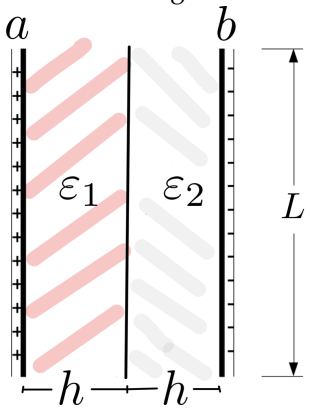
Interrogación II

Fecha: 11 de noviembre 2024

1. Se tienen dos láminas conductoras a y b de ancho despreciable y con carga unformemente distribuida Q y $-Q$ respectivamente. Cada lámina tiene un área $A = L^2$ y un largo L que es mucho mayor que la separación entre las láminas. Entre a y b se encuentran dos dieléctricos (neutros) con permitividades ε_1 y ε_2, cada uno tiene ancho h como muestra la figura.



En el espacio entre los conductores calcule

a) El vector de desplazamiento $\vec{D}$. (1 punto)

b) El campo eléctrico $\vec{E}$. (1 punto)

c) El vector de polarización $\vec{P}$. (1 punto)

Calcule además

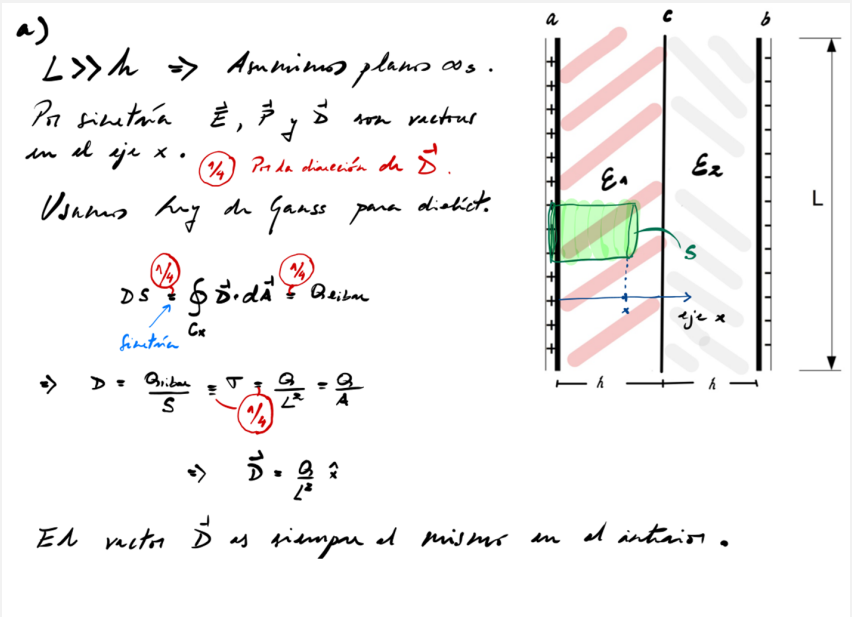
d) La carga inducida (o carga de polarización) en los bordes (o interfaces) de cada dieléctrico. (1 punto)

e) La diferencia de potencial entre los conductores a y b: $V_a - V_b$. (1 punto)

f) La capacitancia del sistema con dieléctricos, C, y sin ellos C_0. Determine $C - C_0$. (1 punto)

Solución:

a)



a)
■

b) Tenemos que dentro de un dieléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{D}{\varepsilon}\hat{x} \qquad 1/3$$

En nuestro caso:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_1}\hat{x} & , x \in (0,h) \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_2}\hat{x} & , x \in (h,2h) \end{cases} \qquad 1/3 \quad 1/3$$

b)

■

Solución:

c) Para todo dieléctrico tenemos:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \qquad 1/3$$

$$\vec{P} = \begin{cases} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{\sigma}{\varepsilon_1}\hat{x} & , x \in (0,h) \\ (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\vec{E}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{\sigma}{\varepsilon_2}\hat{x} & , x \in (h,2h) \end{cases} \qquad 1/3 \quad 1/3$$

c)

■

Solución:

d) Usamos que $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$ (1/10) y que $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{m}$. (1/10)

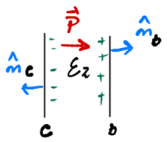
En el dieléctrico ε_1:



$$\sigma_{pc} = \vec{P}\cdot\hat{n} = P = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1}\sigma \qquad 1/5$$

$$\sigma_{pa} = \vec{P}\cdot\hat{m}_a = -P = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1}\sigma \qquad 1/5$$

En el dieléctrico ε_2:



$$\sigma_{pb} = \vec{P}\cdot\hat{m}_b = P = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_2}\sigma \qquad 1/5$$

$$\sigma_{pc} = \vec{P}\cdot\hat{m}_d = -P = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2}\sigma \qquad 1/5$$

d)

■

Solución:

e) $V_a - V_b = V_a - V_c + V_c - V_b$ (1/3)

(1/3) $= E_1 \cdot h + E_2 h = (E_1 + E_2) h$

$= \tau \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \cdot h$. (1/3)

$\Rightarrow V_a - V_b = \tau \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \cdot h$

e) ■

Solución:

f)

$C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{q}{\tau \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) h} = \frac{L^2}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) h} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 L^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h}$ (1/2)

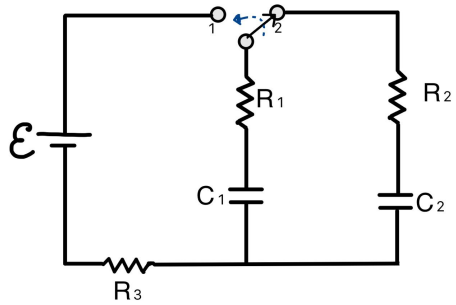
La capacitancia C_0 la obtenemos haciendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ en la ec. anterior:

$C_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{2h}$ (1/4)

$C - C_0 = \left[\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_0}{2} \right] \frac{L^2}{h}$. (1/4)

f) ■

2. En el circuito de la figura, los condensadores se encuentran completamente descargados.



Si el interruptor se cambia a la posición 1 en $t = 0$ s, determinar:

a) La corriente I_0 que suministra la fuente en el instante justo después de cerrar el interruptor. (1 punto)

b) La carga máxima almacenada en el condensadores C_1. (1 punto)

c) La carga almacenada en el capacitor C_1 en función del tiempo. (2 puntos)

Si luego de mucho tiempo, el interruptor se cambia otra vez a la posición 2, determine

d) La carga almacenada en C_1 como función del tiempo. (2 punto)

Solución:
a) Inmediatamente después de que se cierra el interruptor en la posición 1, el condensador actúa como un cable ($\Delta V_{c1} = 0$). De esta forma al leer la malla se tiene

$$\mathcal{E} - I_0 R_1 - I_0 R_3 = 0 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego la corriente suministrada por la fuente es:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_3} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

b) Cuando el condensador se encuentra completamente cargado la corriente deja de fluir, por lo que $\Delta V_{R1} = \Delta V_{R3} = 0$. De esta forma al leer la malla se tiene

$$\mathcal{E} - \frac{Q_{1,max}}{C_1} = 0 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

De esta forma la carga máxima almacenada en el condensador es:

$$Q_{1,max} = \mathcal{E} \cdot C_1 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

c)Para encontrar la carga del condensador 1 en términos del tiempo se debe escribir la ecuación diferencial del circuito.

$$\mathcal{E} - I \cdot R_1 - \frac{Q_1}{C_1} - I \cdot R_3 = 0 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Donde la corriente que circula por las resistencias cumple

$$I = \frac{dQ_1}{dt} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Finalmente la ecuación a resolver es

$$\mathcal{E} - \frac{dQ_1}{dt} \cdot (R_1 + R_3) - \frac{Q_1}{C_1} = 0$$

La solución a esta ecuación es

$$Q_1(t) = \mathcal{E} \cdot C_1 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , \quad \tau = C_1 \cdot (R_1 + R_3) \qquad \text{(1 pto.)}$$

■

d) Al pasar mucho tiempo desde que el interruptor se cerró en 1,

$$Q_1 \to Q_{1,max} = \mathcal{E} \cdot C_1 \to Q_1'(0) = \mathcal{E} \cdot C_1$$

Luego al cerrar el circuito en 2, el condensador 1 se descargará mientras el condensador 2 se carga. Al leer la malla se tiene

$$+\frac{Q_1'}{C_1} - I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - \frac{Q_2}{C_2} = 0 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego al considerar el principio de conservación de cargas

$$Q_1' + Q_2 = \mathcal{E} \cdot C_1 \to I = -\frac{dQ_1'}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

De esta forma la ecuación diferencial para la descarga del condensador 1 es

$$Q_1'\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + \frac{dQ_1'}{dt} \cdot (R_1 + R_2) - \frac{\mathcal{E} \cdot C_1}{C_2} = 0$$

$$\frac{Q_1'}{C_{eq}} + \frac{dQ_1'}{dt} \cdot R_{eq} - \frac{\mathcal{E} \cdot C_1}{C_2} = 0$$

$$Q_1' + \frac{dQ_1'}{dt} \cdot R_{eq} \cdot C_{eq} - \frac{\mathcal{E} \cdot C_1}{C_2} C_{eq} = 0 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

La solución a esta ecuación debe tener la forma

$$Q_1'(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + B \qquad \text{(0.1 pts.)}$$

con

$$Q_1'(0) = \mathcal{E} \cdot C_1$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial se tiene

$$\tau = R_{eq} \cdot C_{eq} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad \text{(0.1 pts.)}$$

$$B - \frac{\mathcal{E} \cdot C_1}{C_2} C_{eq} = 0 \to B = \mathcal{E} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \qquad \text{(0.1 pts.)}$$

De esta forma al reemplazar con la condición inicial

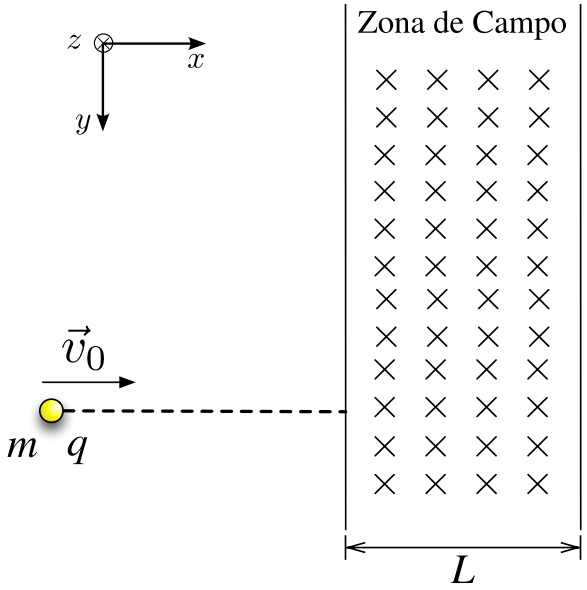
$$A + \mathcal{E} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} = \mathcal{E} \cdot C_1 \to A = \mathcal{E} \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \mathcal{E} \cdot C_{eq} \qquad \text{(0.1 pts.)}$$

Finalmente

$$Q_1'(t) = \mathcal{E} \cdot C_{eq} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E} \cdot C_1}{C_2} C_{eq} \qquad \text{(0.1 pts.)}$$

■

3. Una partícula de masa m, con carga $q > 0$, ingresa horizontalmente a una región de ancho L, donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\,\hat{k}$ como se muestra en la figura.



a) Calcule el valor crítico de la rapidez inicial $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{\imath}$ de la partícula que le permita decidir si ella atraviesa la región o se devuelve. (2 puntos)

b) Describir (y dibujar) la trayectoria que realiza la partícula para los casos en que la rapidez inicial sea mayor, menor o igual que el valor crítico encontrado anteriormente. (1 punto)

c) Suponga ahora que la velocidad inicial es $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{\imath} + v_B\,\hat{k}$, determine la distancia a lo largo del eje z que alcanza a recorrer la carga antes de abandonar la zona de campo magnético. Considere los distintos casos a partir de los resultados de la parte anterior. (3 puntos)

Solución:
a) Al entrar a la zona de campo magnético, la carga experimentará una fuerza magnética que la llevará a realizar un movimiento circular uniforme (0.3 pts.). En el instante que entra a la zona, la fuerza será a lo largo del eje y dada por

$$\vec{F}_B = qv_0\,\hat{\imath} \times B\,\hat{k} = -qv_0B\,\hat{\jmath}\,.$$

El radio de giro de la orbita circular dependerá de la velocidad de la partícula y viene dado por

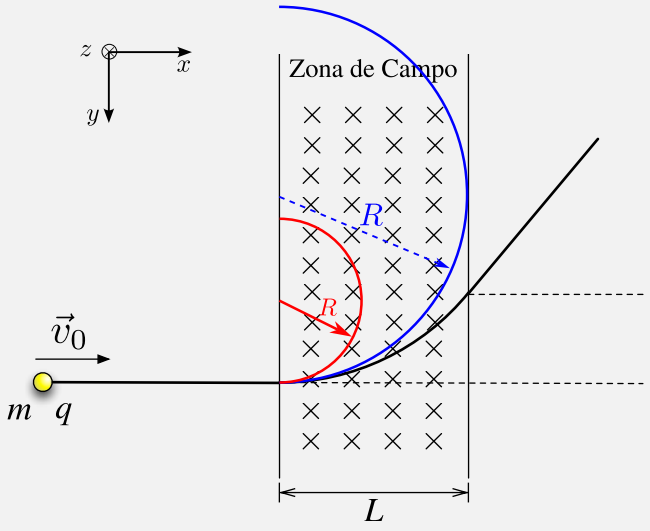
$$R = \frac{mv_0}{qB}\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Si el radio es menor que el ancho de la zona de campo magnético, $R < L$, la carga completará una media circunferencia y saldrá de la zona por el lado izquierdo de la figura (se devolverá) (0.3 pts.). Si el radio es mayor, no alcanzará a completar la vuelta y saldrá por el lado derecho. El caso crítico ocurre para $R = L$ (0.3 pts.), luego

$$v_{\text{crítico}} = \frac{qBL}{m}\,. \qquad \text{(0.6 pts.)}$$

■

b) Las trayectorias que describirá la carga se muestran en la siguiente figura (0.2 pts. c/u). Si $v_0 \leq v_{\text{crítico}}$ la carga describirá una trayectoria circular, alcanzando a recorrer una semi circunferencia dentro de la zona de campo magnético con $R \leq L$ (0.2 pts.). Si $v_0 > v_{\text{crítico}}$, la carga seguirá una trayectoria circular dentro de la zona de campo magnético, pero no alcanzará a recorrer un cuarto de circuenferencia cuando llegue al borde de la zona de campo magnético, y luego saldrá de ésta con una velocidad en la dirección tangencial a la circunferencia (0.2 pts.).



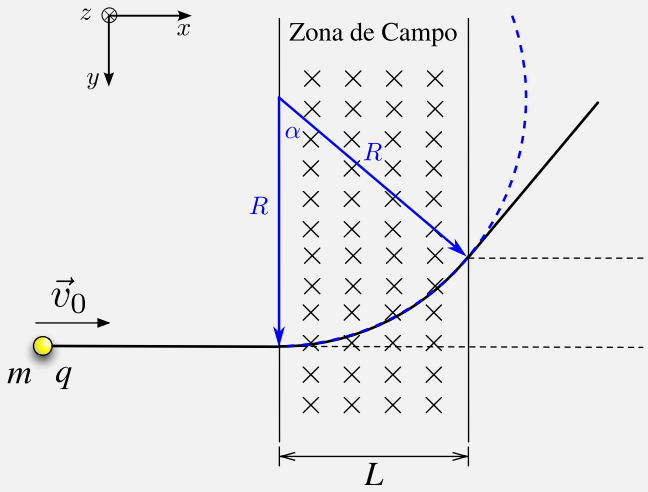
■

c) Para calcular la distancia que avanza la partícula en el eje z, notamos que ésta se mueve con rapidez constante, ya que el campo magnético no realiza trabajo sobre ella (0.25 pts.). Además, la componente z de la velocidad no se ve afectada por la presencia del campo magnético, ya que es paralela al campo (0.25 pts.). Si $v_0 \leq v_{\text{crítico}}$, la partícula realizará una semi circunferencia dentro de la zona de campo magnético, pero esta vez también avanzará en el eje z. Calculamos el tiempo que demora la partícula en dar la media vuelta, que es también el tiempo que permanece en la zona de campo magnético,

$$t = \frac{d}{v} = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi m}{qB}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego, en el eje z avanzará una distancia

$$h = v_z t = \frac{\pi m}{qB} v_B \qquad \text{(0.5 pts.)}$$



Si $v_0 > v_{\text{crítico}}$, calculamos también el tiempo que permanece en la zona de campo magnético, pero esta vez la carga sólo realiza una porción de la trayectoria circular. La distancia que recorre será el arco sustendido por el ángulo α que se muestra en la figura. Este ángulo viene dado por

$$\sin\alpha = \frac{L}{R} = \frac{qLB}{mv_0}, \quad \rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{qLB}{mv_0}\right) \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego,

$$t = \frac{d}{v} = \frac{R\alpha}{v_0}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Entonces la distancia que avanza en el eje z será,

$$h = v_z t = \frac{R\alpha}{v_0} v_B = \frac{mv_B}{qB} \arcsin\left(\frac{qLB}{mv_0}\right) \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■