo obtenido en a) para la carga, es decir $q(t = T_0)$, donde por enunciado es $q(t > T_0) = q_0$

KVL en la malla exterior (la del capacitor) : $\mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1 - \frac{q_0}{C} - \dot{i}_1 R_3 = 0$ ($\frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}$) $\Rightarrow \mathcal{E} - \dot{i}_1 R_1 - \frac{q_0}{C} - \dot{i}_1 R_3 = 0$

$$\Rightarrow \dot{i}_1 = \frac{1}{R_1}\left(\mathcal{E} - \frac{q_0}{C} - \dot{i}_1 R_3\right)$$

KVL en malla sin capacitor : $\mathcal{E} - \dot{i}_2 R_2 - \dot{i}_1 R_3 = 0 \Rightarrow \dot{i}_2 = \frac{1}{R_2}(\mathcal{E} - \dot{i}_1 R_3)$

Reemplazando en $\dot{i} = \dot{i}_2 + \dot{i}_1 \Rightarrow \dot{i} = \frac{1}{R_1}(\mathcal{E} - \frac{q_0}{C} - \dot{i}R_3) + \frac{1}{R_2}(\mathcal{E} - \dot{i}R_3)$

Despejando $\dot{i}$:

$$\dot{i} = \frac{\mathcal{E}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{q_0}{C}\right)}{1 + R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

//

Haciendo KVL en el circuito → $\mathcal{V}_0$ (FEM positiva porque está actuando como una batería) $- i_1 R - \frac{q_2}{C_2} - i_1 R = 0$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{C_1} - 2 i_1 R - \frac{q_2}{C_2} = 0$$

La carga total $Q_0 = q_1(t) + q_2(t)$, despejando q_1 y reemplazando en la anterior.

$$\Rightarrow \frac{Q_0 - q_2}{C_1} - 2 i_1 R - \frac{q_2}{C_2} = 0$$

Ahora, $i_1 = -\frac{dq_1}{dt}$ ya que la carga disminuye en C_1, pero en C_2 la carga aumenta,

así que $i_1 = \frac{dq_2}{dt}$

$$\Rightarrow 2R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} - \frac{Q_0 - q_2}{C_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{2RC_0} = \frac{Q_0}{2RC_1}$$ / Tomando Laplace para resolver la EDO

★ $C_0^{-1} \equiv C_1^{-1} + C_2^{-1}$

$$sF(s) - q_2(0) + \frac{F(s)}{2RC_0} = \frac{Q_0/2RC_1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{Q_0 C_0 / C_1}{s(2RC_0 s + 1)} = \frac{Q_0/2RC_1}{s(s + \frac{1}{2RC_0})}$$

Como $q_2(0) = 0$ y Aplicando Fracciones parciales

$$F(s) = \frac{Q_0 C_0}{C_1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2RC_0}}\right) / \mathcal{L}^{-1}$$

$$q_2(t) = \frac{Q_0 C_0}{C_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{2RC_0}}\right) //$$

Laplace

- $\mathcal{L}\{\frac{dA(t)}{dt}\} = sF(s) - A(t=0)$; $\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s}$; Fracciones parciales (método de los residuos)