Enunciado Ayudantía 27

18 de Noviembre 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

1 Circuitos RL

1.1 Circuitos RL - Resultados de Aprendizaje

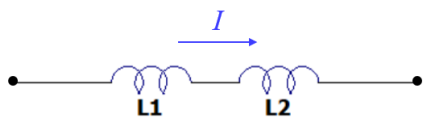
Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Aplicar las Leyes de Kirchoff para corrientes (KCL) y voltajes (KVL) en diversos circuitos RL.
- ☑ Resolver EDOs de carácter separable en el contexto de circuitos RL.
- ☑ Determinar y aplicar las condiciones iniciales necesarias para la EDO según el contexto.
- ☑ Determinar el voltaje en un inductor según el contexto en diversos circuitos RL.
- ☑ Determinar la intensidad de corriente que circula por un inductor según el contexto en diversos circuitos RL.
- ☑ Calcular el flujo magnético y energía almacenada en un inductor en el contexto de circuitos RL.
- ☑ Interpretar y determinar la constante de tiempo inductiva en diversos circuitos RL.
- ☐ Identificar inductores conectados en serie y paralelo en diversas configuraciones.
- ☐ Determinar la inductancia equivalente de una configuración mediante el método de conexiones.
- ☑ Utilizar límites matemáticos y técnicas relacionadas, tales como la regla de L'hopital.
- ☑ Utilizar derivadas y técnicas relacionadas, tales como la regla del producto y cuociente.

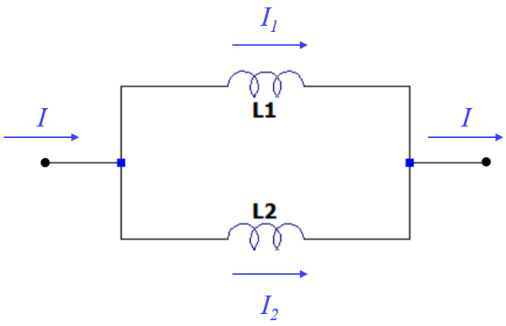
1.2 Circuitos RL - Inductores

Un inductor (o bobina) es un componente circuital pasivo de dos terminales que almacena energía en forma de campo magnético, oponiéndose así a cambios bruscos en el valor de la corriente. Un conjunto de "N" inductores puede conectarse de distintas formas:

Conexión	Inductancia Equivalente	Efectos Eléctricos
Serie	$L_{eq} = \sum_i^N L_i$	Misma Corriente en cada L_i
Paralelo	$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_i^N \frac{1}{L_i}$	Mismo Voltaje en cada L_i



(a) Inductores conectados en serie



(b) Inductores conectados en paralelo

Figura 1. Diagramas sobre las configuraciones de inductores.

1.3 Circuitos RL - Cómo Utilizarlo Correctamente

Los llamados circuitos RL contienen tanto inductores como resistores. Una guía para resolver este tipo de ejercicios se presenta a continuación:

1. En general, resulta más fácil utilizar el método de mallas, aunque el circuito puede ser resuelto mediante cualquier método:

$$\sum_{\text{malla}} V_k = 0$$

   Al llegar al inductor se deberá sumar o restar su voltaje, dependiendo si la corriente ingresa por el terminal positivo o negativo asignado previamente.

2. Automáticamente, los voltajes provenientes de resistores deberán ser reemplazados mediante la Ley de Ohm.

3. Luego, deberán expresar la diferencia de potencial en el inductor en función de la(s) intensidad(es) de la(s) malla(s), de forma de armar la EDO respectiva:

$$V_L(t) = \frac{d\Phi_L(t)}{dt} = L\frac{dI_L(t)}{dt} \tag{1}$$

Recordemos que la energía almacenada por el inductor cambia a medida que este se carga o descarga. Además, la ecuación anterior proviene de la definición de voltaje y de flujo magnético en el inductor "$\Phi_L = LI$": al momento de reemplazar, solo la corriente se verá afectado por el diferencial, puesto que la inductancia se considera como una constante.

4. En general, la EDO será de tipo separable y se recomienda resolverla para la corriente del inductor, por lo que se dejará a un lado de la ecuación solo variables dependientes de "I_L" y al otro solo variables dependientes del tiempo y/o constantes:

$$\alpha(I_L) \cdot dI_L = \beta(t) \cdot dt$$

Luego, quedará integrar a ambos lados y despejar "I_L":

$$\int_{I_0}^{I_L} \alpha(I_L) \cdot dI_L = \int_{t_0}^{t} \beta(t) \cdot dt$$

Donde "α" y "β" son variables que dependen de "I_L" y "t", respectivamente. Por otra parte, "I_0" es la condición inicial de corriente para el inductor y "t_0" el tiempo inicial o desde donde se considera la carga/descarga del mismo.

5. ¿Cómo determinar las condiciones iniciales del inductor? Se debe leer bien el enunciado:

   a) En ocasiones se dirá explícitamente que el inductor se encontraba descargado (i.e $\phi_L = 0$), por lo que su intensidad de corriente también será nula.
   b) En otros casos, se dirá implícitamente que el inductor se ha cargado completamente, puesto que el circuito se ha estado alimentando "durante mucho tiempo" con una entrada de voltaje. Al alcanzar su flujo magnético máximo, el inductor se comporta como cortocircuito, puesto que ya no hay cambios en su corriente con respecto al tiempo:

$$V_L(t) = \frac{d\Phi_L(t)}{dt} = L\frac{dI_L(t)}{dt} = 0$$

6. Por último, les debería quedar una solución de la siguiente forma:

$$I_L(t) = I_L(\infty) + (I_0 - I_L(\infty))e^{-t/\tau} \tag{2}$$

Donde "τ" es la constante de tiempo, la cual indica qué tan lento o rápido se carga el inductor. Por otra parte, "$I_L(\infty)$" se refiere a cómo se comporta la corriente del inductor en el infinito. Para circuitos de primer orden, se cumple que:

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} \tag{3}$$

Donde "R_{Th}" es la resistencia de Thèvenin.

7. Si es que piden determinar la diferencia de potencial en el inductor o el flujo magnético de este a través del tiempo, se puede ingresar la solución obtenida en las expresiones anteriores:

$$V_L(t) = \frac{d\Phi_L}{dt} = L\frac{dI_L(t)}{dt}$$
$$\Phi_L(t) = LI(t)$$

Si es que se requiere otra variable (i.e la intensidad/voltaje en alguna resistencia), siempre se puede utilizar KCL, KVL, Ley de Ohm, entre otros. Si se requiere analizar variables en el infinito, se debe utilizar la herramienta de límite matemático.

1.3.1 "Problemas Resueltos de Electromagnetismo", 16.12, Rodrigo Chi

En el circuito de la figura se ha tenido conectada la batería por mucho tiempo con el interruptor S abierto. Luego en $t = 0$, el interruptor se cierra. Considere que $V_0 = 120$ V, $R_1 = R_2 = 30\ \Omega$ y $L = 50$ mH.

a) Calcule el flujo magnético almacenado por el inductor en $t = 0$.

b) Determine la intensidad de corriente que circula por el inductor para $t > 0$.

c) Determine la diferencia de potencial en el inductor para $t > 0$.

d) ¿Cuál es la constante de tiempo inductiva luego de que se cierra el interruptor?

e) Encuentre la nueva corriente que circula por el inductor, luego de que ha transcurrido mucho tiempo con el interruptor cerrado.

f) Grafique la intensidad de corriente que circula por el inductor para $t > 0$.

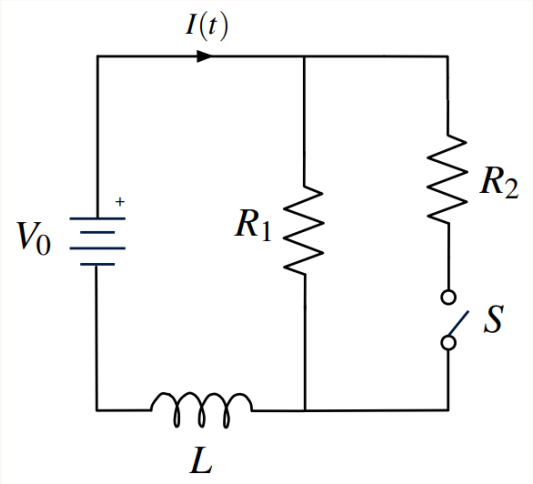


Figura 2. Esquema Circuito RL.

Solución a)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el flujo magnético almacenado en $t = 0$. Si el circuito ha estado operando en tales estados durante mucho tiempo, la fuente de voltaje V_0 entregará una constante alimentación al inductor y, eventualmente, alcanzará su flujo magnético máximo. En este punto su flujo magnético ya no puede variar, por lo que se comportará como cortocircuito:

$$V_L(t) = \frac{d\Phi_L}{dt} = 0$$

Finalmente, se utiliza la fórmula que relaciona flujo almacenado con inductancia:

$$\Phi_L = LI$$

Solución b), c), d), e) y f)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la corriente $I(t)$ que circula por el circuito, para un $t \geq 0$. Luego, se deberá resolver el circuito mediante algún método, de forma de armar la EDO respectiva:

$$V_L(t) = \frac{d\Phi_L}{dt} = L\frac{dI_L(t)}{dt}$$

Además, se deben aplicar las condiciones iniciales en relación al inductor.

2 Circuitos de Segundo Orden

2.1 Circuitos de Segundo Orden - Resultados de Aprendizaje

Al término de este módulo, se espera que el estudiante sea capaz de:

- ☑ Aplicar las Leyes de Kirchoff para corrientes (KCL) y voltajes (KVL) en diversos circuitos RLC.
- ☑ Resolver EDOs de segundo orden homogéneas en el contexto de circuitos RLC.
- ☐ Resolver EDOs de segundo orden no homogéneas en el contexto de circuitos RLC.
- ☑ Determinar y aplicar las condiciones iniciales necesarias para la EDO según el contexto.
- ☑ Determinar el voltaje e intensidad de corriente que circula por un componente circuital según el contexto en diversos circuitos RLC.
- ☑ Identificar y determinar la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguación en diversos circuitos RLC.
- ☑ Identificar y conocer el tipo de respuesta para diversos circuitos RLC.
- ☑ Conocer el gráfico asociado a cada tipo de respuesta para diversos circuitos RLC.
- ☑ Utilizar límites matemáticos y técnicas relacionadas, tales como la regla de L'hopital.
- ☑ Utilizar derivadas y técnicas relacionadas, tales como la regla del producto y cuociente.

2.2 Circuitos de Segundo Orden - Generalidades

En circuitos de segundo orden, las corrientes y voltajes satisfacen una ecuación de la forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta w_0 \frac{dx(t)}{dt} + w_0^2 x(t) = g(t) \tag{4}$$

Donde "ζ" es el coeficiente de amortiguación y "w_0" la frecuencia natural del sistema.

Luego, la solución de la ecuación será de la siguiente manera:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{5}$$

Donde $x_h(t)$ y $x_p(t)$ son la solución homogénea y particular, respectivamente.
Reemplazando $x_h(t) = e^{rt}$ en la ecuación homogénea, se obtiene su polinomio característico:

$$r^2 + 2\zeta w_0 r + w_0^2 = 0 \tag{6}$$

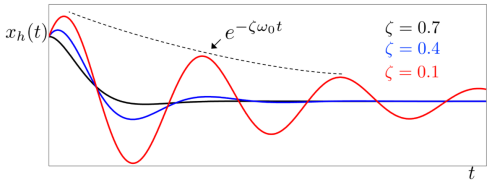
De esta manera, las raíces del polinomio serán:

$$r_{1,2} = -\zeta w_0 \pm w_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

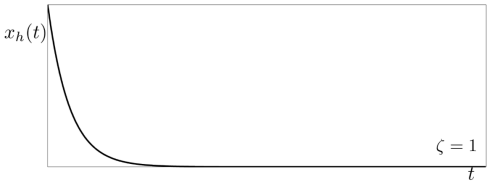
Dependiendo de sus valores, habrán tres tipos de soluciones:

Tipo Respuesta	Expresión Respuesta	Raíces	Valor ζ
Subamortiguada	$x_h(t) = e^{-\zeta w_0 t}(k_1 \cos(w_d t) + k_2 \sin(w_d t))$	Complejas Conjugadas	$\zeta < 1$
Críticamente Amortiguada	$x_h(t) = k_1 e^{-\zeta w_0 t} + k_2 t e^{-\zeta w_0 t}$	Reales e Iguales	$\zeta = 1$
Sobreamortiguada	$x_h(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$	Reales y Distintas	$\zeta > 1$

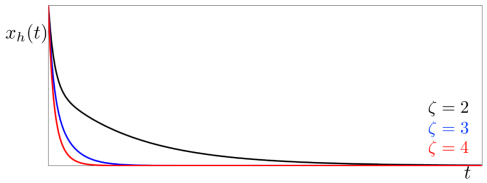
Donde k_i son las condiciones iniciales del problema y $w_d = w_0\sqrt{1-\zeta^2}$.



(a) Gráfico Respuesta Subamortiguada.



(b) Gráfico Resp. Crít. Amortiguada.



(c) Gráfico Respuesta Sobreamortiguada.

Figura 3. Gráficos sobre los distintos tipos de respuesta.

2.3 Circuitos RLC - Cómo Utilizarlo Correctamente

Los llamados circuitos RLC contienen resistores, capacitores e inductores. Una guía para resolver este tipo de ejercicios se presenta a continuación:

1. En general, resulta más fácil utilizar el método de mallas, aunque el circuito puede ser resuelto mediante cualquier método:

$$\sum_{\text{malla}} V_k = 0$$

   Al llegar al inductor y/o capacitor se deberá sumar o restar su voltaje, dependiendo si la corriente ingresa por el terminal positivo o negativo asignado previamente.

2. Automáticamente, los voltajes provenientes de resistores deberán ser reemplazados mediante la Ley de Ohm.

3. Luego, deberán expresar la diferencia de potencial en el inductor y/o la intensidad que circula por el capacitor en función de la(s) intensidad(es) de la(s) malla(s), de forma de armar la EDO respectiva:

$$I_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$
$$V_L(t) = \frac{d\Phi_L(t)}{dt} = L\frac{dI_L(t)}{dt}$$

4. Para obtener la EDO de segundo orden, es posible que sea necesario aplicar una derivada temporal a ambos lados de la ecuación, notando aquellos componentes constantes.

5. Por último, les debería quedar una ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta w_0 \frac{dx(t)}{dt} + w_0^2 x(t) = g(t) \tag{7}$$

6. Para determinar el tipo de respuesta homogénea, se deberá identificar y calcular el coeficiente de amortiguación ζ y la frecuencia natural w_0. Una vez realizado, simplemente se utiliza la expresión predeterminada respectiva a la respuesta.

7. En caso de que exista una solución particular, se deberá proponer una solución de acuerdo a la forma que presenta $g(t)$ (polinomial, trigonométrica, exponencial, entre otros) e insertarla en la EDO de segundo orden, de forma de determinar las constantes asociadas.

8. Finalmente, será posible determinar las constantes k_i de la solución imponiendo las condiciones iniciales del sistema.

2.3.1 "Análisis de Circuitos Eléctricos", 7.1, Berríos F. & Sáez C.

Para el siguiente circuito RLC, asuma que la fuente de voltaje entrega un voltaje V constante para todo $t \geq 0$.

a) Encuentre la ecuación diferencial que modela a la corriente a través del inductor para $t \geq 0$.

   Ahora, considere que $I_L(0) = 3$ A, $I_L'(0) = 0$ A, $C = 10$ nF y $L = 10$ mH. Determine la corriente que circula a través del inductor para $t \geq 0$ y las condiciones que se deben cumplir para que:

b) Sea una respuesta sobreamortiguada.

c) Sea una respuesta críticamente amortiguada.

d) Sea una respuesta subamortiguada.

   Por último, suponga que la fuente de voltaje ahora entrega un voltaje $V(t) = \alpha t$ para todo $t \geq 0$.

e) Encuentre la ecuación diferencial y solución que modela a la corriente a través del inductor para $t \geq 0$.

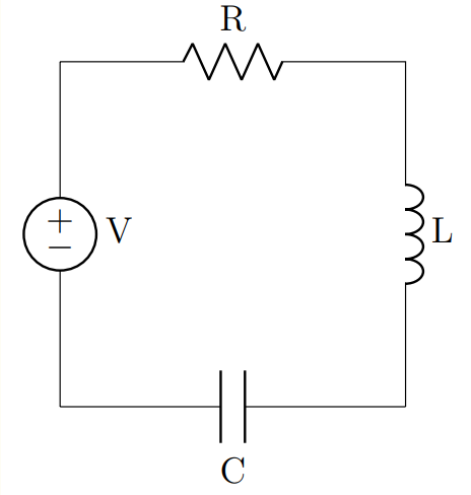


Figura 4. Esquema Circuito RLC.

Solución a)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la ecuación diferencial que modela a la corriente a través del inductor para $t \geq 0$. Luego, se deberá resolver el circuito mediante algún método, de forma de armar la EDO respectiva:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta w_0 \frac{dx(t)}{dt} + w_0^2 x(t) = g(t)$$

Solución b)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la corriente que circula a través del inductor para $t \geq 0$ y las condiciones que se deben cumplir para lograr cada tipo de respuesta:

Tipo Respuesta	Expresión Respuesta	Raíces	Valor ζ
Subamortiguada	$x_h(t) = e^{-\zeta w_0 t}(k_1 \cos(w_d t) + k_2 \sin(w_d t))$	Complejas Conjugadas	$\zeta < 1$
Críticamente Amortiguada	$x_h(t) = k_1 e^{-\zeta w_0 t} + k_2 t e^{-\zeta w_0 t}$	Reales e Iguales	$\zeta = 1$
Sobreamortiguada	$x_h(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$	Reales y Distintas	$\zeta > 1$

Además, se debe identificar el coeficiente de amortiguación ζ y aplicar las condiciones iniciales respectivas.