PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 11

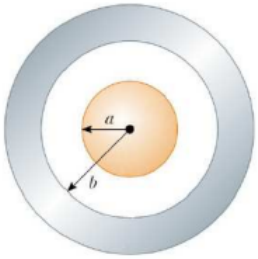
Problema 1

Dos esferas metálicas concéntricas, de radios a y b, están separadas por un material conductor de conductividad σ constante.

a) Si estas esferas son mantenidas a una diferencia de potencial V constante, encuentre la corriente que va de una a la otra.

b) Encuentre la resistencia entre las esferas.

c) Observe que, en el caso anterior, se cumple que $R \propto 1/C$, donde C es la capacitancia. Demuestre que dicha formula es valida para dos conductores caulesquiera, separados por un material conductor de conductividad σ constante.



SOLUCION:

a) Al establecer una diferencia de potencial sobre los conductores

$$V = V(a) - V(b)$$

se inducirán cargas Q y $-Q$ sobre las superficies $r = a$ y $r = b$, respectivamente. El campo eléctrico en la región interior se puede determinar a partir de la Ley de Gauss debido a la simetría esférica del problema:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\rho}, \quad a < r < b$$

Por otro lado,

$$V = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

donde se ha elegido una trayectoria radial. Con ello,

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 abV}{b-a} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{Vab}{(b-a)r^2}\hat{\rho}$$

Debido a que la zona $a < r < b$ está llena con un material conductor, el campo eléctrico dará origen a un movimiento de cargas (corriente), en donde la densidad está relacionada con el campo mediante la Ley de Ohm Microscópica

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma Vab}{(b-a)r^2}\hat{\rho}$$

La corriente que fluye entre los conductores se puede obtener integrando sobre una superficie esférica $\mathcal{S}$ de radio $r, a < r < b$:

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 J(r) = \frac{4\pi\sigma Vab}{(b-a)}$$

b) La resistencia vendrá dada por la Ley de Ohm Macroscópica, $V = IR$, y con ello:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

c) Recordando que la capacidad de un condensador esférico es

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

entonces, se tiene que:

$$\frac{b-a}{4\pi\epsilon_0 ab} = \frac{1}{C}$$

multiplicando a ambos lados por ϵ_0/σ,

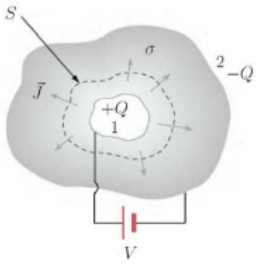
$$\frac{b-a}{4\pi\sigma ab} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

Notemos que el lado izquierdo no es otra cosa mas que la resistencia que encontramos antes. De este modo,

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

donde efectivamente se cumple que $R \propto 1/C$.

Veamos que esto se cumple en el caso general: Sean 1 y 2 dos conductores cualesquiera, separados por un material de conductividad σ :



Se tendrá un flujo de corriente dado por:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Por ley de Ohm,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Reemplazando,

$$I = \sigma \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por ley de Gauss. Por otro lado, si C es la capacidad del sistema, se cumple que

$$Q = CV$$

Reemplazando,

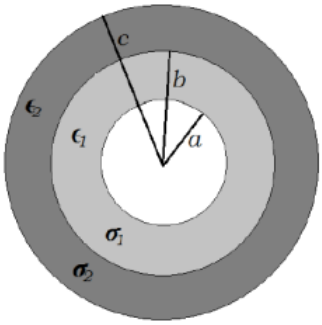
$$I = \frac{\sigma}{\epsilon_0} CV \quad \rightarrow \quad R = \frac{V}{I} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}.$$

Problema 2

Entre dos cilindros conductores coaxiales muy largos, de radios a y $c > a$, se llena con materiales de conductividades σ_1 y σ_2, y permitividades ϵ_1 y ϵ_2, como muestra la figura.

a) Encuentre la resistencia entre el núcleo y el conductor externo.

b) Si se conecta una diferencia de potencial V_0 entre el núcleo y el conductor externo, calcule la densidad de corriente J y la corriente I que circula.



SOLUCION:

a) Asumimos que la corriente circula radialmente desde la placa interna a la externa, de tal forma que una corriente I se relaciona con la densidad como:

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}} J(r) dS$$

en donde $\mathcal{S}$ es el manto de un cilindro de radio r coaxial con los cascarones conductores. Por simetría, la densidad de corriente sale de la integral. Si ℓ denota el largo de los cables, entonces

$$I = J(r) \int_{\mathcal{S}} dS = 2\pi r \ell J(r) \quad \longrightarrow \quad J(r) = \frac{I}{2\pi r \ell}$$

Suponiendo válida la ley de Ohm en este material, el campo eléctrico podemos calcularlo fácilmente. No obstante, debemos ser cuidadosos pues la conductividad varía en cada región llena de material conductor. El campo en las regiones queda, respectivamente,

$$E_1 = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r\ell}, \quad E_2 = \frac{I}{2\pi\sigma_2 r\ell}$$

ambos en dirección radial. La diferencia de potencial entre ambas placas es

$$|\Delta V| = \int_a^c E(r)dr = \int_a^b E_1(r)dr + \int_b^c E_2(r)dr = \frac{I\ln(b/a)}{2\pi\sigma_1\ell} + \frac{I\ln(c/b)}{2\pi\sigma_2\ell}$$

y, por tanto, la resistencia es:

$$R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma_1\ell} + \frac{\ln(c/b)}{2\pi\sigma_2\ell}$$

b) Por la ley de Ohm, si se aplica una diferencia de potencial V_0 entre las placas, la corriente que fluirá de una a la otra es

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{2\pi\ell V_0}{\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}}$$

y la densidad de corriente es

$$J(r) = \frac{I}{2\pi\ell r} = \frac{V_0}{\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2}} \frac{1}{r}$$