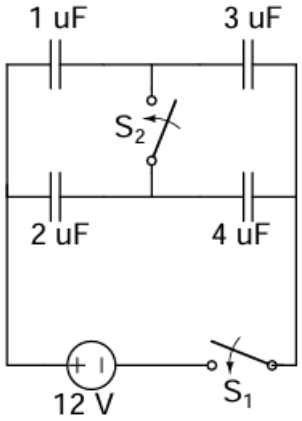
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 8

Problema 1

Se tiene un circuito como el que se muestra en la figura:



a) Encontrar la carga de cada condensador cuando se cierra el interruptor S_1.

b) Encontrar la carga de cada condensador cuando, además, se cierra S_2.

SOLUCION:

a) Cuando S_1 está cerrado, los dos capacitores superiores están en serie, así como también los dos inferiores. Las capacidades equivalentes son:

$$C_{\text{arriba}} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1} \mu\text{F} = \frac{3}{4}\,\mu\text{F}$$

$$C_{\text{abajo}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-1} \mu\text{F} = \frac{4}{3}\,\mu\text{F}$$

Por último, C_{arriba} y C_{abajo} están en paralelo, por lo que la capacidad total será:

$$C_t = C_{\text{arriba}} + C_{\text{abajo}} = \frac{25}{12}\ \mu\text{F}$$

Con esto, podemos determinar la carga total suministrada por la fuente: $Q = VC = 25\mu\text{C}$. Ahora, sean Q_i y V_i la carga y diferencia de potencial -respectivamente- del i-ésimo condensador, numerados en orden creciente respecto a su capacitancia. Por estar en serie, $Q_1 = Q_3, Q_2 = Q_4$. Así:

$$Q_1 = 1\mu V_1, \quad Q_2 = 2\mu V_2, \quad Q_3 = 3\mu V_3 = Q_1, \quad Q_4 = 4\mu V_4 = Q_2$$

Además, los voltajes satisfacen

$$12 = V_1 + V_3 = V_2 + V_4$$

Resolviendo el sistema,

$$Q_1 = V_1 = 36 - 3V_1, \quad Q_2 = 2V_2 = 48 - 4V_2 \quad \longrightarrow \quad V_1 = 9, V_2 = 8, V_3 = 3, V_4 = 4$$

Por último,

$$\begin{gathered} Q_1 = 9\ \mu\text{C} \\ Q_2 = 16\ \mu\text{C} \\ Q_3 = 9\ \mu\text{C} \\ Q_4 = 16\ \mu\text{C} \end{gathered}$$

Se comprueba que $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25\ \mu\text{C} = Q$.

b) En este caso, los condensadores C_1 y C_2 están en paralelo, al igual que C_3 y C_4 :

$$\begin{gathered} C_{\text{izquierda}} = C_1 + C_2 = 3\ \mu\text{F} \\ C_{\text{derecha}} = C_3 + C_4 = 7\ \mu\text{F} \\ \Rightarrow C_{\text{eq}}\ = \frac{21}{10}\ \mu\text{F} \end{gathered}$$

La carga suministrada por la fuente será:

$$Q = C_{eq}V = 25{,}2\ \mu\text{C}$$

Además, se tiene $V_1 = V_2,\ V_3 = V_4$, ya que se encuentran en paralelo. Así,

$$\begin{gathered} V_1 = \frac{1}{Q_1} = V_2 = \frac{2}{Q_2} \\ V_3 = \frac{3}{Q_3} = V_4 = \frac{4}{Q_4} \end{gathered}$$

Con esto, $2Q_1 = Q_2$ y $4Q_3 = 3Q_4$. También debe darse que $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25{,}2\ \mu$C, y por tanto:

$$2Q_1 = Q_2 = 25{,}2 - Q_1$$

y

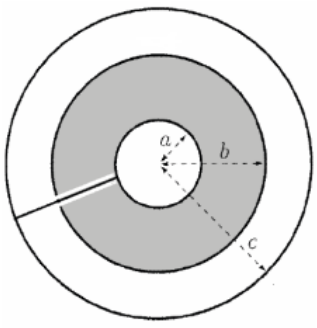
$$Q_3 = 25{,}2 - Q_4 = 25{,}2 - \frac{4}{3}Q_3$$

Finalmente, de estas ecuaciones obtenemos:

$$Q_1 = 8{,}4\ \mu\text{C}$$
$$Q_2 = 16{,}8\ \mu\text{C}$$
$$Q_3 = 10{,}8\ \mu\text{C}$$
$$Q_4 = 14{,}4\ \mu\text{C}$$

Problema 2

Se tienen tres cascarones esféricos conductores concéntricos de radios a, b y c. El espacio entre los dos primeras está lleno con un dieléctrico de constante κ. Inicialmente, la esfera de radio a está descargada y las esferas de radios b y c tienen carga q_1 y q_2, respectivamente. Posteriormente, la esfera interior de radio a se conecta con la esfera de radio c con un cable aislado delgado. Calcule la carga libre en cada esfera.



SOLUCION:

Para resolver el problema, definimos 3 regiones

- **Región I**: $r < a$
- **Región II**: $a < r < b$
- **Región III**: $b < r < c$

Al conectar las esferas de radios a y c, estas distribuirán la carga en ambas de modo que queden al mismo potencial, tal que

$$q_2 = q_a + q_c$$

Ahora, para la **Región I** tenemos que $\vec{E}(r < a) = 0$, pues corresponde al interior de un conductor.
Para la **Región II**, utilizamos la ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{free}}$$

como no nos dicen nada del dieléctrico, asumimos que este es lineal, homogéneo e isotrópico, de modo que podemos escribir $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, con $\epsilon = \kappa\epsilon_0$. Las cargas libres van a estar en los conductores que encerramos con nuestra superficie gaussiana, en este caso el cascaron de radio a. De este modo, tenemos

$$\int_S \kappa\vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \kappa E(r) = \frac{q_a}{\epsilon_0} \;\rightarrow\; \vec{E}(r) = \frac{q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Para la **Región III**:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_a + q_1}{\epsilon_0} \;\rightarrow\; \vec{E}(r) = \frac{q_a + q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Se sabe que la diferencia de potencial entre las esferas de radios a y c es nula, puesto que ambas están unidas por un cable. Así

$$0 = V(c) - V(a) = -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{r} \;\rightarrow \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

donde

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{q_a + q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_b^c \frac{dr}{r^2}$$

Luego,

$$\frac{q_a}{4\pi\kappa\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{q_a + q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = 0$$

$$q_a\left(\frac{b-a}{ab}\right) + \kappa(q_a + q_1)\left(\frac{c-b}{bc}\right) = 0$$

Despejando la carga q_a

$$q_a\left(\frac{b-a}{a} + \kappa\frac{c-b}{c}\right) = -\kappa q_1\left(\frac{c-b}{c}\right)$$

$$q_a\left[\frac{c(b-a) + a\kappa(c-b)}{ac}\right] = -\kappa q_1\left(\frac{c-b}{c}\right)$$

$$q_a = -\left[\frac{a\kappa(c-b)}{c(b-a) + a\kappa(c-b)}\right] q_1$$

Y finalmente se obtiene

$$q_c = q_2 - q_a = q_2 + \left[\frac{a\kappa(c-b)}{c(b-a) + a\kappa(c-b)}\right] q_1$$

Problema 3

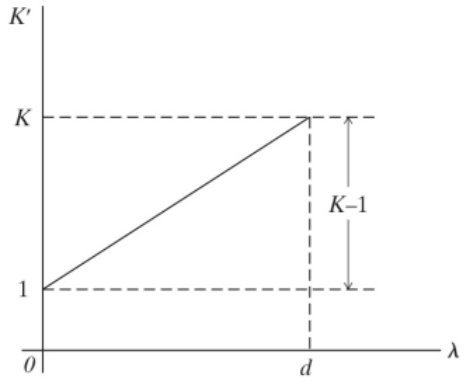
Dos placas conductoras con área A están separadas por una distancia d. Entre las placas se encuentra un material cuya constante dieléctrica varia linealmente desde la unidad al lado de una placa hasta κ al lado de la otra.

a) ¿Cuál es la capacitancia del dispositivo?

b) Demuestre que el resultado anterior coincide con el resultado esperado cuando $\kappa \to 1$.

SOLUCION:

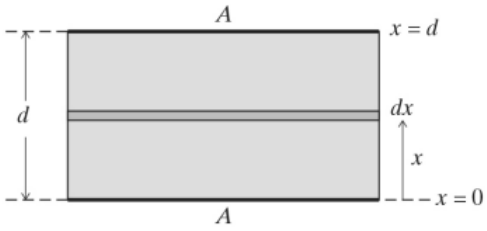
La constante dieléctrica no es uniforme dentro del condensador. Como esta varia linealmente, llamemos x la distancia de cualquier punto de la primera placa que tiene $\kappa' = 1$ hasta $\kappa' = \kappa$. De este modo, la constante dieléctrica varía de la siguiente forma:



Como es una linea recta, es fácil ver que la ecuación que satisface el comportamiento de κ' es

$$\kappa' = \left(\frac{\kappa - 1}{d}\right) x + 1$$

Para resolver el problema, consideremos que dividimos el dieléctrico en pequeñas losas de grosor dx, tal como se muestra a continuación



A partir de la ecuación de capacitancia de un condensador de placas paralelas, $C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d}$, podemos obtener la capacitancia de una sola de las losas

$$dC = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{dx}$$

Estas losas están en serie entre ellas, tal que $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + ...$, pero cada capacitancia se añade infinitesimalmente, de modo que debemos integrar para obtener la suma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C} &= \int \frac{1}{C} \\
&= \int_0^d \frac{dx}{\kappa'\epsilon_0 A} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0 A}\int_0^d \frac{dx}{1+(\kappa-1)x/d} \\
&= \frac{d}{\epsilon_0 A(\kappa-1)} \ln\left[1+\frac{(\kappa-1)x}{d}\right]\Bigg|_0^d
\end{aligned}$$

Evaluando y reordenando, se obtiene

$$C = \frac{\epsilon_0 A(\kappa-1)}{d\ln\kappa}$$

Al evaluar $\kappa \to 1$, el resultado es indeterminado, por lo que podemos utilizar la regla de L'Hopital para resolver

$$C = \lim_{K\to 1}\left[\frac{\epsilon_0 A(\kappa-1)}{d\ln\kappa}\right] = \lim_{K\to 1}\left[\frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{1}{1/\kappa}\right] = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Podemos reconocer que este resultado corresponde a un condensador de placas paralelas lleno de un material dielectrico de constante κ uniforme.