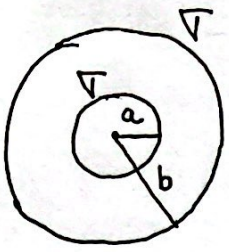
Ayudantía 3

1.



σ es densidad de carga superficial: $\sigma = \frac{Q}{A}$

¿$E(r)$ en todo el espacio? → Simetría esférica.

i) $r < a$:

$$\oint E \cdot dS = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}, \text{ pero } q_{enc} = 0 \rightarrow \boxed{E(r) = 0 \; ; \; r < a}$$

ii) $a < r < b$:

$q_{enc} = \sigma \cdot A = \sigma \cdot 4\pi a^2$ → reemplazamos en la ley de Gauss.

$$\oint E \cdot dS = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r} \; ; \; a < r < b}$$

Scanned with CamScanner

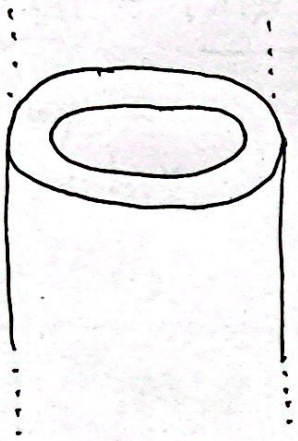
iii) $r > b$

$$q_{enc} = q_a + q_b = \sigma 4\pi a^2 + \sigma 4\pi b^2$$

$$\oint_S E \cdot ds = \frac{\sigma \cdot 4\pi (a^2+b^2)}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi (a^2+b^2)}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\sigma (a^2+b^2)}{\varepsilon_0 r^2} \; ; r > b}$$

2.



$r_{int} = a$

$r_{ext} = b$

¿E(r) en todo el espacio? → Simetría cilíndrica

i) $r < a$

$$\oint_S \vec{E} \cdot ds = \frac{\cancel{q}^{\,0}}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E(r) = 0 \; ; r < a}$$

Scanned with CamScanner

ii) $a < r < b$

$q_{enc} = \rho \cdot V = \rho(\pi r^2 h - \pi a^2 h)$ → No es necesario integrar.

$$\oint E \cdot ds = \frac{\rho h \pi (r^2 - a^2)}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\rho h \pi (r^2 - a^2)}{\varepsilon_0}$$

No hay flujo por las tapas ($E \perp$).

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho (r^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r} \hat{r}} \; ; \; a < r < b.$$

iii) $r > b$

$q_{enc} = \rho \cdot V = \rho \cdot (\pi b^2 h - \pi a^2 h)$

$q_{enc} = \rho \pi h (b^2 - a^2)$

$$\underbrace{\oint E \cdot ds}_{E \cdot 2\pi r h} = \frac{\rho \pi h (b^2 - a^2)}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} (b^2 - a^2) \; ; \; b < r}$$

Scanned with CamScanner

3. $\vec{E} = -(ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z})\,\hat{k}$

Donde a, b, α y $\beta > 0 \in \mathbb{R}^+$. y z es la altura.

a) ¿$\rho(z)$?

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, campo eléctrico conocido.

Luego:

$\rho_{(z)} = \varepsilon_0 \nabla \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$, derivamos:

$\frac{\partial E}{\partial z} = a\alpha e^{-\alpha z} + b\beta e^{-\beta z}$, luego

$$\boxed{\rho(z) = \varepsilon_0 (a\alpha e^{-\alpha z} + b\beta e^{-\beta z})\,\hat{k}.}$$

b) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, recordar:

$Q = \rho \cdot V$, pero en infinito: $Q = \int_V \rho\, dv = A \int_0^\infty \rho(z)\, dz$

pues $A \cdot dz = dv$.

Scanned with CamScanner

Reemplazando:

$$Q = A\varepsilon_0 \int_0^{\infty} \underbrace{(a\alpha e^{-\alpha z} + b\beta e^{-\beta z})}_{\frac{\partial E}{\partial z}}$$

→ Nos devolvemos a la expresión de campo eléctrico.

Evaluando:

$$-A\varepsilon_0 (a e^{-\alpha z} + b e^{-\beta z})\Big|_0^{\infty}$$

$$\boxed{Q = A\varepsilon_0 (a+b)}$$

Scanned with CamScanner