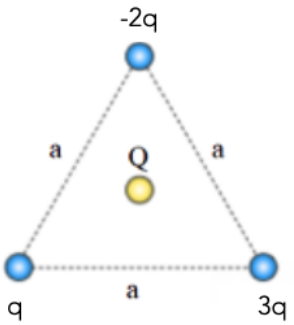
Interrogación 1

FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesores: E. Arévalo, F. Castillo, A. Meza,
A. Russomando, A. Varas y S. Wallentowitz.
1 de octubre, 2021, 18:30 hrs.

Importante:

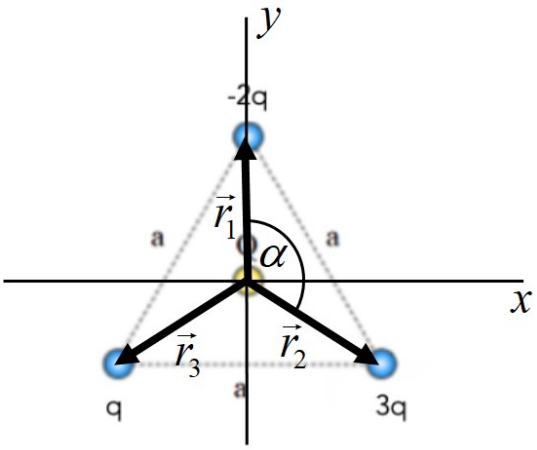
- La interrogación tiene una duración de 2 horas.
- La prueba es individual. Se permite el uso de apuntes personales y material impreso.
- No se puede usar ningún tipo de aparato electrónico. El uso de celulares, tabletas y dispositivos similares será sancionado.
- La copia será sancionada de acuerdo a las reglas de la universidad.
- Escriba de forma clara su nombre, RUN y sección en cada una de las hojas que entregue.
- Consultas solo de enunciado, durante la primera media hora de la evaluación.

Ej. 1 — (1.5 puntos)
En los vértices de un triángulo equilátero de lado a se ubican 3 cargas de valor q, $-2q$ y $3q$ (vea figura). En el centro de gravedad del triángulo (intersección de las 3 alturas) se coloca una carga de magnitud Q. Dando por conocidos los valores de q y a, determinar la dirección el sentido y intensidad de la fuerza eléctrica sobre la carga Q.



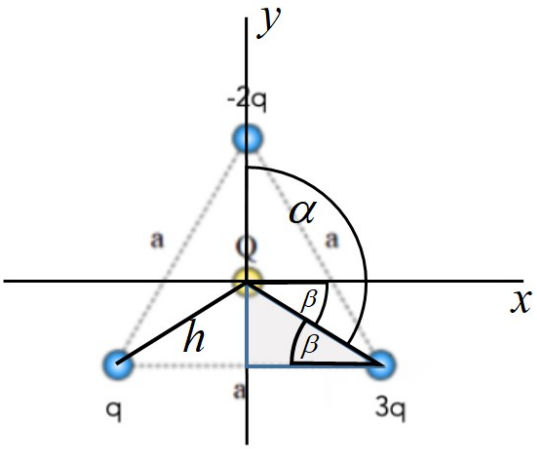
Solución

Se supone que el origen del sistema coordenado esta sobre la carga Q, tal como se muestra en la figura abajo.



Los vectores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$, son los vectores posición de las cargas -2q, 3q y q, respectivamente. Los tres vectores tienen la misma longitud h, es decir $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_1| = h$ donde h es una distancia por determinar. Los vectores están separados por el mismo ángulo $\alpha = 2\pi/3$. Nótese en la figura abajo que el ángulo β es igual a

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$



Del triángulo rectángulo sombreado de la figura arriba se observa que

$$h\cos(\beta) = h\cos(\pi/6) = a/2$$

Por tanto

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}}. \qquad \text{0.3pt}$$

Para definir los vectores posición se usan las coordenadas polares, en las cuales el ángulo esta referenciado con respecto al eje positivo de la coordenada x.

$$\vec{r}_1 = h\hat{y} \qquad \text{0.3pt}$$

$$\vec{r}_2 = h(\cos(-\beta)\hat{x} + \sin(-\beta)\hat{y}) = h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right) \qquad \text{0.3pt}$$

$$\vec{r}_3 = -h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) \qquad \text{0.3pt}$$

Nótese que $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$.

La fuerza total sobre la carga Q esta dada por la expresión

$$\vec{F} = k\frac{Q(-2q)}{h^2}\hat{y} + k\frac{Q(3q)}{h^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right) - k\frac{Qq}{h^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)$$

Simplificando se obtiene

$$\vec{F} = 3k\frac{Qq}{a^2}\left(\sqrt{3}\hat{x} - 4\hat{y}\right). \qquad \text{0.3pt}$$

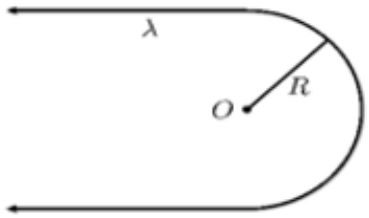
Equivalentemente se puede decir que el módulo de la fuerza es

$$|\vec{F}| = 57k\frac{Qq}{a^2} \qquad \text{0.2pt}$$

y el ángulo que forma con respecto al eje x positivo es

$$\theta = \arctan(-4/\sqrt{3}) \qquad \text{0.1pt}$$

Ej. 2 — (1.5 puntos)
El alambre de la figura es infinito y tiene una densidad de carga lineal constante λ. Encuentre el campo eléctrico en el punto O (centro del segmento semi-circular de radio R).



Pongamos el origen de coordenadas en el punto O, y elijamos el plano (x, y) de modo que el alambre doblado esté contenido en éste. Elegimos el eje x de forma que esté paralelo a los segmentos rectilíneos del alambre. Primero calculamos el campo eléctrico producido por los dos semiejes y finalmente usaremos el principio de superposición para calcular el campo total en O. Para calcular cada una de estas tres contribuciones usaremos la expresión del campo eléctrico producido por una distribución lineal de cargas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\lambda(\vec{R})ds$$

Donde $\lambda(\vec{R})$ denota la densidad lineal de carga, $\vec{r}$ es el punto donde deseamos calcular el campo, $\vec{R}$ recorre los puntos de la distribución y ds es el elemento de longitud de la linea donde se encuentra la carga. En este problema, por nuestra elección del origen, $\vec{r}=0$. Primero calculamos el campo producido por la semi-circunferencia. En este caso $\vec{R}$ = R$\hat{\rho}$ y ds = R$d\theta$. Reemplazando $\vec{r}=0$, $\vec{R}$= R$\hat{\rho}$ y ds = R$d\theta$ en la formula obtenemos lo siguiente:

$$\vec{E}_1(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{\rho}(\theta)d\theta \qquad \text{0.2pt}$$

Para resolver esta integral, escribimos $\hat{\rho}$ en coordenadas cartesianas: $\hat{\rho} = \cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}$. Reemplazando esta expresión y calculando las integrales, obtenemos:

$$\vec{E}_1(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta\hat{i} + sen\theta\hat{j})d\theta$$

$$\vec{E}_1(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{i} \qquad \text{0.3pt}$$

Ahora calcularemos la contribución debida al alambre que se ubica en el semieje y = R y que se extiende desde x=$-\infty$ hasta x=0. En este caso $\vec{R}$ =$x\hat{i} + R\hat{j}$ y ds=dx. Reemplazando:

$$\vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}[\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{i} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{j}] \qquad \text{0.3pt}$$

pues $|\vec{R}| = \sqrt{x^2+R^2}$. Ahora,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = -\frac{1}{R}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2}$$

Entonces obtenemos la contribución del alambre superior:

$$\vec{E}_2(0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{R}\hat{i} - \frac{1}{R}\hat{j}] \qquad \text{0.2pt}$$

Un cálculo completamente análogo para el alambre inferior (ubicado en y = -R entre x = -∞ y x = 0) da:

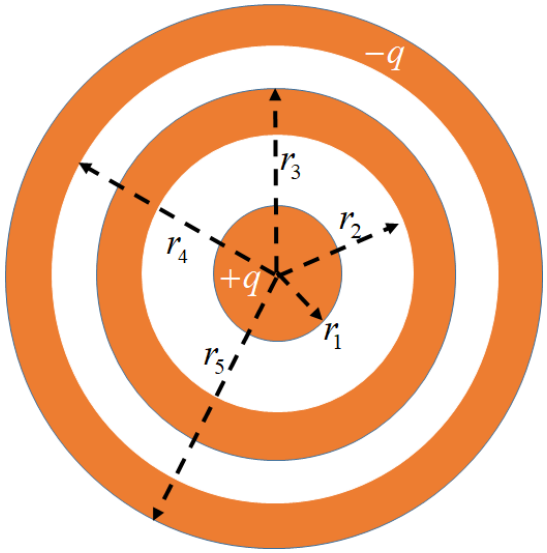
$$\vec{E}_3(0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{R}\hat{i} + \frac{1}{R}\hat{j}]. \qquad \text{0.3pt}$$

Finalmente, aplicamos el principio de superposición y sumamos los 3 campos obtenidos. De este modo obtenemos:

$$\vec{E}(0) = 0. \qquad \text{0.2pt}$$

Ej. 3 — (1.5 puntos)

Un esfera maciza de aluminio con radio r_1 se encuentra dentro de un cascarón esférico de cobre, de radio interior r_2 y radio exterior r_3, el cual se encuentra dentro de otro cascarón esférico conductor con radio interior r_4 y radio exterior r_5. Los radios cumplen con $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$ tal como se muestra en la figura. Los tres cuerpos están posicionados en forma concéntrica. La esfera y el cascarón exterior están eléctricamente cargados con carga positiva $+q$ y carga negativa $-q$, respectivamente, mientras que el cascarón del medio es eléctricamente neutro. Suponga que el valor de q y los radios son conocidos.



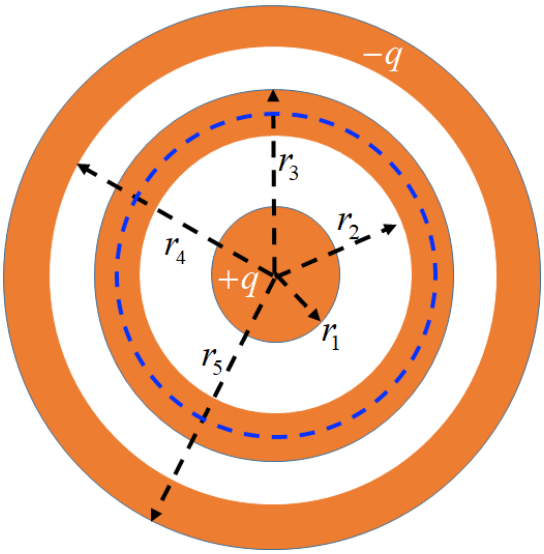
a) Usando la ley de Gauss, obtenga las densidades superficiales de carga eléctrica en la superficie interior σ_i y la superficie exterior σ_e del cascarón del medio.

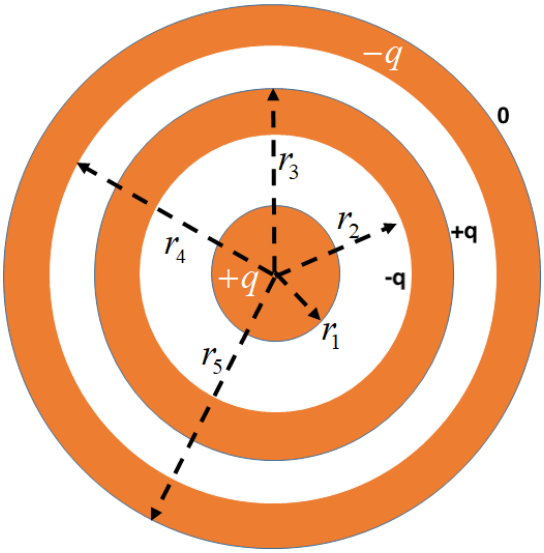
b) Obtenga el campo eléctrico en todo el espacio. Grafique la magnitud del campo eléctrico como función del radio.

c) Obtenga el potencial eléctrico en todo el espacio. Grafique el potencial eléctrico como función del radio.

Solución

a) Consideramos una superficie cerrada en la segunda esfera. El campo eléctrico en el interior de un conductor electrostático es nulo, también así sera el flujo del campo eléctrico a través de la superficie azul. Por la ley de Gauss debe ser cero la carga contenida en esta superficie. Es necesaria una carga de signo opuesto en la superficie interna. Pero el conductor es en su totalidad neutro, asi que aparece una carga +q en la superficie externa. Se obtiene la siguiente distribución de cargas.





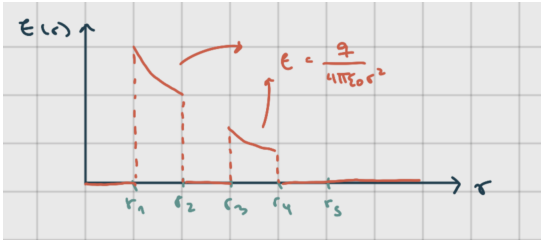
La densidades superficiales de carga eléctrica en la superficie interior es: $\sigma_i = \frac{-q}{4\pi r_2^2}$ 0.2pt

La densidades superficiales de carga eléctrica en la superficie externa es: $\sigma_e = \frac{q}{4\pi r_3^2}$ 0.2pt

b)

$$\begin{cases} r < r_1 & E(r) = 0 \\ r_1 < r < r_2 & E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ r_2 < r < r_3 & E(r) = 0 \\ r_3 < r < r_4 & E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ r_4 < r < r_5 & E(r) = 0 \\ r > r_5 & E(r) = 0 \end{cases}$$

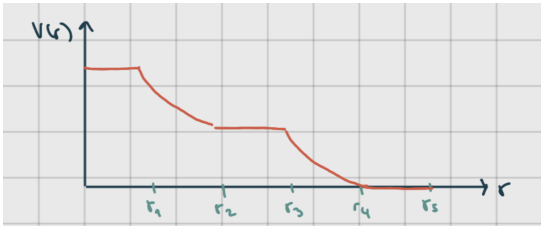
0.5pt



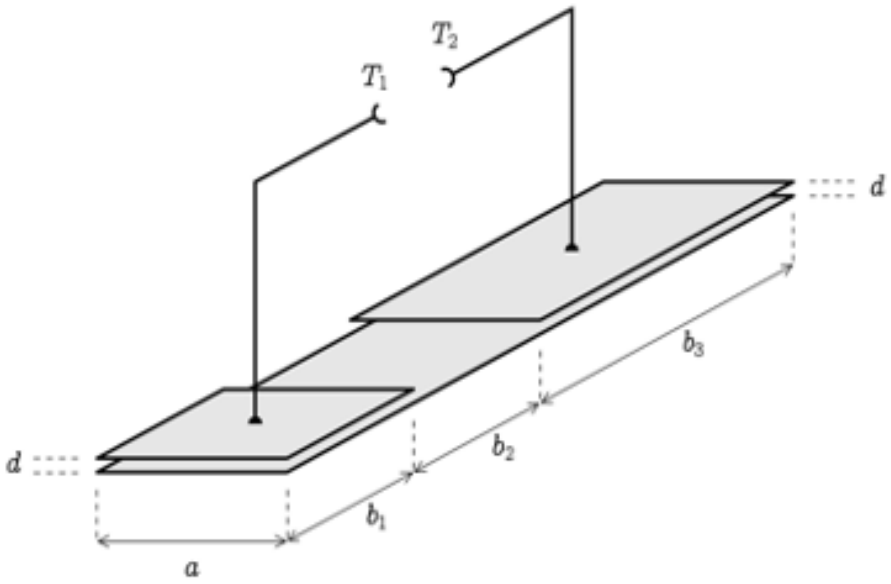
c)

$$\begin{cases} r < r_1 & V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}] \\ r_1 < r < r_2 & V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}] \\ r_2 < r < r_3 & V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}] \\ r_3 < r < r_4 & V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_4}] \\ r_4 < r < r_5 & V(r) = 0 \\ r > r_5 & V(r) = 0 \end{cases}$$

0.6pt



Ej. 4 — (1.5 puntos)
Dos placas metálicas se encuentran paralelas a una placa metálica común como muestra la figura. Las dos placas están conectadas con un cable eléctrico a los terminales T_1 y T_2.



a) Obtenga la capacidad eléctrica C entre los dos terminales T_1 y T_2 en términos de las dimensiones mostradas en la figura.

b) Si se aplica un voltaje U entre T_1 y T_2 ¿Cuáles son las cargas eléctricas en las tres placas metálicas? (la respuesta debe ser dada en términos de las dimensiones mostradas en la figura)

Solución item a)

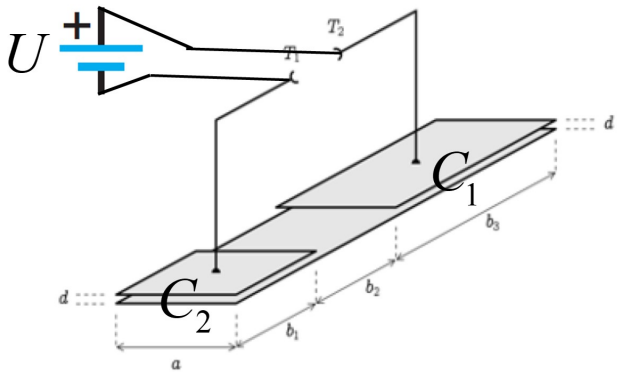


figura 1

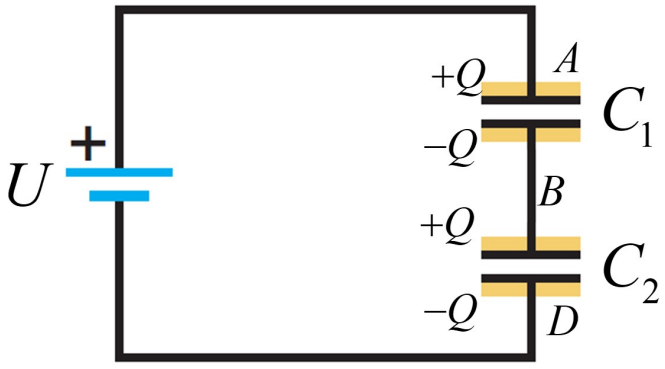


figura 2

Cambiando la topología se observa que el sistema de la figura 1 corresponde a dos condensadores eléctricos conectados en serie, tal como se muestra en la figura 2.

Usando la fórmula de los condensadores de placas paralelas vemos que

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{b_1 a}{d} \qquad \text{0.2pt}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{b_3 a}{d} \qquad \text{0.2pt}$$

El capacitancia equivalente para condensadores conectados en serie es

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \varepsilon_0 \frac{a}{d} \frac{b_1 b_3}{b_1 + b_3} \qquad \text{0.2pt}$$

Solución item b)

Como los condensadores están conectados en serie todos tienen la misma carga y es igual a la carga que tiene el condensador equivalente, es decir

$$Q = U C_{eq} = U \varepsilon_0 \frac{a}{d} \frac{b_1 b_3}{b_1 + b_3} \qquad \text{0.3pt}$$

Este valor de carga puede ser positivo o negativo dependiendo si está en la placa positiva o negativa de un condensador, tal como se muestra en la figura 2.

Para determinar la carga total sobre las diferentes placas del sistema se le asignan los índices A, B y D a las diferentes placas, tal como se muestra en la figura 3.

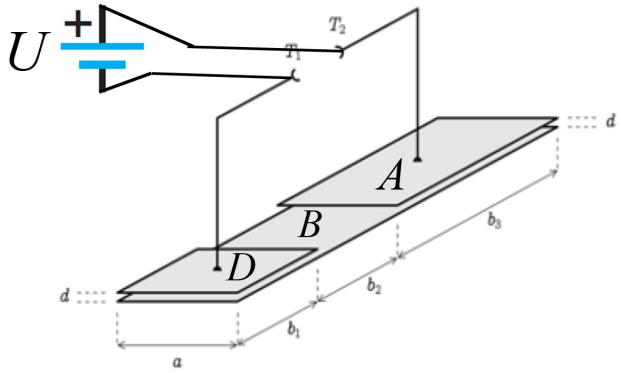


figura 3

Por comparación con la figura 2 se observa que la placa A corresponde a la placa positiva del condensador C_1, la placa D corresponde a la placa negativa del condensador C_2 y la placa B es una estructura que corresponde a la placa negativa del condensador C_1 y a la placa positiva del condensador C_2. De esto se concluye que la carga total sobre la placa A es

$$Q_A = +Q, \qquad \text{0.2pt}$$

la carga total sobre la placa D es

$$Q_D = -Q, \qquad \text{0.2pt}$$

y por ultimo la carga total sobre la placa B es

$$Q_B = Q - Q = 0. \qquad \text{0.2pt}$$