Parte V

Magnetostática. Campos variantes en el tiempo

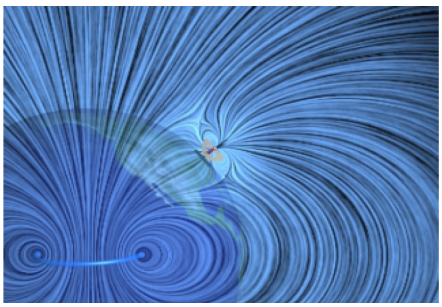
Capítulo 12

Magnetostática

El campo Magnético

Hemos visto que las cargas estáticas son fuentes de campo eléctrico. Además conocemos una ley que nos permite saber cómo es la fuerza que un campo eléctrico ejerce sobre una carga puntual (Ley de Coulomb). Ahora, sucede que si dos cargas se están moviendo, existe una fuerza adicional entre ellas debido a éste movimiento. Ésta fuerza se conoce como **Fuerza Magnética**. Sin embargo, la fuerza magnética entre 2 cargas puntuales en movimiento relativo es muchísimo menos intensa que la fuerza de Coulomb, por lo que se hace prácticamente imposible medir la fuerza magnética entre 2 cargas puntuales. De todas formas, efectos magnéticos se pueden medir al utilizar corrientes eléctricas en conductores (donde existe un número muy grande de electrones en movimiento!)

En resumen, cargas en movimiento generan campos magnéticos (y entonces una corriente eléctrica también), y a su vez, campos magnéticos actúan sobre cargas en movimiento (en consecuencia, un campo magnético ejerce una fuerza sobre un conductor con corriente).



Comenzaremos por el estudio de la **Magnetostática**, es decir, el estudio de campos magnéticos producidos por corrientes **estacionarias**. Con esto queremos decir

$$I = \frac{dq}{dt} = C$$

Recordando la ecuación de continuidad de la carga

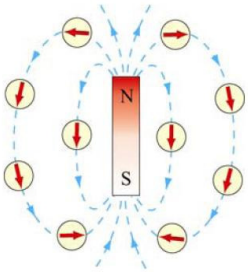
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$$

La condición de que las corrientes sean estacionarias entrega

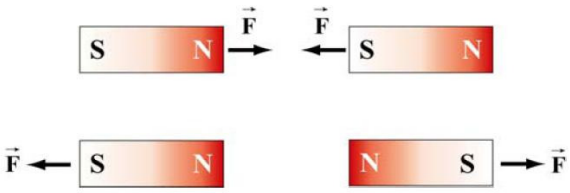
$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Más adelante veremos como se relacionan los campos eléctrico y magnético, y encontraremos las leyes fundamentales de la electrodinámica.

Un imán permanente es una fuente natural de campo magnético $\vec{B}$. Esto se puede verificar al mover un compás cerca de un imán, la aguja del compás se alineará en la dirección del campo magnético producido por el imán, como se ve en la figura



Es decir, el efecto del imán sobre la aguja es el de un **torque** (Torque de Ampère). Una barra magnética consiste de dos polos, que se designan como norte (N) y sur (S). Esto significa que las líneas de campo emergen desde un polo (norte) y terminan en el opuesto (sur). Veremos que los campos magnéticos siempre tienen esta característica, es decir, las líneas de campo magnético siempre emergen y terminan en la misma fuente del campo. (No se han encontrado **monopolos magnéticos**). Cuando se acercan 2 barras magnéticas, 2 polos iguales se repelen, mientras que polos contrarios se atraerán



Al contrario de las cargas eléctricas, las cuales pueden estar aisladas, los 2 polos magnéticos siempre vienen en pares. Cuando se quiebra un imán, se obtienen 2 nuevos imanes, cada uno con polo norte y sur. En otras palabras, no existen monopolos magnéticos aislados



Se verá más adelante que éste resultado se resume en la tercera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

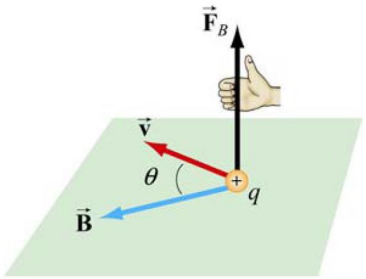
Podría resultar, en principio, misterioso que un material genere campos magnéticos. Lo único que hemos dicho es que cargas en movimiento generan campos magnéticos. Es sabido que una de las fuerzas fundamentales que dan forma a los átomos es la fuerza eléctrica (que atrae al electrón con el protón). El movimiento de electrones en un material genera entonces campos magnéticos. En realidad, tener la visión de un electrón como una partícula que gira en torno al núcleo no es muy correcto, lo que se debe usar a niveles atómicos es la Mecánica Cuántica. El magnetismo en la materia es en general un fenómeno puramente cuántico y que tiene relación con el espín del electron. Al igual que en electrostática vimos que las moléculas de un material dieléctrico son levemente polarizadas ante la presencia de un campo eléctrico, y que entonces un material se caracteriza por una suma de infinitos momentos dipolares, también se puede definir un análogo magnético, el momento magnético. De todas formas, es algo que está presente en todos los átomos. ¿Por qué entonces, no toda la materia presenta esta cualidad de generar un campo magnético medible, como los objetos que hemos llamado **imanes** permanentes?. La respuesta es que, si bien cada átomo en un material contribuye generando un campo magnético, la

disposición de los momentos magnéticos puede ser tan aleatoria, que el efecto neto al sumarlos es una cancelación de un campo magnético total. Los imanes son materiales cuyos momentos magnéticos están todos alineados, y por esto es que cada uno contribuye del mismo modo a un campo magnético total que es el que medimos en la cercanía de un imán.

12.1. Fuerza magnética sobre una carga puntual

Aún no hemos establecido una expresión matemática para determinar el campo magnético generado por una distribución de cargas en movimiento. Sin embargo, por el momento podremos asumir que simplemente existe un campo magnético, $\vec{B}(\vec{x})$, en cierta región del espacio. Estudiaremos primero cual es el efecto de un campo magnético sobre una carga puntual q en movimiento, más adelante veremos cómo son creados los campos magnéticos. Consideremos una partícula de carga q, que se mueve con cierta velocidad $\vec{v}(\vec{x})$. Experimentalmente, se obtienen las siguientes observaciones

1. La magnitud de la fuerza magnética $\vec{F}_B(\vec{x})$ ejercida sobre la partícula cargada es proporcional a $\mid \vec{v}(\vec{x}) \mid$ y a q
2. La magnitud y dirección de $\vec{F}_B(\vec{x})$ depende de $\vec{v}(\vec{x})$ y de $\vec{B}(\vec{x})$
3. La fuerza magnética $\vec{F}_B(\vec{x})$ desaparece cuando $\vec{v}(\vec{x})$ es paralela a $\vec{B}(\vec{x})$. Sin embargo, cuando $\vec{v}(\vec{x})$ forma un ángulo ϑ con $\vec{B}(\vec{x})$, la dirección de $\vec{F}_B(\vec{x})$ es perpendicular al plano formado por $\vec{v}(\vec{x})$ y $\vec{B}(\vec{x})$, y la magnitud de $\vec{F}_B(\vec{x})$ es proporcional a $\sin\vartheta$
4. Cuando la carga cambia de signo, la dirección de la fuerza magnética se invierte



Todas las observaciones anteriores se pueden resumir en la siguiente expresión

$$\vec{F}_B(\vec{x}) = q\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

La magnitud de $\vec{F}_B(\vec{x})$ está dada por

$$F_B = |q|vB\sin\theta$$

La unidad en SI para $\vec{B}(\vec{x})$ es el **tesla** $T = 1\ N/Am$. Notar que $\vec{F}_B(\vec{x})$ es siempre perpendicular a $\vec{v}(\vec{x})$ y $\vec{B}(\vec{x})$, de forma que una fuerza magnética no puede alterar la rapidez de la particula. (No realiza trabajo sobre ella). En efecto

$$dW(\vec{x}) = \vec{F}_B(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = q(\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot \vec{v}(\vec{x})dt = q(\vec{v}(\vec{x}) \times \Big(\vec{v}(\vec{x})) \cdot \vec{B}(\vec{x})\Big)\, dt = 0$$

Si sobre la partícula sólo actúa una fuerza magnética, entonces el trabajo sobre ella es nulo, y entonces su energía cinética es constante. (Luego el módulo de la velocidad es constante). Sin

embargo,la dirección de $\vec{v}(\vec{x})$, sí puede ser alterada por la fuerza magnética. (De lo contrario, el movimiento de una carga en un campo magnético sería extremadamente aburrido, simplemente se movería en una línea recta)

12.2. Movimiento de una carga en un campo eléctrico y magnético uniforme

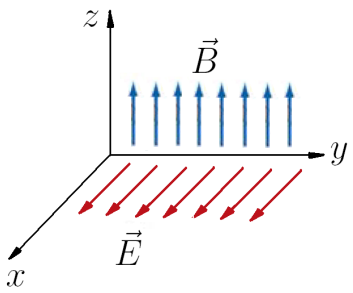
Una partícula de carga q se podría encontrar en una región del espacio en donde existen un campo magnético $\vec{B}$ y un campo eléctrico $\vec{E}$. Así, sobre ella actuará una fuerza neta igual a

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

esta es llamada **fuerza de Lorentz** . Ésto permite acoplar el electromagnetismo clásico con la mecánica, en efecto, la trayectoria de la partícula es la solución de la segunda ley de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Resolvamos el movimiento de una partícula sometida a la fuerza de Lorentz, en un caso **muy particular** y sencillo, como se muestra en la siguiente figura



Es decir, se tienen dos campos uniformes y perpendiculares $\vec{E} = E\hat{i}$, $\vec{B} = B\hat{k}$. Se debe resolver

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\left(E\hat{i} + \vec{v} \times B\hat{k}\right)$$

La velocidad de la partícula es, simplemente

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

de forma que

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{q}{m}\left(E\hat{i} - \dot{x}B\hat{j} + \dot{y}B\hat{i}\right)$$

De aquí se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la partícula

$$\ddot{z} = 0$$
$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$$
$$\ddot{x} = \left(\frac{qE}{m} + \dot{y}B\right)$$

Definiendo $\frac{qB}{m} = w_0$ y $\frac{qE}{m} = w_1$

$$\ddot{z} = 0$$
$$\ddot{y} = -w_0\dot{x}$$
$$\ddot{x} = w_1 + w_0\dot{y}$$

La solución de la primera de ellas es evidente, y está dada por

$$z(t) = z_0 + v_{oz}t$$

es decir, la partícula describe un movimiento uniforme en la dirección z . Las ecuaciones para la velocidad en x y en y están acopladas, y pueden ser escritas de forma matricial como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\dot{y}\\ \dot{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -w_0\\ w_0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{y}\\ \dot{x}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ w_1\end{pmatrix}$$

Es decir, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo de la forma

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}$$

Puede ser resuelto fácilmente de la siguiente manera

$$\dot{\vec{x}} - A\vec{x} = \vec{f}$$

$$e^{-At}\dot{\vec{x}} - e^{-At}A\vec{x} = e^{-At}\vec{f} = \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\vec{x}\right)$$

entonces

$$e^{-At}\vec{x} = \vec{x}_0 + \int_0^t d\tau e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)$$

Finalmente

$$\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0 + \int_0^t d\tau e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)$$

La solución homogénea es, simplemente

$$\vec{x}_h = e^{At}\vec{x}_0$$

donde x_0 corresponde a $\vec{x}(t=0)$. Para calcular e^{At} obtenemos los valores propios de A

$$\mid A - \lambda I \mid = \begin{vmatrix}-\lambda & -w_0\\ w_0 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + w_0^2 = 0$$

Están dados por

$$\lambda_1 = iw_0, \lambda_2 = -iw_0$$

Para encontrar e^{At} se puede utilizar el teorema de Caley-Hamilton (o simplemente diagonalizar A)

$$e^{At} = a_0 I + a_1 A$$

donde a_0 y a_1 están dados por

$$e^{iw_0 t} = a_0 + iw_0 a_1$$
$$e^{-iw_0 t} = a_0 - iw_0 a_1$$

Resolviendo

$$a_0 = \cos w_0 t$$
$$a_1 = \frac{1}{w_0} \sin w_0 t$$

Con esto

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos w_0 t & 0 \\ 0 & \cos w_0 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin w_0 t \\ \sin w_0 t & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos w_0 t & -\sin w_0 t \\ \sin w_0 t & \cos w_0 t \end{pmatrix}$$

y la solución homogénea queda

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0y} \cos w_0 t - v_{0x} \sin w_0 t \\ v_{0y} \sin w_0 t + v_{0x} \cos w_0 t \end{pmatrix}$$

Además, la solución particular toma la forma

$$\vec{x}_p(t) = \int_0^t d\tau \begin{pmatrix} \cos w_0(t-\tau) & -\sin w_0(t-\tau) \\ \sin w_0(t-\tau) & \cos w_0(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p(t) = \int_0^t d\tau \begin{pmatrix} w_1 \sin w_0(t-\tau) \\ w_1 \cos w_0(t-\tau) \end{pmatrix} = \frac{w_1}{w_0} \begin{pmatrix} \cos w_0(t-\tau) \\ -\sin w_0(t-\tau) \end{pmatrix} \Big|_0^t$$

$$\vec{x}_p(t) = \frac{w_1}{w_0} \begin{pmatrix} 1 - \cos w_0 t \\ \sin w_0 t \end{pmatrix}$$

Finalmente, se tiene

$$\dot{x} = v_{0y} \sin w_0 t + v_{0x} \cos w_0 t + \frac{w_1}{w_0} \sin w_0 t$$

$$\dot{y} = v_{0y} \cos w_0 t - v_{0x} \sin w_0 t + \frac{w_1}{w_0} (1 - \cos w_0 t)$$

Integrando, se obtiene la cinemática general para la partícula

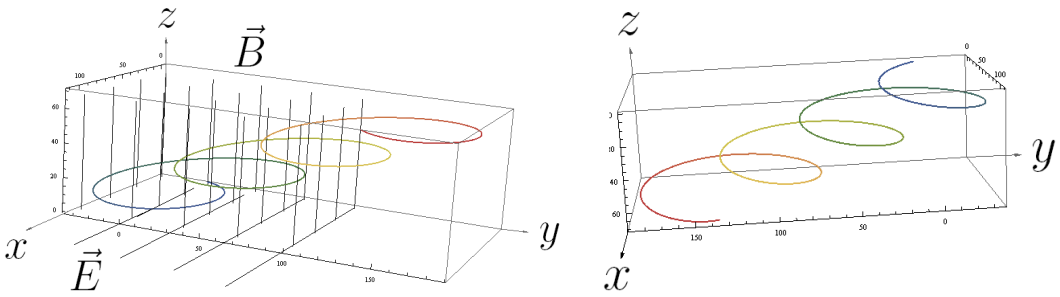
$$x(t) = -\frac{v_{0y}}{w_0}\cos w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0}\sin w_0 t - \frac{w_1}{w_0^2}\cos w_0 t + \frac{v_{0y}}{w_0} + \frac{w_1}{w_0^2} + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{w_0}\sin w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0}\cos w_0 t + \frac{w_1}{w_0}\left(t - \frac{1}{w_0}\sin w_0 t\right) - \frac{v_{0x}}{w_0} + y_0$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t$$

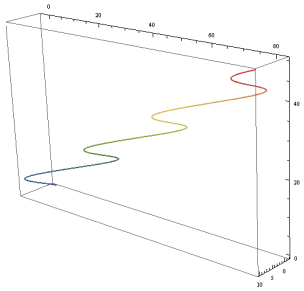
12.2.1. Trayectorias en casos particulares

Resuelta la ecuación de movimiento para la carga sometida a la fuerza de Lorentz, es posible graficar y obtener su trayectoria para distintas condiciones iniciales y magnitudes de los campos. La siguiente figura muestra una solución con $q = 10$ C, $B = 110$ T, $E = 200$ N/C, y $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (partícula que parte del origen)

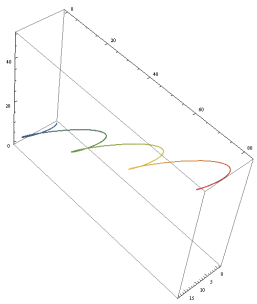


Solución con velocidad inicial en z distinta de cero

El movimiento en la dirección vertical (eje z) es uniforme. Notar que la partícula tiene una cierta velocidad de traslación en la dirección y, y no en la dirección x (dirección del campo eléctrico), como se podría pensar. La razón se debe a que si bien el campo eléctrico ejerce una fuerza según x con un incremento en la velocidad, ambos efectos se traducen en una fuerza magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ intensa en la dirección y. El efecto neto es una traslación general en dicha dirección



Misma solución anterior, ahora con velocidad inicial en x de 1 m/s



Trayectoria con velocidad inicial en y de 1 m/s

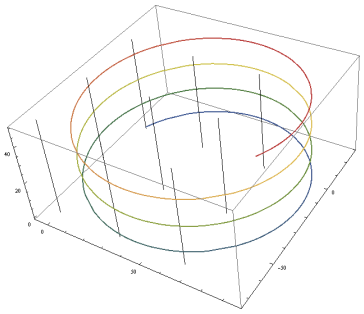
Ahora, ¿qué ocurre si el campo eléctrico es nulo?. Las soluciones quedan de la forma

$$x(t) = -\frac{v_{0y}}{w_0}\cos w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0}\sin w_0 t + \frac{v_{0y}}{w_0} + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{w_0}\sin w_0 t + \frac{v_{0x}}{w_0}\cos w_0 t - \frac{v_{0x}}{w_0} + y_0$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t$$

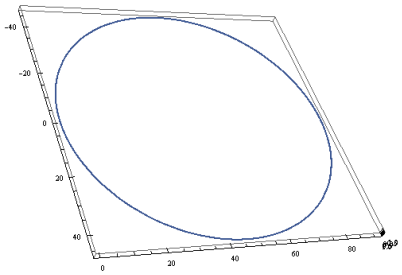
La partícula describe un **movimiento circular** en el plano $x - y$ (¿cuál sería el centro?), como se muestra en la figura



Este movimiento tiene una frecuencia angular de oscilación (constante) dada por

$$w_0 = \frac{qB}{m}$$

En particular, si la velocidad inicial en la dirección z es nula, la trayectoria es definitivamente una circunferencia en el espacio



Así, una partícula en un campo magnético uniforme describe una trayectoria circular en el plano perpendicular al campo magnético. Este movimiento circular es **uniforme** (frecuencia angular constante). Esto último es evidente pues el campo magnético nunca realiza trabajo sobre la partícula (y no modifica su energía cinética). Si v es el módulo de la velocidad, entonces se tiene

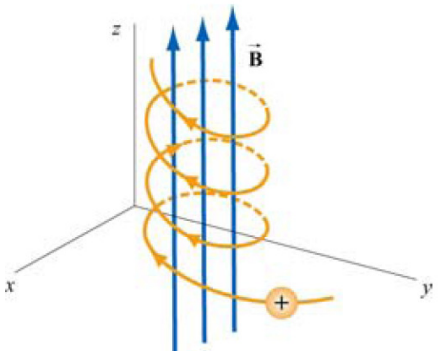
$$v = w_0 R$$

y el radio de la circunferencia descrita está dado por

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{w_0}$$

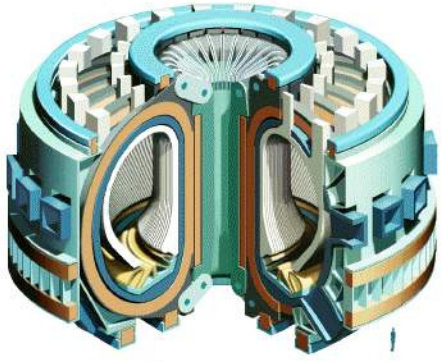
El período de este movimiento circular estará dado por

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi m}{qB}$$



Trayectoria general de una partícula en un campo magnético uniforme

Hay que notar que estas trayectorias han sido obtenidas a partir de campos extremadamente sencillos (uniformes). Muchísimos efectos interesantes se pueden lograr con campos que varían en el espacio. Uno de ellos consiste en un campo magnético con curvatura en que bajo ciertas condiciones se puede confinar a la partícula en determinadas regiones del espacio (espejos magnéticos). El confinamiento magnético parece ser la solución con más posibilidades de permitir en el futuro la construcción de un reactor de fusión nuclear de potencia con fines comerciales, la idea consiste en confinar un plasma a altas temperaturas lejos de las paredes del reactor, de forma de poder replicar procesos de fusión nuclear (por ejemplo, la fusión de Deuterio-Tritio)



Diseño de confinamiento de plasma utilizado en el International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER), en Francia

12.2.2. El descubrimiento del electrón

Notar que existe una solución muy particular al movimiento de una partícula bajo la acción de la fuerza de Lorentz cuando los campos son uniformes y perpendiculares. Resulta muy interesante que para un determinado valor de la velocidad $\vec{v}$ una partícula cargada no siente fuerza alguna. En efecto, supongamos una partícula cargada que ingresa a una región con prescencia de un campo eléctrico $\vec{E}$, y un campo magnético $\vec{B}$, si la velocidad inicial de tal partícula es

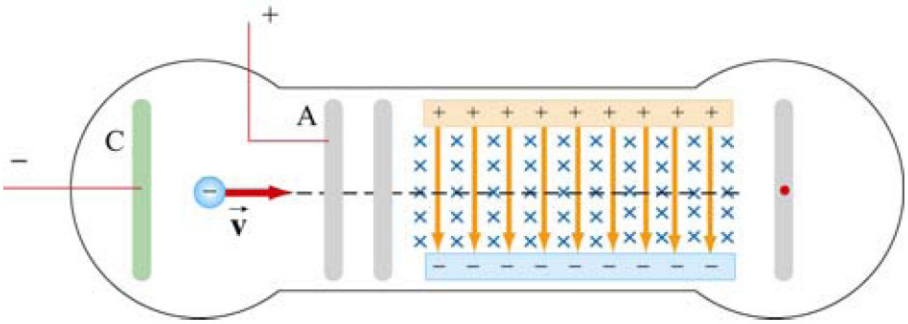
$$\vec{v} = \frac{1}{B^2}\vec{E} \times \vec{B}$$

entonces su trayectoria será una línea recta, con velocidad constante y en la dirección de $\vec{v}$. Esto es fácil de demostrar, pues la fuerza de Lorentz que actúa sobre la carga es

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = q\left(\vec{E} + \frac{1}{B^2}(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} - \frac{1}{B^2}\vec{B} \times (\vec{E} \times \vec{B})\right) = q\left(\vec{E} - \frac{1}{B^2}B^2\vec{E}\right) = \vec{0}$$

Este fue el principio utilizado por JJ Thompson para medir la razón entre la carga y la masa del electrón



Aparato de Thompson para estudiar la deflexión de partículas cargadas

La palabra *átomo* (que significa indivisible en Griego) fue propuesta por Demócrito, quien vivió en Atenas (460-370 ac). El consideraba inconcebible que los objetos materiales pudiesen ser divididos en partes cada vez más pequeñas, sin límite, y postuló la existencia de partículas elementales, tan pequeñas que no son posibles dividirlas en partes más pequeñas. El distinguió cuatro tipos de átomos, y propuso que toda la materia está conformada por estos objetos indivisibles. Hoy en día, la idea de Demócrito es transferida a partículas más pequeñas aún, que constituyen la estructura interna de los átomos, y se espera que los electrones, protones, y las demás partículas elementales sean realmente indivisibles.

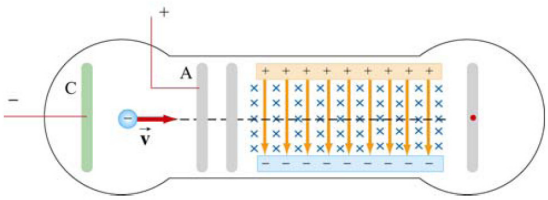
Hacia el siglo 19, la atención de muchos físicos fue puesta en el paso de la electricidad a través de los gases. Se sabía que los gases, siendo muy buenos aislantes eléctricos, a veces podían conducir electricidad al ser sometidos a tensiones muy altas. Sin embargo, Sir Williams Crookes mostró que el paso de la electricidad en gases tomaba una forma muy clara (en efecto, se ven haces de luz) cuando la presión del gas es reducida a una pequeña fracción de una atmósfera

Los tubos de Crookes emitían luz de determinado color dependiendo de la naturaleza del gas, y ellos aún brillan en las calles y ciudades de todo el mundo



Tubo de Crooke. Éste consiste de un ánodo y un cátodo entre los cuales se establece una diferencia de potencial, al interior se tiene gas a baja presión

Al colocar un imán cerca del tubo, Crookes observó la deflección de estos *rayos catódicos*, tal cual sucede con las partículas cargadas. Al mismo tiempo, Jean Perrin en Francia descubrió que al colocar una placa metálica en el camino del haz, ésta adquiría una carga eléctrica negativa. Todo esto parecía indicar que estos rayos se trataban de partículas cargadas negativamente moviéndose a través del gas. Sin embargo, esta idea eran opuestas a las observaciones del físico Philipp Lenard, quien habría encontrado que los rayos catódicos eran capaces de traspasar varias pantallas puestas en su camino sin dejar agujeros en ellas. Lenard pensaba que sólo ondas, y no un haz de partículas, podría hacer esto. La tarea de resolver estas contradicciones experimentales, y probar que los rayos catódicos son en efecto un haz de partículas, y encontrar las características físicas de éstas particulas, le fue dada a Joseph John Thompson por el Consejo Supremo del progreso de la ciencia. Thompson fue un físico nacido en Manchester, que a los 40 años era director del famoso laboratorio de Cavendish en Cambridge. Asumiendo que los rayos catódicos son partículas moviendose a alta velocidad, Thompson decidió medir su masa y su carga, y una parte de esta investigación consistió en observar la deflexión de rayos catódicos en un campo magnético



Los electrones con carga $-e$ y masa m son emitidos del cátodo C y acelerados hacia A. Sea la diferencia de potencial entre C y A $\Delta V = \phi_a - \phi_c$. El cambio en la energía potencial del electrón es igual al trabajo externo realizado para acelerarlo, por conservación de energía, la energía cinética adquirida está dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V$$

y entonces la velocidad que adquieren los electrones al pasar por A es

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}$$

A continuación los electrones entran en una región donde existe un campo eléctrico (hacia abajo en la figura), y un campo magnético perpendicular (hacia adentro de la hoja). Si las partículas ingresan con velocidad

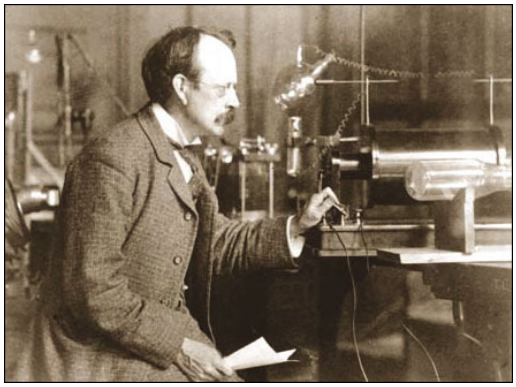
$$\vec{v} = \frac{1}{B^2}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E}{B}\hat{i}$$

se moverán en una línea recta, y pasarán por un agujero (en rojo) al final del selector de velocidades. Así, se ajusta el valor de ΔV, E y B de forma que las partículas sean detectadas al final del selector de velocidades. Cuando esto sucede, se obtiene

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2\Delta V B^2}$$

Al medir E, B y ΔV, se obtiene la razón entre la carga y la masa del electrón. Esta es aproximadamente

$$\frac{e}{m} = 1{,}7588 \times 10^{11} C/kg$$

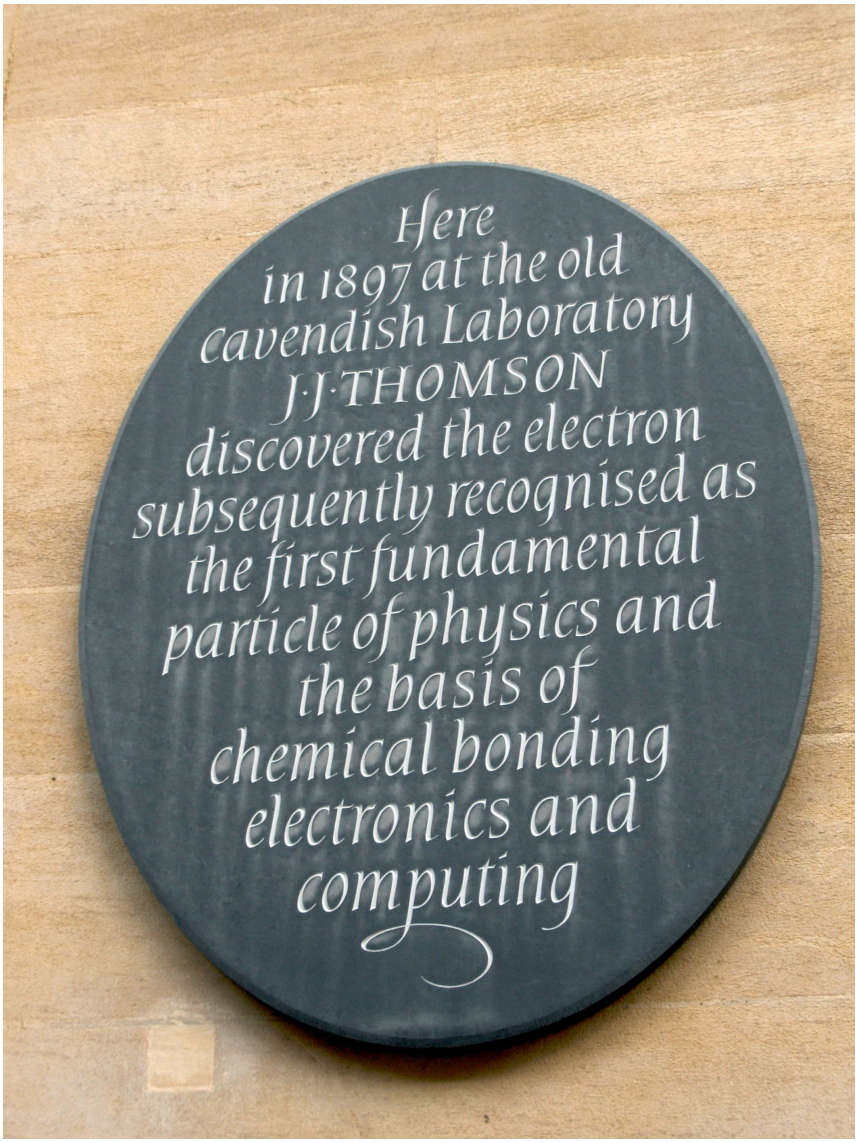


Sir J.J. Thompson y sus aparatos

En esa fecha el valor de e habría sido obtenido experimentalmente gracias a los experimentos de electrólisis de líquidos de Faraday. De todas formas Thompson realizó un experimento especial para medir la carga con gases ionizados. Este método se basó en el descubrimiento de otro físico del laboratorio Cavendish, C.T.R Wilson. Gracias a esto Thompson logró medir el valor de m, usando sus resultados para e/m, obteniendo

$$m = 9,11 \times 10^{-31} kg$$

y esta resultó ser 1840 veces más pequeña que la masa del átomo de Hidrógeno. Ésto fue un gran descubrimiento, una partícula aproximadamente 2 mil veces más liviana que el átomo más liviano! Thompson concluyó que las partículas que conforman los rayos catódicos eran cargas eléctricas, y les llamó electrones. El visualizó el átomo como una esfera de un material masivo cargado positivamente, con pequeños electrones esparcidos estáticamente a través del núcleo



Placa conmemorativa en Cambridge acerca del descubrimiento del electrón. Cortesía de mi amigo Germán Vogel

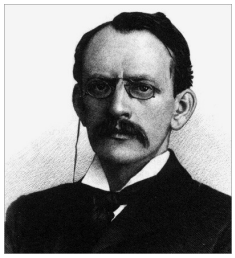


Fig. 12.1: Joseph John Thompson

Joseph John Thompson(1856-1940) Físico Inglés. En 1870 estudió Ingeniería en la Universidad de Manchester, y se trasladó a Trinity College de Cambridge en 1876. En 1884 se convirtió en profesor de Física en Cavendish. Uno de sus alumnos fue Ernest Rutherford, quién más tarde sería su sucesor en el puesto. Obtuvo el Premio Nobel en 1906, *en reconocimiento de los grandes méritos de sus investigaciones teóricas y experimentales en la conducción de la electricidad generada por los gases*. Fue nombrado caballero en 1908 y nombrado en la Orden del Mérito en 1912. En 1918 fue nombrado Rector del Trinity College de Cambridge, donde permaneció hasta su muerte.

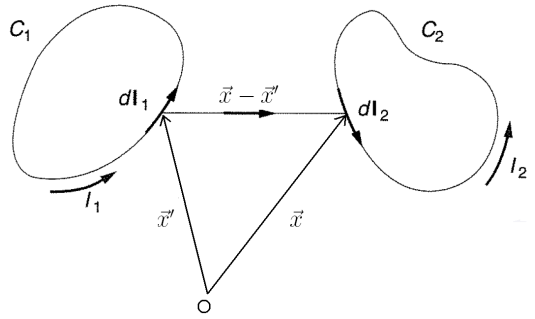
12.3. Ley de Biot-Savart

Hemos descrito rápidamente la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada en un campo magnético. Experimentalmente, resulta mucho más accesible estudiar que ocurre cuando se acercan dos conductores rígidos (es decir, son mantenidos en su posición) con corriente (dado que en ellos hay muchísimos electrones en movimiento, los efectos magnéticos ser amplifican). Consideremos una curva Γ en el espacio, que representa un conductor lineal que lleva una corriente I. Vamos a recorrer esta curva en el **sentido de la corriente**. En el punto $\vec{x} \in \Gamma$, definimos un **elemento de corriente** infinitesimal dado por

$$d\vec{I}(\vec{x}) = Id\vec{x}$$

donde I es la magnitud de la corriente (es una constante) y $d\vec{x}$ es el elemento de línea sobre la curva Γ (Insisto en que su dirección apunta en el sentido de la corriente) .

Sean dos circuitos lineales, Γ_1 y Γ_2, con corrientes I_1 e I_2, respectivamente. Ambas curvas serán parametrizadas de forma de ser recorridas en el sentido de sus respectivas corrientes



Tomamos un elemento de corriente en $\vec{x}'$ sobre el circuito 1, y un elemento de corriente en $\vec{x}$ sobre el circuito 2. La fuerza que ejerce el elemento de corriente 1 sobre el elemento de corriente 2 está dada por

$$d\vec{F}_2(\vec{x}) = I_2 d\vec{x} \times \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}\right)$$

donde $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ (H/m) es la **permeabilidad del vacío**. Notar que esta impresionante expresión es mucho más compleja que la ley de Coulomb, primero que nada, implica 2 productos vectoriales. Es importante notar además que la fuerza resultante ya no apunta necesariamente en la dirección que une ambos elementos de línea (No es una fuerza Central). Lo que sí se sigue cumpliendo es que la magnitud de la fuerza decae según el cuadrado de la distancia. Ahora bien, podemos obtener la fuerza que ejerce todo el circuito 1 sobre el elemento de línea 2, utilizando el **principio de superposición**, e integrando como sigue

$$\vec{F}_2 = I_2 d\vec{x} \times (\oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3})$$

Finalmente, la fuerza total sobre el circuito 2 está dada por

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}\right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{x} \times [d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')]}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Aparentemente esta fórmula presenta una asimetría y podría pensarse que no se satisface la tercera ley de Newton. Sin embargo, se puede demostrar que esta ley es absolutamente simétrica, de forma que

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

La demostración es la siguiente

$$\frac{d\vec{x} \times [d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')]}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = \frac{[d\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')]d\vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} - \frac{(d\vec{x} \cdot d\vec{x}')\,(\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\frac{d\vec{x}' \times [d\vec{x} \times (\vec{x} - \vec{x}')]}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = -d\vec{x}' \left(d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right) - d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

El término de la izquierda es una diferencial exacta, de forma que

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} d\vec{x}' \oint_{\Gamma_2} d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} d\vec{x} \cdot d\vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Hemos obtenido una identidad para la fuerza que ejerce el circuito 1 sobre el circuito 2 que es totalmente **simétrica**. De aquí es evidente que

$$F_1 = -F_2$$

12.3.1. Campo de un circuito rígido, Biot-Savart

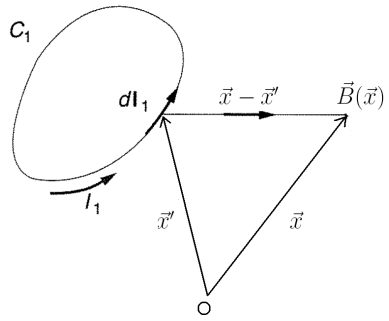
Hemos concluído que la fuerza sobre el circuito 2 es

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} \right)$$

es fácil ver que la expresión entre paréntesis no depende en absoluto del circuito 2, es de hecho, un campo vectorial $\vec{B}(\vec{x})$,

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

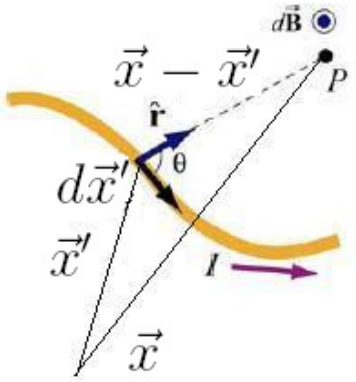
$\vec{B}_{\vec{x}}$ es el **Campo Magnético en $\vec{x}$ debido a la corriente** I_1



Es decir

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{I_1 d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

De esto podemos leer que el campo magnético en cualquier punto $\vec{x}$ debido a ésta corriente se puede calcular al sumar las contribuciones infinitesimales $d\vec{B}(\vec{x})$, de pequeños segmentos de conductor $d\vec{x}$



Esta es la **ley de Biot-Savart**, y da una expresión para la contribución al campo magnético de un elemento de corriente $Id\vec{x}$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$



Fig. 12.2: Jean Baptiste Biot

Jean Baptiste Biot (1774-1862) Físico y matemático Francés. Estudió la polarización de la luz cuando pasaba a través de soluciones químicas, y las relaciones entre la corriente eléctrica y el magnetismo. La Ley de Biot-Savart describe como se genera el campo magnético mediante una corriente estacionaria y se proporcionó el nombre gracias a su colaboración con Félix Savart. Un cráter en la luna lleva su nombre en honor a sus contribuciones

12.4. Fuerza sobre conductores de corriente

Habíamos obtenido que la fuerza sobre un circuito con corriente I_2 es

$$\vec{F}_2 = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Donde $\vec{B}(\vec{x})$ es cualquier campo magnético externo

Esto nos dice que para un conductor de forma arbitraria, la fuerza magnética se puede obtener al sumar sobre las fuerzas actuando sobre pequeños segmentos que constituyen al conductor. Sea un segmento diferencial denotado por $d\vec{x}$

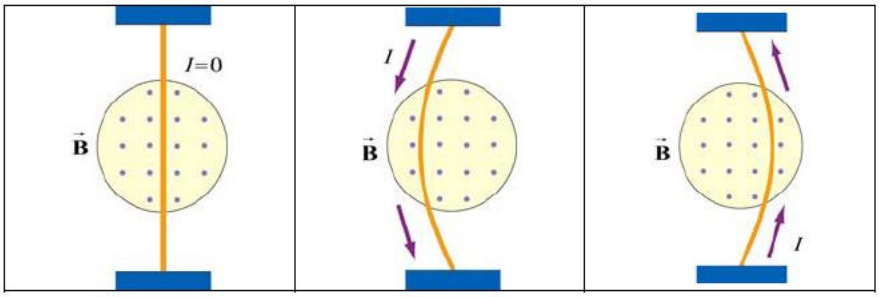
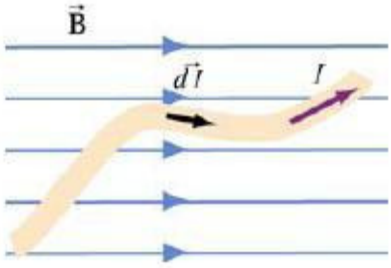


Fig. 12.3: La figura ilustra el efecto de la fuerza magnética sobre conductores



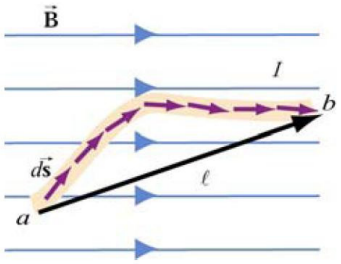
Entonces la fuerza sobre un elemento infinitesimal de un conductor de carga es

$$d\vec{F}_B(\vec{x}) = Id\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

Anteriormente calculamos la fuerza sobre un conductor definido por una curva cerrada. Si se desea encontrar la fuerza sobre un segmento de conductor entonces

$$\vec{F}_B = I \int_a^b d\vec{x} \times \vec{B}(\vec{x})$$

donde a y b representan los extremos del conductor. Como ejemplo, consideremos un conductor curvo que lleva corriente I y sumergido en un campo magnético **uniforme** $\vec{B}$, como se muestra en la figura



Tenemos entonces que la fuerza sobre este conductor está dada por

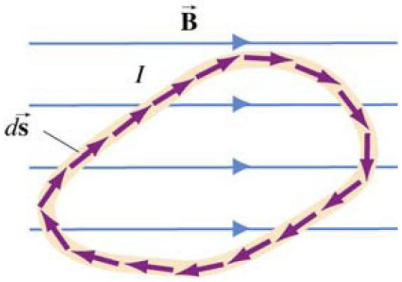
$$\vec{F}_B = I(\int_a^b d\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) = I\,(\vec{x}_b - \vec{x}_a) \times \vec{B}(\vec{x})$$

Notar que esto se debe a que el campo magnético es uniforme (sólo en este caso!). Sea $\vec{l} = \vec{x}_b - \vec{x}_a$ el vector dirigido desde a hacia b. Con esta notación

$$\vec{F}_B = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Ahora veamos que sucede si el conductor constituye un circuito cerrado de forma arbitraria, entonces la fuerza será

$$\vec{F}_B = I\left(\oint_\Gamma d\vec{x}\right) \times \vec{B}$$



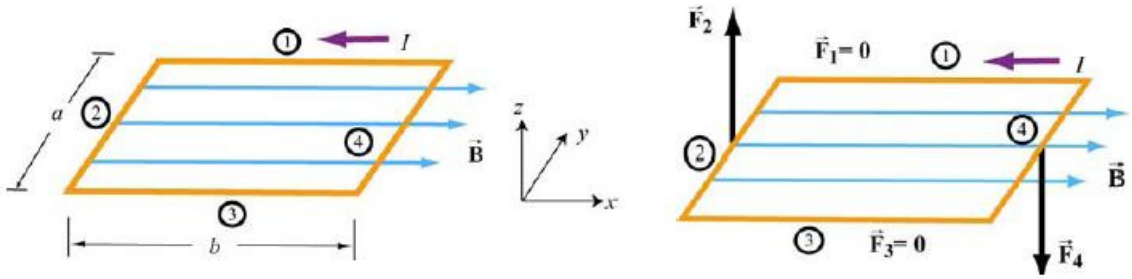
Pero

$$\oint_\Gamma d\vec{x} = \vec{0}$$

La fuerza magnética neta sobre un circuito cerrado en un campo magnético **uniforme** es $\vec{F}_B = \vec{0}$

12.5. Torque sobre una espira

Veamos qué sucede cuando colocamos una espira rectangular que lleva corriente estacionaria I en el plano XY, ante la prescencia de un campo magnético uniforme $\vec{B}(\vec{x}) = B\hat{i}$ paralelo al plano de la espira



Vemos que las fuerzas magnéticas actuando en los segmentos 1 y 3 son nulas debido a que los vectores $\vec{l}_1 = -b\hat{i}$ y $\vec{l}_3 = b\hat{i}$ son paralelos al campo magnético $\vec{B}$. Por otro lado, las fuerzas magnéticas actuando en los segmentos 2 y 4 son

$$\vec{F}_2 = I\left(-a\hat{j}\right) \times B\hat{i} = IaB\hat{k}$$

$$\vec{F}_4 = I\left(a\hat{j}\right) \times B\hat{i} = -IaB\hat{k}$$

De aquí es claro que la fuerza neta es 0, algo que era de esperar por lo visto anteriormente. Sin embargo, aun cuando la fuerza neta sobre la espira es nula, las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ producirán un torque que genera una rotación de la espira con respecto al eje y. El torque con respecto al centro de la espira es

$$\vec{\tau}_c = \left(-b/2\hat{i}\right) \times \vec{F}_2 + \left(b/2\hat{i}\right) \times \vec{F}_4 = (-b/2)\hat{i} \times \left(IaB\hat{k}\right) + (b/2\hat{i}) \times \left(-IaB\hat{k}\right)$$

$$\vec{\tau}_c = \left(\frac{IabB}{2} + \frac{IabB}{2}\right)\hat{j} = IabB\hat{j} = IAB\hat{j}$$

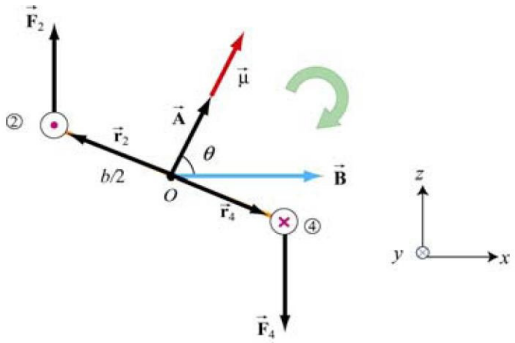
Donde $A = ab$ representa el área de la espira. Es conveniente introducir el vector de área, en este caso constante sobre la superficie limitada por la espira

$$\vec{S} = A\hat{n}$$

con $\hat{n}$ el vector unitario en la dirección normal al plano de la espira. En este caso, tenemos $\hat{n} = \hat{k}$. La expresión para el torque se puede reescribir entonces como

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

Consideremos ahora el caso más general donde la espira (o el vector de area $\vec{S}$) forma un ángulo ϑ con respecto al campo magnético



De la figura

$$\vec{r}_2 = \frac{b}{2}\left(-\sin\vartheta\hat{i} + \cos\vartheta\hat{k}\right) = -\vec{r}_4$$

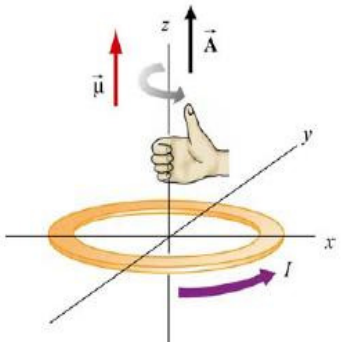
y el torque neto es

$$\hat{\tau}_c = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = 2\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 2\frac{b}{2}\left(-\sin\vartheta\hat{i} + \cos\vartheta\hat{k}\right) \times (IaB\hat{k})$$

$$\hat{\tau}_c = IabB\sin\vartheta\hat{j} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

Se obtiene la misma expresión obtenida anteriormente. Notar que la magnitud del torque es máxima cuando el vector normal a la espira es perpendicular al campo magnético. El torque es nulo cuando la normal a la espira está orientada en la dirección paralela al campo magnético. El vector $I\vec{A}$ es, por definición, el **momento magnético** de la espira

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$



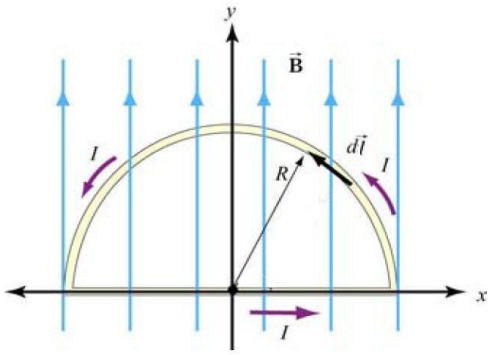
La dirección de $\vec{\mu}$ es la misma que el vector de área $\vec{S}$ (perpendicular al plano de la espira). Con esto, el torque sobre una espira de corriente es

$$\vec{\tau}_c = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Una espira en un campo magnético uniforme experimenta un torque hasta que su momento magnético esté completamente alineado con el campo magnético. Notar la analogía con el torque que ejerce un campo eléctrico sobre un dipolo. En efecto, es posible definir un momento magnético para una distribución general de corriente en el espacio. Así, cada átomo en un material estará caracterizado por un momento magnético, y el efecto de un campo magnético sobre el material será el de alinear los momentos magnéticos de forma paralela al campo. Estos momentos magnéticos alineados (como sucede en un imán) también generarán un campo magnético

Problema

Considere el circuito cerrado de la figura que lleva una corriente I en el sentido contrario al reloj. Un campo magnético uniforme apuntando en la dirección $\hat{j}$ es aplicado. Encuentre la fuerza magnética que actúa sobre el elemento rígido y el arco semicircular.



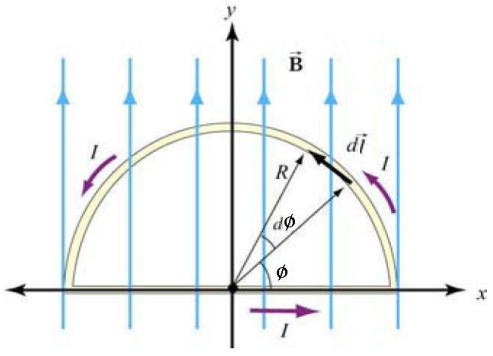
Solución

Tenemos un campo uniforme dado por $\vec{B} = B\hat{j}$, llamemos $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ a las fuerzas actuando sobre el segmento rígido y la parte semicircular, respectivamente. La fuerza sobre el segmento rígido es

$$\vec{F}_1 = I\left(\int_{-R}^{R} \vec{dx}\right) \times B\hat{j} = I\left(\int_{-R}^{R} dx\right)\hat{i} \times B\hat{j} = I2R\hat{i} \times B\hat{j} = 2IRB\hat{k}$$

Ahora, para calcular $\vec{F}_2$, notamos que elemento infinitesimal $d\vec{x}$ en el semicírculo se puede escribir como

$$d\vec{x} = dx\hat{e}_\varphi = Rd\varphi(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j})$$



La fuerza que actúa sobre un elemento $\vec{dx}$ es

$$d\vec{F}_2 = Id\vec{x} \times \vec{B} = IRd\varphi\left(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\right) \times (B\hat{j}) = -IBRd\varphi\sin\varphi\hat{k}$$

Integrando sobre el arco semicircular, tenemos

$$\vec{F}_2 = -IBR\hat{k}\int_0^\pi d\varphi\sin\varphi = -2IBR\hat{k}$$

Así, la fuerza neta que actúa sobre el circuito completo es

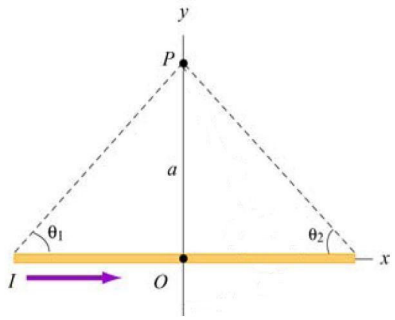
$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Consistente con el hecho de que la fuerza sobre un circuito cerrado en un campo magnético uniforme es siempre nula

Problema

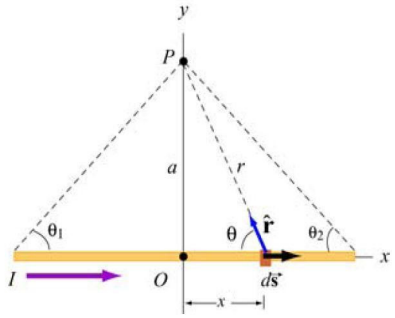
Un alambre delgado y rígido que lleva una corriente I es colocado a lo largo del eje x. Calcular el campo magnético en el punto P. Analice el caso particular en que el alambre es simétrico con respecto al eje y

¿Qué sucede cuando $L \to \infty$?



Solución

Consideremos un elemento diferencial $d\vec{x}' = dx\hat{i}$ que lleva una corriente I en la dirección x



Para calcular el campo magnético en el punto P utilizamos la ley de Biot-Savart. Según nuestra elección del origen, se tiene $\vec{x} = a\hat{j}$ y $\vec{x}' = x\hat{i}$. Así

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = a\hat{j} - x\hat{i}$$

y su magnitud es

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Con esto, la contribución al campo queda

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx\hat{i} \times \left(a\hat{j} - x\hat{i}\right)}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{adx\hat{k}}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Y el campo total en P será

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L_1}^{L_2} \frac{adx\hat{k}}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Notar además que

$$\tan\vartheta_1 = \frac{a}{L_1} \rightarrow tan(-\vartheta_1) = -\frac{a}{L_1} \rightarrow -L_1 = acot(-\vartheta_1)$$

$$\tan\vartheta_2 = \frac{a}{L_2} \rightarrow L_2 = a\vartheta_2$$

Para resolver esta integral, utilizamos el siguiente gambito

$$x = actg\vartheta \rightarrow dx = -a\csc^2\vartheta d\vartheta$$

y la integral queda

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta a(-a\csc^2\vartheta)\hat{k}}{(a^2 + a^2 ctg^2\vartheta)^{3/2}}$$

Ahora nos comemos a la reina

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi a} I \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{-d\vartheta\csc^2\vartheta\hat{k}}{(1 + ctg^2\vartheta)^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi a} I \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \sin\vartheta\hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\right) \hat{k}$$

En el caso simétrico en que $\vartheta_2 = \vartheta_1$, y digamos que el largo total es $2L$, entonces

$$cos\vartheta_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$$

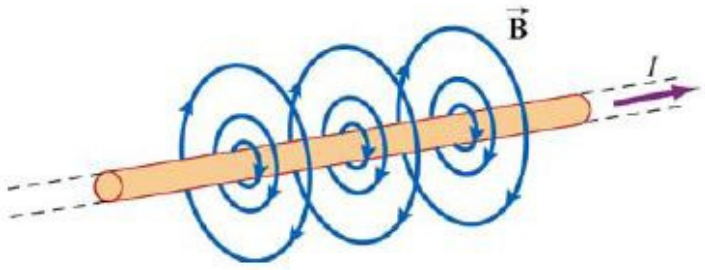
y el campo es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} \hat{k}$$

De aquí es claro que si $L \rightarrow \infty$, o , equivalentemente, $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow 0$, el campo magnético a una distancia a del conductor es

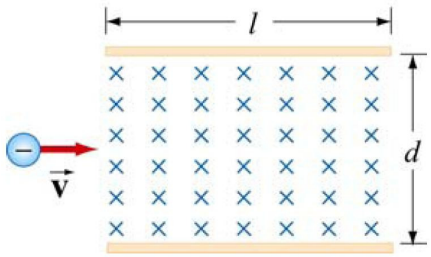
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{k}$$

Notemos que en este límite, el sistema posee simetría cilíndrica, y las líneas de campo magnético son circulares. Este resultado se comprobará más adelante con la ley de Ampère



Problema

Se lanza un electrón (carga -e) con velocidad inicial $\vec{v}$ en el medio de dos placas entre las cuales existe un campo mangético $\vec{B}$ constante (entrando a la hoja). Ignore todo efecto gravitacional
a) ¿Hacia dónde se deflecta la trayectoria?
b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad si la partícula choca exactamente con el fin de la placa?



Solución

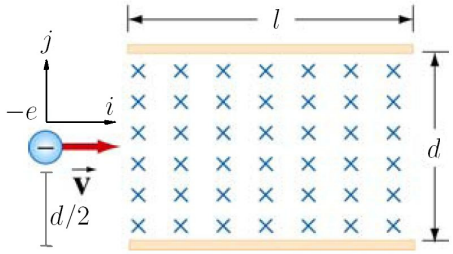
La fuerza de Lorentz es la unión entre el electromagnetismo y la mecánica, y en general una partícula de carga q en prescencia de campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ está sometida a una fuerza

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula. En este caso, $q = -e$, y el campo eléctrico es nulo. De esta forma

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Dado que la velocidad inicial con que incide el electrón es perpendicular al campo magnético, la trayectoria será una circunferencia en el plano $x - y$ (siempre y cuando la partícula esté contenida en la región donde existe campo magnético)



Para analizar hacia donde se deflectará la partícula, basta con analizar que ocurre en el instante inicial $t = 0$

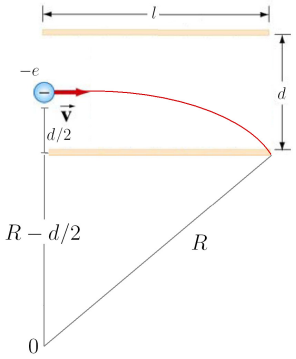
$$\vec{v}(0) \times \vec{B} = v\hat{i} \times -B\hat{k} = vB\hat{j}$$

Luego en $t = 0$ la fuerza es

$$\vec{F}(0) = -evB\hat{j}$$

Es decir, la partícula se deflecta hacia abajo

b) Dado que el electrón impacta con el extremo derecho de la placa inferior, la trayectoria de la partícula es la siguiente



La magnitud de la fuerza magnética sobre el electrón es constante y dada por

$$| \vec{F} |= evB$$

y su dirección es radial (apuntando hacia el centro de curvatura). Por dinámica circular, se tendrá

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

luego

$$R = \frac{mv}{eB}$$

por otro lado, se tiene

$$l^2 + \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 = R^2$$

$$l^2 + R^2 - Rd + \frac{d^2}{4} = R^2$$

$$R = \frac{l^2}{d} + \frac{d}{4}$$

entonces

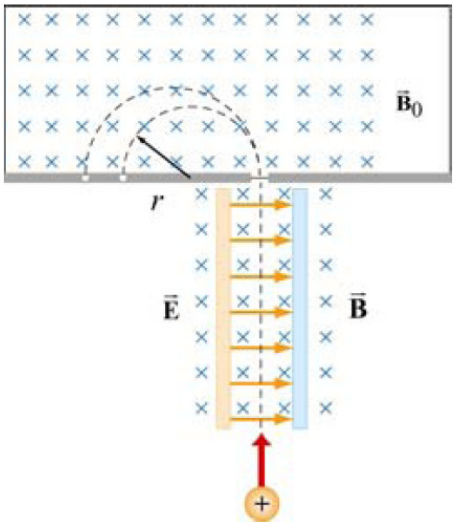
$$\frac{mv}{eB} = \frac{l^2}{d} + \frac{d}{4}$$

y el módulo de la velocidad del electrón resulta ser

$$v = \frac{eB}{m}\left(\frac{l^2}{d} + \frac{d}{4}\right)$$

Problema

En la figura se muestran los componentes escenciales de un espectrómetro de masas. Éste es utilizado para medir la masa de partículas cargadas. En una fuente se produce un ión de masa m y carga q, el cual parte del reposo y es acelerado por una diferencia de potencial ΔV, entrando a un proceso de selección, donde hay un campo magnético $\vec{B}$ uniforme (entrando a la hoja), y un campo eléctrico deflector $\vec{E}$. Sólo partículas con velocidad $\vec{v}$ constante abandonan el selector (es un selector de velocidades). Las partículas emergentes entran a una segunda región donde existe otro campo magnético $\vec{B}_0$ (entrando a la hoja), la partícula sigue una trayectoria circular y se estrella en un detector a distancia $2r$ del punto de entrada



a) Encuentre la velocidad $\vec{v}$
b) Encuentre el campo $\vec{B}$
c) Finalmente, encuentre la masa m de la partícula

Solución

a) La velocidad v con que el ión entra al selector se obtiene por conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

donde el cambio en energía potencial se traduce en un aumento en la energía cinética

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}\hat{j}$$

b) Para que la velocidad de la partícula permaneza constante y salga a través del selector, se requiere que la fuerza de Lorentz actuando sobre ella sea nula. Se tiene

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

donde $\vec{E} = E\hat{i}$, $\vec{B} = -B\hat{k}$, $\vec{v} = v\hat{j}$

$$qE\hat{i} - qv\hat{j} \times B\hat{k} = 0$$

$$qE\hat{i} - qvB\hat{i} = 0 \rightarrow qE = qvB$$

y entonces

$$B = \frac{E}{v} = E\sqrt{\frac{m}{2q\Delta V}}$$

c) Luego de ingresar a la región de campo magnético $\vec{B}_0$, la partícula describe una circunferencia de radio r. La magnitud de la fuerza magnética es qvB_0. Por dinámica circular

$$qvB_0 = m\frac{v^2}{r}$$

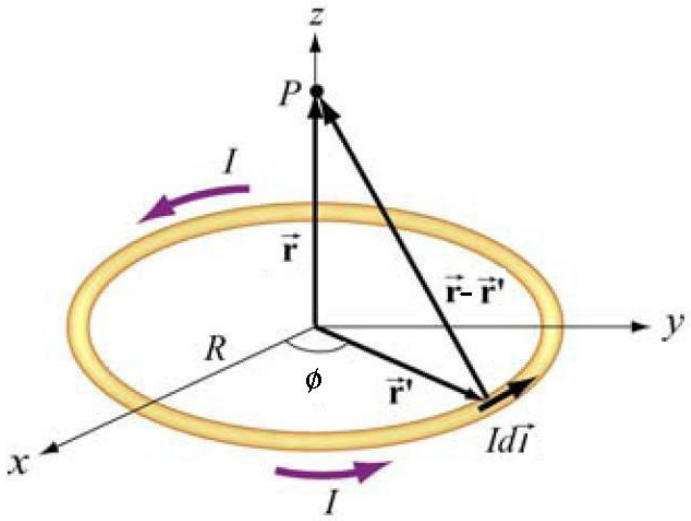
$$qB_0 = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

Finalmente

$$m = \frac{qB_0^2r^2}{2\Delta V}$$

Problema

Considere una espira circular que lleva corriente I en el sentido indicado por la figura. Calcule el campo magnético a una distancia z en el eje de simetría de la espira



Solución

Utilizando la ley de Biot-Savart para un elemento infinitesimal de la espira

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

en este caso, tenemos

$$\vec{x}' = R\left(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}\right) = R\hat{r}(\phi)$$

$$d\vec{x}' = Rd\phi\left(-\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\phi + \hat{j}\cos\phi\right) = Rd\phi\hat{\phi}$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = z\hat{k} - \left(R\cos\phi\hat{i} + R\sin\phi\hat{j}\right) = -\hat{i}R\cos\phi - \hat{j}R\sin\phi + \hat{k}z$$

y

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

Así

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{Rd\phi\left(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi\right) \times \left(-\hat{i}R\cos\phi - \hat{j}R\sin\phi + \hat{k}z\right)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = d\phi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(R^2\sin\phi^2\hat{k} + Rz\sin\phi\hat{j} + R^2\cos\phi^2\hat{k} + Rz\cos\phi\hat{i})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{B}(\vec{x}) = d\phi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(R^2\hat{k} + Rz\sin\phi\hat{j} + Rz\cos\phi\hat{i})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Con esto

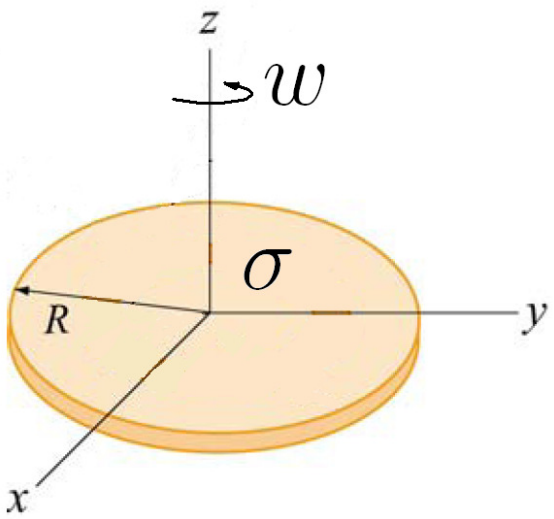
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{(R^2\hat{k} + Rz\sin\phi\hat{j} + Rz\cos\phi\hat{i})}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Las integrales según $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son cero, como era de esperarse por argumentos de simetría. Finalmente el campo magnético a una distancia z del anillo es

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Problema

Considere un disco muy delgado que tiene una densidad de carga superficial σ uniformemente distribuída. El disco se pone a girar a velocidad angular w en torno a su eje. Encuentre el campo magnético en el eje del disco

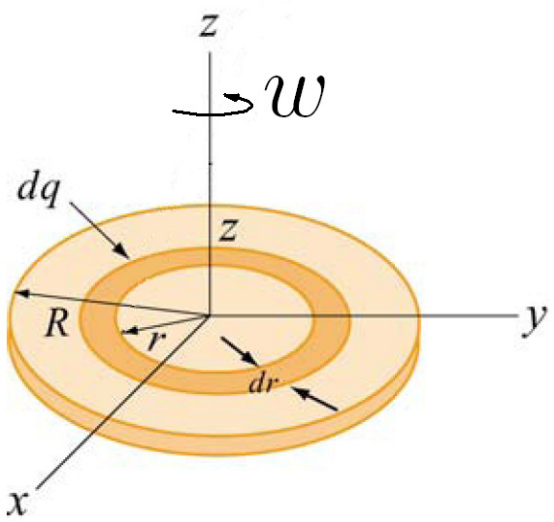


Solución

Se tiene una distribución de carga en movimiento (en efecto es una distribución de corriente), de forma que ésta generará sin duda un campo magnético. Anteriormente se determinó el campo magnético en el eje de un anillo de radio r con corriente I, esto es

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Podemos ver el disco como una superposición de anillos con corriente de ancho infinitesimal dr, de esta forma por el principio de superposición el campo magnético total será la suma de las contribuciones de estos anillos. Veamos que ocurre en la porción de disco comprendida entre r y $r + dr$, con $r \in (0, R)$



La carga contenida en este anillo es

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

la rotación le asocia a este anillo una corriente.

La carga dq da una vuelta completa en un tiempo

$$\Delta t = \frac{2\pi}{w}$$

luego la corriente asociada es

$$dI = \frac{dq}{\Delta t} = \frac{w\sigma 2\pi r dr}{2\pi} = \sigma w r dr$$

el campo magnético a una distancia z sobre el eje del disco generado por este anillo es

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 dI r^2}{2(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{k} = \frac{dr\mu_0 w\sigma r^3}{2(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Entonces el campo total es

$$\vec{B}(z) = \int_0^R \frac{dr\mu_0 w r^3\sigma}{2(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{k} = \frac{\mu_0 w\sigma}{2}\int_0^R \frac{drr^3}{(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Realizando el cambio de variable

$$u^2 = z^2 + r^2, 2udu = 2rdr$$

$$\int \frac{drr^3}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \int \frac{duu(u^2-z^2)}{u^3} = \int du\left(1 - \frac{z^2}{u^2}\right)$$

$$\int \frac{drr^3}{(z^2+r^2)^{3/2}} = u + \frac{z^2}{u} = \sqrt{z^2+r^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

De esta forma

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 w\sigma}{2}\left(\sqrt{z^2+r^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)\Big|_0^R \hat{k}$$

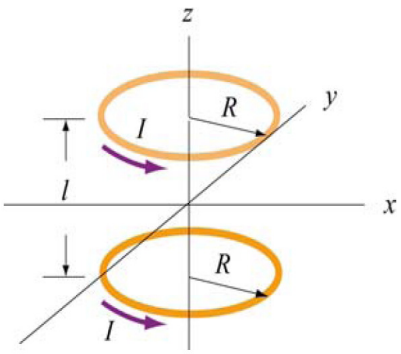
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 w\sigma}{2}\left(\sqrt{z^2+R^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - \sqrt{z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{z^2}}\right)\hat{k}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 w\sigma}{2}\left(\sqrt{z^2+R^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - 2\mid z\mid\right)\hat{k}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 w\sigma}{2}\left(\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - 2\mid z\mid\right)\hat{k}$$

Problema

Considere dos bobinas de N vueltas de radio R, cada una perpendicular al eje de simetría, con sus centros localizados en $z = l/2$ y $z = -l/2$. Existe una corriente constante I en el mismo sentido en cada bobina, como se muestra en la figura. Encuentre el campo magnético en el eje a una distancia z del centro de una de las bobinas. Verifique que la primera derivada del campo en el punto medio es nula.



Solución

Del problema anterior, tenemos que para una espira circular con corriente I, radio R y a una distancia z de su centro, el campo en el eje de simetría es

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Como una bobina consta de N espiras circulares separadas por una distancia despreciable con respecto a z, podemos utilizar el principio de superposición y obtener el campo provocado por una bobina de N vueltas

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 NI}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Ahora, sea un punto en el eje, a una distancia z del origen, el campo provocado por la bobina de abajo es

$$\vec{B}_1(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 NI}{2}\frac{R^2}{(R^2+(z+l/2)^2)^{3/2}}\hat{k}$$

y el campo generado por la bobina de arriba

$$\vec{B}_2(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 NI}{2}\frac{R^2}{(R^2+(z-l/2)^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Y el campo magnético total, por el principio de superposición

$$\vec{B}(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left(\frac{1}{(R^2+(z-l/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2+(z+l/2)^2)^{3/2}}\right)\hat{k}$$

Notemos que la primera derivada con respecto a z está dada por

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2}\left(-\frac{3(z-l/2)}{((z-l/2)^2+R^2)^{5/2}} - \frac{3(z+l/2)}{((z+l/2)^2+R^2)^{5/2}}\right)$$

Se puede notar de inmediato que en el punto medio $z = 0$ se tiene

$$\frac{dB}{dz}\Big|_{z=0} = 0$$

También se puede demostrar que si la distancia l entre ambas bobinas es R (radio de las espiras), se obtiene que

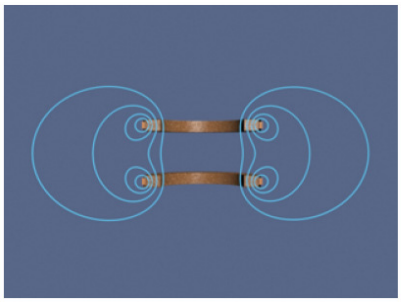
$$\frac{d^2B}{dz^2}\Big|_{z=0} = 0$$

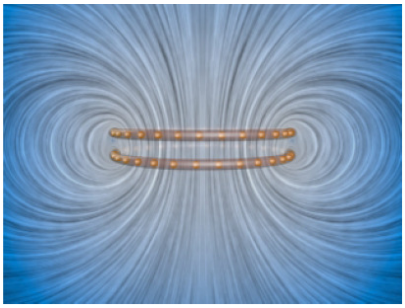
Esta configuración se conoce como *Helmhotz coils* (bobinas de Helmhotz). La gracia es que el campo es aproximadamente uniforme en una pequeña región cercana a $z = 0$. Si se expande en torno a este punto

$$B(z) = B(0) + B'(0)z + \frac{1}{2!}B''(0)z^2 + \frac{1}{3!}B'''(0)z^3 + ...$$

$$B(z) = B(0) + \frac{1}{3!}B'''(0)z^3 + ...$$

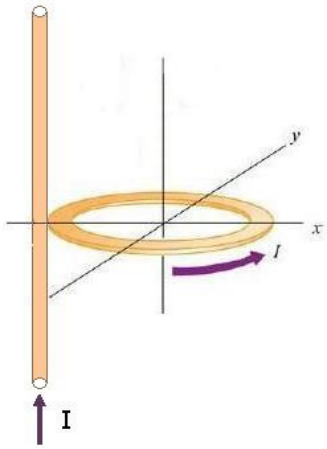
Incluso se puede demostrar que la tercera derivada también es cero en $z = 0$, es decir, el cambio en el campo en el punto medio para pequeñas variaciones de z es del orden de z^4!!





Problema

Calcule el campo magnético en el centro de la circunferencia de la figura



Solución

Este problema se soluciona fácilmente utilizando el principio de superposición.
En el problema 2 ya se vió que la magnitud del campo eléctrico debido a un alambre rectilíneo muy largo a una distancia a de él es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

En este caso, según el sentido de la corriente

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{j}$$

Es decir, apunta hacia el fondo de la hoja. Ahora, del problema 3 obtuvimos el campo magnético de un anillo a una distancia z del centro en el eje de simetría está dado por

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Como interesa el campo en el centro del anillo, z=0

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$$

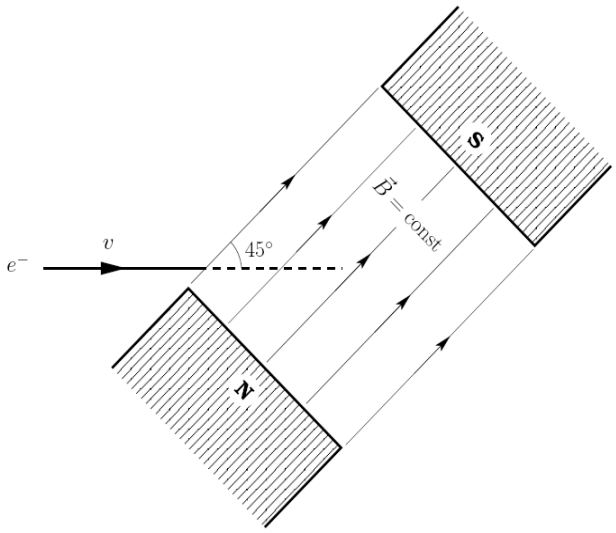
Finalmente, por el principio de superposición, el campo resultante en el centro del anillo es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{j} + \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\hat{j} + \frac{1}{\pi}\hat{k}\right)$$

Problema

Una partícula de carga q y masa m entra con velocidad v en un campo magnético uniforme B como se muestra en la figura. ¿Cuánto tiempo transcurre entre que la carga ingresa al campo magnético y sale?

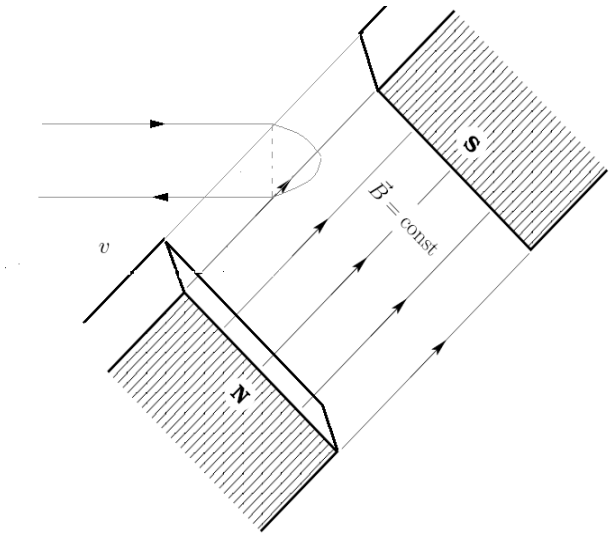


Solución

Es sabido que la fuerza magnética sobre una carga en movimiento q está dada por la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ésta fuerza es siempre perpendicular a $\vec{v}$, luego, se sigue que ésta fuerza no ejerce trabajo. Con esto, la energía cinética de la partícula es constante y entonces su rapidez también. La trayectoria que sigue la partícula bajo este campo magnético uniforme es una hélice



Si se observa el movimiento proyectado en un plano perpendicular al campo magnético, la trayectoria describe una semicircunferencia, hasta volver a salir de la región donde se encuentra el campo magnético. Sea R el radio de ésta semicircunferencia, luego podemos determinar el tiempo que demora en salir como

$$T = \frac{2\pi R}{2v'} = \frac{\pi R}{v'}$$

donde v' es la componente de la velocidad que es perpendicular al campo magnético. Ahora debemos determinar R. De la segunda ley de Newton

$$\frac{mv'^2}{R} = F$$

donde F es la magnitud de la fuerza magnética que se ejerce sobre la partícula.

$$F = qvB\sin(\pi/4) = qv'B$$

de esta forma

$$\frac{mv'^2}{R} = qv'B$$

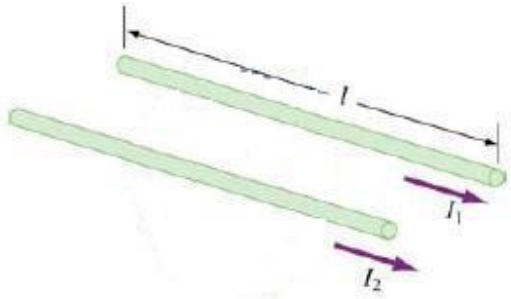
$$R = \frac{mv'}{qB}$$

Finalmente

$$T = \frac{\pi}{v'}\frac{mv'}{qB} = \frac{\pi m}{qB}$$

Problema

Considere dos alambres paralelos separados por una dstancia a y que llevan corrientes I_1 e I_2 en la dirección x. Calcule la fuerza entre ambos conductores.



Solución

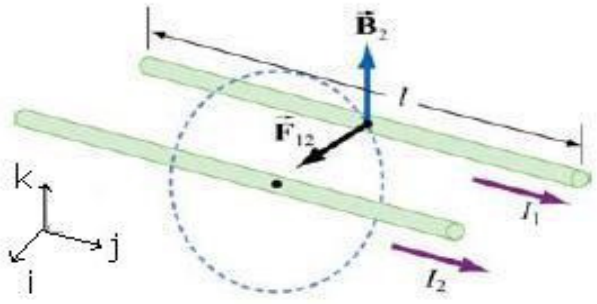
La fuerza magnética $\vec{F}_1$, que ejerce el alambre 2 sobre el alambre 1, se puede obtener como

$$\vec{F}_1 = I_1 \int d\vec{l}_1 \times \vec{B}$$

donde $\vec{B}$ es el campo magnético creado por el conductor 2. Usando el resultado del problema 2, para alambres suficientemente largos, las líneas del campo magnético debido a I_2 son círculos concéntricos con el alambre 2, con el campo $\vec{B}_2$ apuntando en la dirección tangencial. Así, en un punto arbitrario P sobre el alambre 1, tenemos

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi a}\hat{k}$$

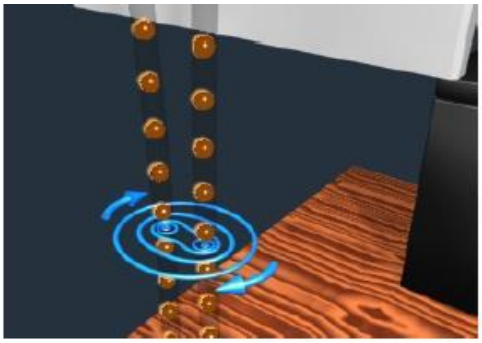
que apunta en dirección perpendicular al alambre 1, como se ve en la figura

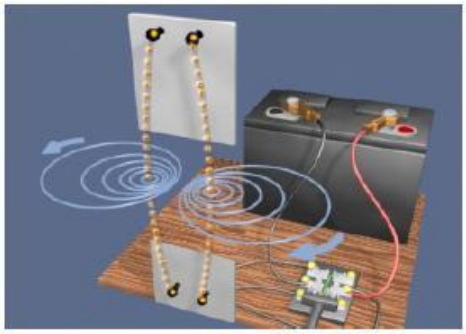


Al ser este campo uniforme a lo largo del conductor 1, y siendo éste un alambre rectilíneo, la fuerza que experimenta está dada por

$$\vec{F}_1 = I_1\vec{l} \times \vec{B}_2 = I_1 l\hat{j} \times \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right)\hat{k} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}\hat{i}$$

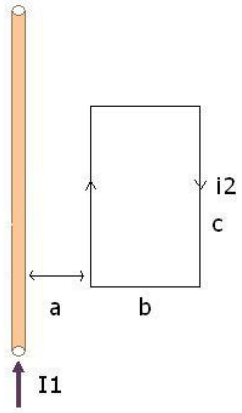
Claramente esta fuerza apunta hacia el conductor 2. Resulta evidente que $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. De esta forma, 2 cables paralelos que llevan corriente en la misma dirección se atraerán. Por otro lado, si las corrientes fluyen en direcciones opuestas, la fuerza resultante será repulsiva.





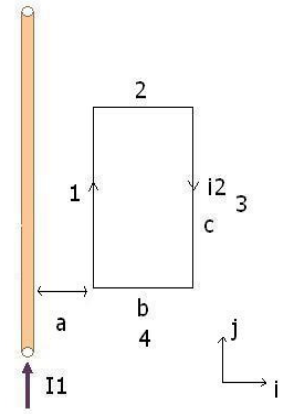
Problema

Calcular la fuerza resultante sobre la espira con corriente I_2



Solución

Para obtener la fuerza total sobre la espira, sumamos las fuerzas sobre las secciones 1,2,3 y 4.



Tenemos

$$\vec{F_1} = I_2 \int_0^c d\vec{l_1} \times \vec{B}_1$$

el campo en la sección 1 es uniforme y está dado por

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\hat{k}$$

Así

$$\vec{F_1} = I_2 \int_0^c dy\hat{j} \times -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\hat{k}$$

$$\vec{F_1} = -\frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi a}\hat{j} \times \hat{k}$$

$$\vec{F_1} = -\frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi a}\hat{i}$$

Ahora, para la sección 3

$$\vec{F_3} = I_2 \int_0^c d\vec{l_3} \times \vec{B_3}$$

con

$$\vec{B_3} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)}\hat{k}$$

y entonces

$$\vec{F_3} = I_2 \int_c^0 dy\hat{j} \times -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)}\hat{k}$$

y obtenemos

$$\vec{F_3} = \frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi(a+b)}\hat{i}$$

La fuerza sobre la sección 2 será

$$\vec{F_2} = I_2 \int_0^b d\vec{l_2} \times \vec{B_2}$$

$$\vec{F_2} = -I_2 \int_0^b dx\hat{i} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+x)}\hat{k}$$

Notemos que

$$\vec{F_4} = I_2 \int_b^0 -dx\hat{i} \times \frac{-\mu_0 I_1}{2\pi(a+x)}\hat{k} = -\vec{F_2}$$

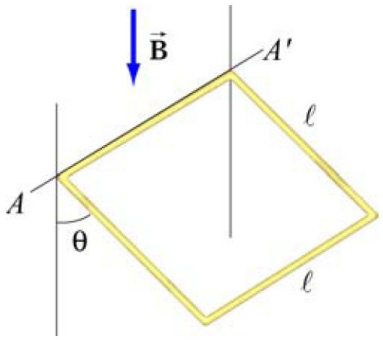
F_2 y F_4 se cancelan, luego, la fuerza total sobre la espira es

$$\left(\frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi(a+b)} - \frac{\mu_0 c I_1 I_2}{2\pi a}\right)\hat{i}$$

Notar que en signo es negativo, es decir, la fuerza es atractiva.

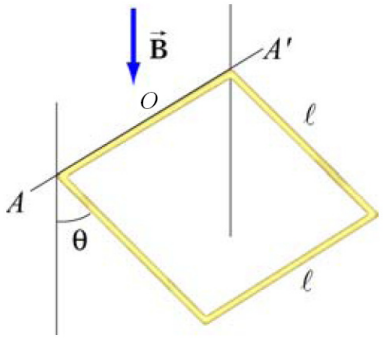
Problema

Un circuito cuadrado rígido de lado L y masa M está pivoteado en torno a uno de sus ejes en prescencia de un campo magnético $\vec{B}$ uniforme, y el campo gravitatorio. El circuito lleva una corriente I que es capaz de mantenerlo en equilibrio en un ángulo ϑ. Encuentre el sentido y magnitud de dicha corriente

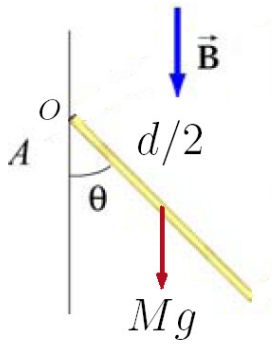


Solución

Para el equilibrio, se requiere que el torque neto sobre la espira con respecto a algún punto de aceleración nula sea cero. Se escoge como origen el punto O ubicado en una de las esquinas de la espira, como se muestra en la figura



Para el torque que ejerce el peso, usamos que la fuerza de gravedad se puede concentrar en el centro de masa



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{l}{2}\left(\sin\vartheta\hat{i} - \cos\vartheta\hat{j}\right) \times -Mg\hat{j}$$

$$\vec{\tau} = -\frac{Mgl}{2}\sin\vartheta\hat{k}$$

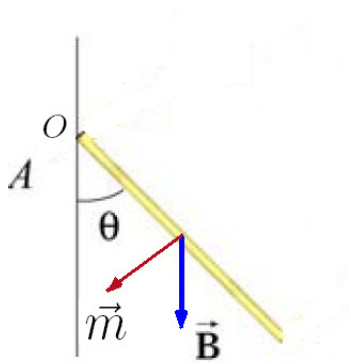
Por otro lado, el torque que ejerce la fuerza magnética es

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

donde $\vec{m}$ es el momento magnético de la espira

$$\vec{m} = IA\hat{n} = Il^2\hat{n}$$

Requerimos en primer lugar que este torque tenga dirección $\hat{k}$. Luego $\hat{n}$ debe tener la dirección de $\vec{m}$ en el dibujo



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = Il^2 B \cos\vartheta \hat{k}$$

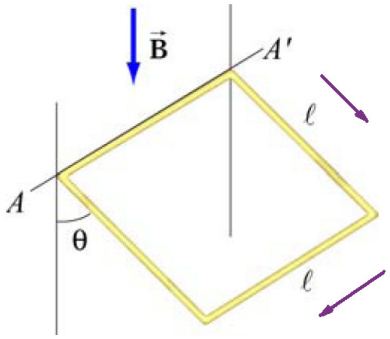
El equilibrio exige entonces

$$Mg\frac{l}{2}\sin\vartheta\hat{k} - Il^2 B\cos\vartheta\hat{k} = 0$$

Luego, la corriente I debe ser

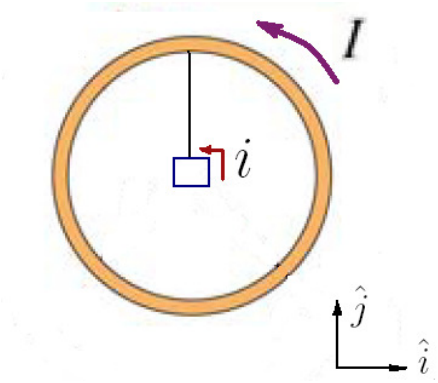
$$I = \frac{Mg\tan\vartheta}{2lB}$$

La dirección debe ser acorde con la dirección del momento magnético, la cual se muestra en la siguiente figura



Problema

Un circuito cuadrado de lado a está suspendido en el centro de un enorme anillo fijo de radio R, con $R >> a$ por un hilo que ejerce un torque restaurador de magnitud $\tau = k\vartheta$, con ϑ el ángulo de torsión que forman los planos de ambos circuitos. Si por el circuito pequeño circula una corriente i y por el grande I, encuentre en forma aproximada el valor de la constante k de modo que $\vartheta = \pi/2$ sea posición de equilibrio



Solución

Encontramos el campo magnético $\vec{B}$ que la corriente I produce en el centro del anillo (coincidente con el centro de la espira cuadrada). Como $a << R$, podemos considerar que el campo es aproximadamente uniforme en una región que contenga a la espira cuadrada. El campo en el centro es fácil de obtener con la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_\Gamma d\vec{x}' \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

donde Γ es la curva que parametriza al anillo. Se tiene

$$\vec{x} = \vec{0}, \vec{x}' = R\hat{r}(\varphi), d\vec{x}' = Rd\varphi\hat{\varphi}, \mid \vec{x}-\vec{x}' \mid = R$$

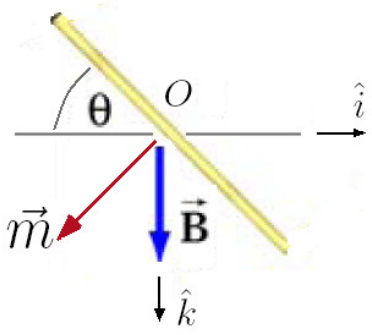
$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi R\hat{\varphi} \times \frac{-R\hat{r}(\varphi)}{R^3}$$

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}2\pi\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$$

El torque del campo magnético sobre la espira está dado por

$$\vec{\tau}_1 = \vec{m} \times \vec{B}$$

El cual dependerá del ángulo que formen los planos de ambos circuitos



De acuerdo a la figura, en tal posición se tendrá un torque magnético dado por

$$\vec{\tau}_1 = \vec{m} \times \vec{B} = ia^2 \frac{\mu_0 I}{2R} \sin\vartheta \hat{j}$$

En $\vartheta = \pi/2$

$$\vec{\tau}_1 = \frac{iIa^2\mu_0}{2R}\hat{j}$$

Por otro lado, se tendrá un torque restaurador

$$\vec{\tau}_2 = -k\vartheta\hat{j}$$

en $\vartheta = \pi/2$

$$\vec{\tau}_2 = -k\frac{\pi}{2}\hat{j}$$

Para que $\vartheta = \pi/2$ sea una posición de equilibrio

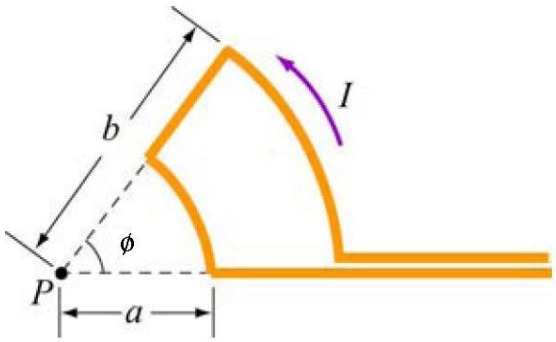
$$\frac{iIa^2\mu_0}{2R} - k\frac{\pi}{2} = 0$$

Luego

$$k = \frac{\mu_0 Iia^2}{\pi R}$$

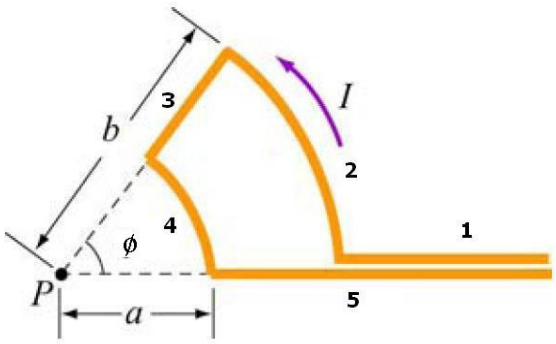
Problema

Considere la espira de corriente formada por segmentos radiales y arcos de circunferencia como se muestra en la figura. Obtenga el campo magnético $\vec{B}$ en el punto P.

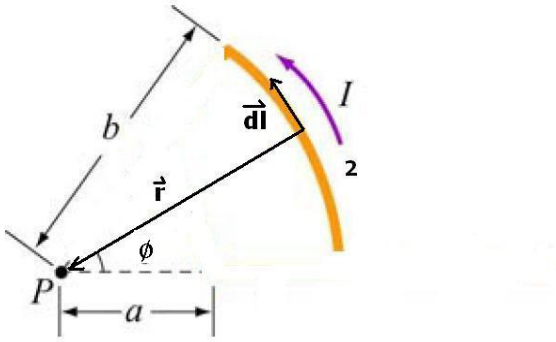


Solución

Para obtener el campo magnético en P, utilizaremos el principio de superposición, notando que el campo total en P será la suma de las contribuciones de las secciones 1,2,3,4 y 5



Si fijamos el origen en P, notamos inmediatamente que las contribuciones de los segmentos 1 y 5 son nulas, ya que en ambos casos el vector $d\vec{x}'$ es paralelo al vector $\vec{x} - \vec{x}'$, con $\vec{x} = \vec{0}$
Para el sector 2



Tenemos

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Utilizando coordenadas polares

$$d\vec{x}' = bd\phi\left(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}\right)$$

ya que P es el origen, $\vec{x} = 0$, y por último el vector que va desde el origen al elemento diferencial de corriente tiene magnitud b y la dirección del vector unitario radial en polares

$$\vec{x}' = b\left(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}\right)$$

Notar que

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^3 = |-\vec{x}'|^3 = b^3$$

con esto

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} Ib \frac{d\phi\left(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}\right) \times -b(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j})}{b^3}$$

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\phi\left(\sin^2\phi\hat{k} + \cos^2\phi\right)}{b}\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi b} Id\phi\hat{k}$$

Así, el campo total en P debido al arco exterior es

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi b} I \int_0^{\phi} d\phi\hat{k} = \frac{\mu_0\phi}{4\pi b}\hat{k}$$

Ahora, para el arco interior (sección 4) el procedimiento es totalmente análogo, con la diferencia de que la distancia ahora es a, y que la corriente va en el sentido opuesto al del arco exterior

$$\vec{B}_4 = -\frac{\mu_0\phi}{4\pi a}\hat{k}$$

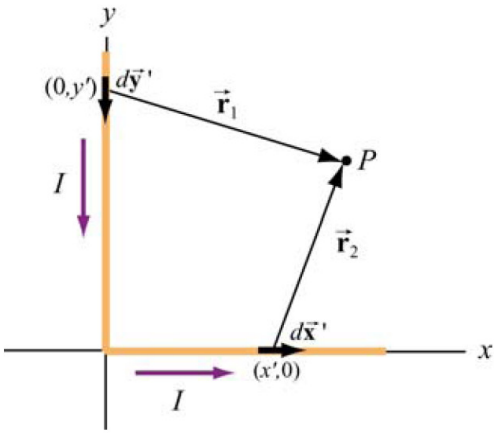
Por último, para la sección 3, es fácil notar que su contribución es nula, ya que en este caso, el vector $d\vec{x}'$ apunta en la dirección contraria al vector unitario radial en coordenadas polares, y a su vez $\vec{x}'$ apunta en la dirección radial, de esta forma, el producto vectorial $d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')$ es 0 en todo el segmento 3. Resumiendo, solo los segmentos 2 y 4 contribuyen al campo en P, y el campo total será la suma de ambas contribuciones

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0\phi}{4\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\hat{k}$$

Problema

Un conductor rectilíneo con corriente I baja por el eje y hasta el origen, y luego continua en dirección horizontal. Muestre que el campo magnético en algún punto (x, y) con $x > 0, y > 0$ está dado por

$$\vec{B}(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{k}$$



Solución

Sea P un punto sobre el plano (x,y) con $x > 0$, $y > 0$. El campo magnético en P será la superposición del campo creado por la sección vertical y el de la sección horizontal. Sea Γ_1 la curva descrita por

$$\Gamma_1 : \vec{x}' = \vec{x}'(t) = (0, -t)\,, t \in (-\infty, 0)$$

Así $d\vec{x}'(t) = dt(0,-1)$ .Es fácil ver que esta curva representa el segmento vertical de conductor, y es recorrido en el sentido de la corriente. El campo magnético en P se obtiene a partir de la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_1(x,y) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma_1} d\vec{x}' I \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

$$\vec{B}_1(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{0} -dt\hat{j} \times \frac{(x,y) - (0,-t)}{\mid (x,y) - (0,-t) \mid^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{0} -dt\hat{j} \times \frac{x\hat{i} + (y-t)\,\hat{j}}{\left(x^2 + (y-t)^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_1(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{0} dt \frac{x\hat{k}}{\left(x^2 + (y-t)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I x}{4\pi}\hat{k}\int_{-\infty}^{0} dt \frac{1}{x^3\left(1 + \frac{(y-t)^2}{x^2}\right)^{3/2}}$$

La función a integrar es par, luego

$$\vec{B}_1(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x^2}\hat{k}\int_{0}^{\infty} dt \frac{1}{\left(1 + \frac{(y-t)^2}{x^2}\right)^{3/2}}$$

Ahora se utiliza la sustitución $\tan\vartheta = \frac{(y-t)}{x}$, $\sec^2\vartheta d\vartheta = -\frac{dt}{x}$, y entonces

$$\int dt \frac{1}{\left(1 + \frac{(y-t)^2}{x^2}\right)^{3/2}} = -x\int \frac{\sec^2\vartheta d\vartheta}{(1+\tan^2\vartheta)^{3/2}} = -x\int \frac{\sec^2\vartheta d\vartheta}{\sec^3\vartheta} = -x\int d\vartheta \cos\vartheta = -x\sin\vartheta$$

Ahora, como $\tan\vartheta = \frac{(y-t)}{x}$, es fácil ver que (es cosa de construír un triángulo rectángulo, con un lado igual a $(y-t)$, y otro igual a x)

$$\sin\vartheta = \frac{(y-t)}{\sqrt{x^2+(y-t)^2}}$$

de forma que

$$\vec{B}_1(x,y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\hat{k}\left(\frac{(y-t)}{\sqrt{x^2+(y-t)^2}}\right)\Big|_0^\infty = -\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\hat{k}\left(-1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\vec{B}_1(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{k}$$

Ahora, el segmento horizontal está caracterizado por la curva

$$\Gamma_2 : \vec{x}'(t) = (t,0)$$

$$d\vec{x}' = (1,0)dt, t \in (0,\infty)$$

De la ley de Biot-Savart, obtenemos el campo magnético generado por esta sección

$$\vec{B}_2(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\Gamma_2} d\vec{x}' \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\infty dt\hat{i} \times \frac{(x-t,y)}{((x-t)^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_2(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{k}\int_0^\infty dt\frac{y}{((x-t)^2+y^2)^{3/2}}$$

Esta integral es idéntica a la calculada anteriormente, sólo que intercambiando el rol de x e y

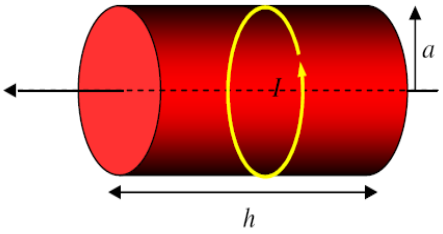
$$\vec{B}_2(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{y}+\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{k}$$

Finalmente

$$\vec{B}(x,y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{k}$$

Problema

Un cilindro de radio a y largo h tiene una corriente superficial I uniformemente distribuída en el manto. Calcule el campo magnético producido sobre su eje



Solución

El sistema se puede ver como un conjunto de espiras por las cuales circula una corriente infinitesimal dada por

$$\frac{Idz'}{h}$$

puestas una al lado de la otra. Determinemos inicialmente el campo asociado a una espira ubicada a una distancia z' del origen por la cual circula una corriente I. Por la ley de Biot - Savart, el campo magnético originado por un elemento de corriente I es

$$d\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{4\pi h}\frac{Id\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\mid \vec{r}-\vec{r}' \mid^3}$$

En este caso $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}' = a\hat{r} + z'\hat{k}$, $d\vec{l} = ad\vartheta\hat{\vartheta}$

$$d\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{4\pi h}\frac{Iad\vartheta\hat{\vartheta}\times(-a\hat{r}+(z-z')\hat{k})}{(a^2+(z-z')^2)^{3/2}}$$

Integrando la componente según $\hat{k}$ tiene que

$$\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{4\pi h}\int_o^{2\pi}\frac{d\vartheta Ia^2\hat{k}}{(a^2+(z-z')^2)^{3/2}}$$

Notar que existe una componente según $\hat{r}$, sin embargo su integral es cero, como se podría esperar por simetría.

$$\vec{B}_{z'} = \frac{\mu_0 dz'}{2h}\frac{Ia^2\hat{k}}{(a^2+(z-z')^2)^{3/2}}$$

Este es el aporte de una sola espira, y por lo tanto, puede considerarse como un elemento diferencial de campo magnético. El campo magnético total es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2h}\int_o^h dz'\frac{Ia^2}{(a^2+(z-z')^2)^{3/2}}\hat{k}$$

Usando el cambio $z - z' = atanx$, $-dz' = asec^2x$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2h}\int_{x_1}^{x_2}\frac{-dxIa^2asec^2x}{(a^2+a^2tan^2x)^{3/2}}\hat{k} = -\frac{\mu_o I}{2}\int_{x_1}^{x_2}dxcosx\hat{k}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2h}(sinx_2 - sinx_1)\hat{k}$$

donde

$$sinx_2 = \frac{z-h}{\sqrt{a^2+(z-h)^2}}$$

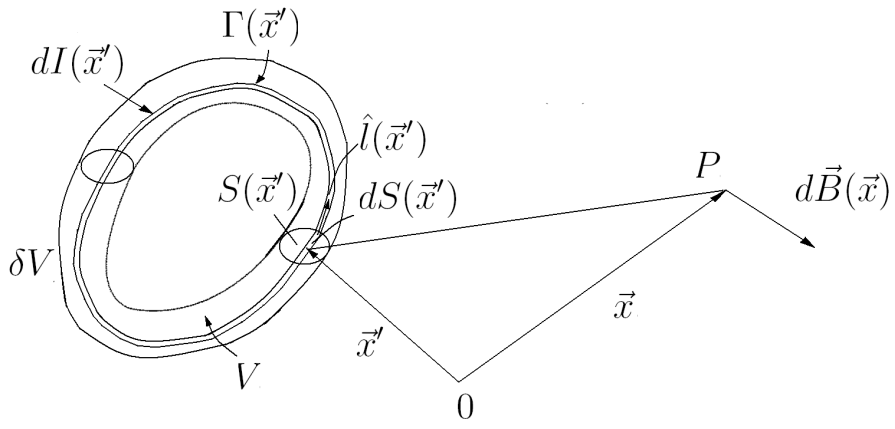
$$sinx_1 = \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

Finalmente

$$\vec{B} = -\frac{\mu_o I}{2h}\frac{z-h}{\sqrt{a^2+(z-h)^2}}\hat{k} + \frac{\mu_o I}{2}\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\hat{k}$$

12.6. Corrientes estacionarias extensas localizadas

Vamos a generalizar la ley de Biot-Savart para una distribución de corrientes localizadas en un volumen V, como se muestra en la figura



Para calcular el campo magnético en $\vec{x}$, se utiliza un modelo de anillos Biot-Savart. Sea $\vec{x}' \in V$, y $\Gamma(\vec{x}')$ una curva cerrada de corriente estacionaria, luego

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} dI(\vec{x}') \oint_{\Gamma(\vec{x}')} d\vec{x}'' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{\mid \vec{x} - \vec{x}'' \mid^3}$$

Además

$$\vec{J}(\vec{x}') = \frac{dI(\vec{x}')}{dS(\vec{x}')} \hat{l}(\vec{x}')$$

luego

$$\vec{J}(\vec{x}') = \left(\frac{dI}{dS} \right) \Big|_{\vec{x}'} \hat{t}(\vec{x}')$$

$$dI(\vec{x}') = dS(\vec{x}') \hat{t}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')$$

con $\hat{t}(\vec{x}')$ el vector unitario tangente a la curva $\Gamma(\vec{x}')$. Así

$$\vec{x}' \in \Gamma(\vec{x}') : dI(\vec{x}') = dS(\vec{x}') J(\vec{x}')$$

Pero

$$\vec{x}'' \in \Gamma(\vec{x}') \rightarrow dI(\vec{x}'') = dI(\vec{x}') = C$$

ya que es un elemento de corriente **estacionaria**. Luego

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma(\vec{x}')} d\vec{x}'' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{\mid \vec{x} - \vec{x}'' \mid^3} dI(\vec{x}'')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma(\vec{x}')} ds'' \hat{t}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{\mid \vec{x} - \vec{x}'' \mid^3} dS(\vec{x}'') J(\vec{x}'')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma(\vec{x}')} ds'' \vec{J}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{\mid \vec{x} - \vec{x}'' \mid^3} dS(\vec{x}'')$$

El campo magnético total en $\vec{x}$ será

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint dS(\vec{x}'') \oint ds'' \vec{J}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{\mid \vec{x} - \vec{x}'' \mid^3}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x'' \vec{J}(\vec{x}'') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}''}{\mid \vec{x} - \vec{x}'' \mid^3}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' J(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Este es el campo magnético generado por una distribución de corriente localizada dentro de un volumen V

12.7. Las dos leyes fundamentales de la magnetostática

Hemos obtenido, a partir de la ley de Biot-Savart y el principio de superposición la forma general del campo magnético generado por una distribución de corriente localizada dentro de un volumen V

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Ahora utilizamos el lema

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

entonces

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

de forma que el campo magnetostático es el rotor de un campo vectorial, que llamaremos **potencial magnético vectorial**

$$\vec{A}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

y

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

De esta forma, la divergencia del campo magnético es siempre nula

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

Además, se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \mu_0 \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Si $\vec{x} \in V$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}') = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \mu_0 J(\vec{x})$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

$$= \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla} \oiint_{\delta V} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Pero, si la distribución corriente está localizada dentro de V, no hay flujo de corriente a través de δV, es decir

$$\hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \delta V$$

Además, la condición de corriente estacionaria significa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

De forma que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

12.8. Leyes fundamentales, forma diferencial

Hemos obtenido las siguientes ecuaciones diferenciales para el campo magnetostático

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

Recordar el teorema de Helmholtz! La teoría magnetostática es **completa**. La primera de ellas contiene la información de que nunca han sido observados monopolos magnéticos. Se puede obtener una forma integral, integrando sobre un volumen V

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

utilizando el teorema de la divergencia

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

Es decir, el flujo magnético sobre cualquier superficie cerrada es siempre nulo. La segunda ecuación para el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

es la ley de Ampère, cuya forma integral y aplicaciones serán estudiadas en detalle en el siguiente capítulo

Capítulo 13

Ley de Ampére

Se vió que cargas en movimiento son fuentes de campo magnético. En particular, corrientes estacionarias en un conductor son fuentes de campos magnéticos **estáticos** (no varían en el tiempo). Tal cual la ley de Gauss en electrostática puede ser muy util en problemas de geometría simple, para campos magnéticos existe un equivalente, que es la **ley integral de Ampère**. Ésta se obtiene a partir de la ecuación para el rotor de $\vec{B}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

Podemos integrar esta ecuación sobre una superficie S arbitraria

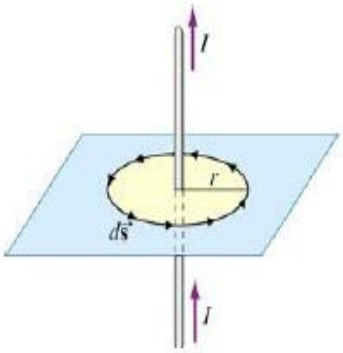
$$\iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})\right) = \mu_0 \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_{\Gamma(S)} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

La integral de línea del campo magnético sobre una curva cerrada Γ (circulación), es proporcional al flujo de corriente sobre cualquier superficie cuyo contorno sea (Γ). Definiendo I_Γ como la corriente que cruza a S, entonces

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I_\Gamma$$



Ejemplo conocido es el campo magnético exterior de una distribución cilíndrica de corriente (muy larga), como se ve en la figura. Debido a la simetría, la magnitud del campo magnético debe ser constante a una distancia r del centro del conductor, y su dirección siempre tangente a curvas circulares concéntricas con el conductor. De esta forma

$$\oint_{\Gamma} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

de donde

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

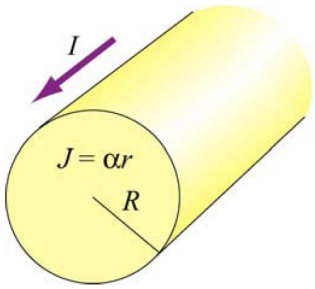
Problemas con simetría cilíndrica son muy sencillos de resolver con la ley de Ampère. El campo interior al conductor se obtiene de la misma forma, pero teniendo en cuenta que en ese caso la corriente encerrada por una trayectoria circular no es I, sino una fracción de ésta

Problema

Considere un conductor cilíndrico de radio R y de extensión infinita, que lleva una corriente I con una densidad de corriente no uniforme

$$J = \alpha r$$

donde α es una constante (desconocida), y r es la distancia de un punto interior al conductor al eje de simetría. Encuentre el campo magnético en todo el espacio



Solución

Dada la clara simetría cilíndrica, utilizamos la ley de Ampère para resolverlo. Sea Γ una curva circular de radio r, con $0 < r < R$ concéntrica al eje de simetría del conductor. Es claro que la magnitud del campo magnético sólo puede ser función de r, y su dirección tangente en todo punto a la curva Γ. Así, veamos que ocurre con la circulación del campo

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

con $\vec{x} = r\left(\cos\vartheta\hat{i}, \sin\vartheta\hat{j}\right)$, $d\vec{x} = rd\vartheta\hat{\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\vartheta r\hat{\vartheta} \cdot \vec{B}(r) = 2\pi r B(r)$$

Por la ley de Ampère, la circulación sobre Γ es igual a $\mu_0 I(\Gamma)$ donde $I(\Gamma)$ es la corriente que atraviesa la superficie limitada por Γ.(Escogemos la superficie plana encerrada por Γ). Sea $\hat{k}$ la dirección del eje de simetría del cilindo (coindidente con el sentido de la corriente). Entonces

$$I(\Gamma) = \iint_\Gamma d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r dr r\hat{k} \cdot \vec{J}(r)\hat{k}$$

$$I(\Gamma) = 2\pi\alpha \int_0^r dr r^2 = \frac{2\pi\alpha r^3}{3}$$

De esta forma

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \frac{2\pi\alpha r^3}{3}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3}\hat{\vartheta}$$

Para encontrar el campo magnético exterior, se utilizan los mismos argumentos de simetría, y se utiliza una nueva curva Γ circular de radio $r > R$. La ley de Ampère en este caso entrega

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 2\pi r = \mu_0 I(\Gamma)$$

donde $I(\Gamma)$ es la corriente que atraviesa cualquier superficie de contorno Γ. Por supuesto, escogemos la superficie plana limitada por Γ

$$I(\Gamma) = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r dr r\hat{k} \cdot J(r)\hat{k}$$

pero $J(r) = 0, r > R$, luego

$$I(\Gamma) = 2\pi\alpha \int_0^R dr r^2 = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}$$

pero es claro que $I(\Gamma) = I$, luego

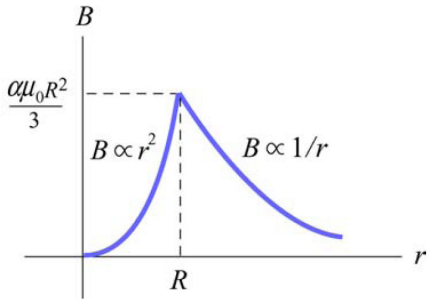
$$\alpha = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

y se tiene

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

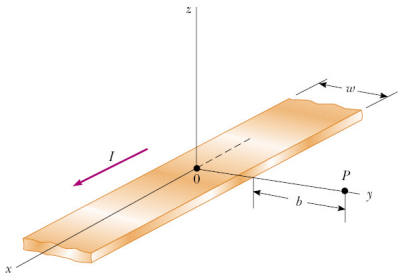
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\vartheta}, r > R$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^3}\hat{\vartheta}, r < R$$



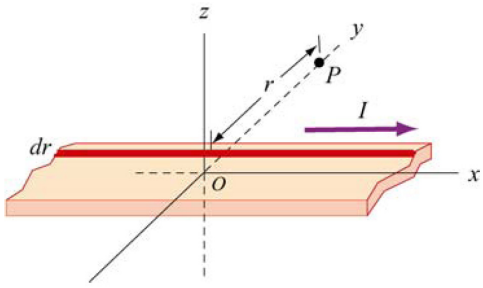
Problema

Considere un conductor plano de ancho w e infinitamente largo, en el plano xy. Éste lleva una corriente I en el sentido de eje x, como se muestra en la figura. Encuentre el campo magnético en un punto P en el plano del conductor, a una distancia s de él



Solución

Considere una sección de conductor de ancho dr, paralela a la dirección de la corriente y a una distancia r de P, como se ilustra en la siguiente figura



La cantidad de corriente contenida en este elemento diferencial está dada por

$$dI = I\left(\frac{dr}{w}\right)$$

Utilizando la ley de Ampère para este elemento de conductor (similar al de un conductor lineal) se obtiene el ya conocido resultado

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}\hat{k}$$

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r w}\hat{k}$$

Por el principio de superposición, el campo magnético total se obtiene al integrar sobre el conductor

$$\vec{B}(P) = \int_s^{s+w} dr \frac{\mu_0 I}{2\pi r w}\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\int_s^{s+w}\frac{dr}{r}\hat{k}$$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\ln\left(\frac{s+w}{s}\right)\hat{k}$$

Notar que en el límite cuando $w << s$

$$\ln\frac{s+w}{s} = \ln\left(1+\frac{w}{s}\right) \approx \frac{1}{s}w$$

y entonces

$$\vec{B}(P) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{k}$$

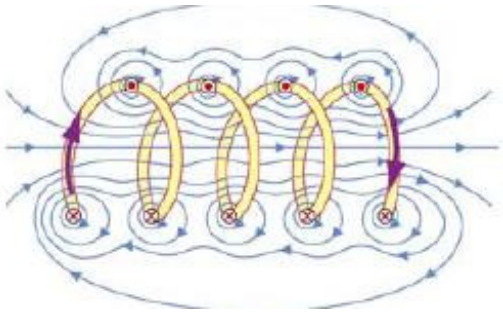
que es el campo a distancia s de un conductor rectilíneo de ancho despreciable, con corriente I

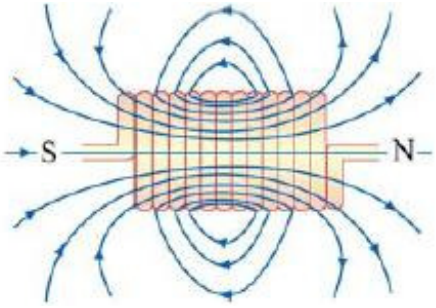
Problema

Calcule el campo magnético dentro de un solenoide ideal de largo l, N vueltas y que lleva una corriente estacionaria I.

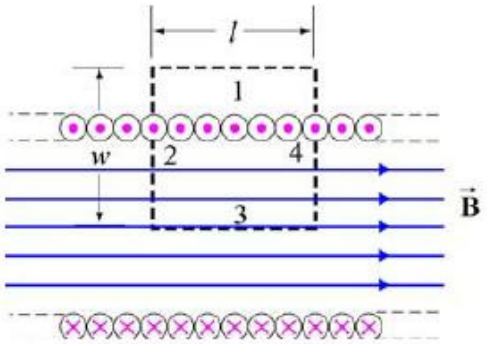
Solución

Un solenoide es una bobina enrollada en forma helicoidal. La figura muestra las lineas de campo magnético de un solenoide con corriente constante I





Vemos que si las vueltas están muy cercanas espacialmente, el campo magnético resultante dentro del solenoide es parcialmente uniforme, siempre que la longitud del solenoide sea mucho mas grande que su diámetro. Para un solenoide ideal, que es infinitamente largo con vueltas infinitamente cercanas, el campo magnético dentro es uniforme y paralelo al eje x, y es nulo fuera del solenoide. Podemos utlizar la ley de Ampère para calcular el campo magnético dentro de un solenoide ideal. Una vista transversal de un solenoide ideal se muestra en la figura



Consideremos el camino rectangular de largo l y ancho w y en sentido contrareloj. La integral de línea de $\vec{B}(\vec{x})$ a través de este camino es

$$\oint_{1234} d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = \int_1 d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) + \int_2 d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) + \int_3 d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) + \int_4 d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x})$$

Ahora, la integral sobre 1 es 0, ya que el campo es nulo en el exterior del solenoide. Las integrales sobre 2 y 4 también son nulas, ya que el campo a lo largo de estas trayectorias es perpendicular a $d\vec{x}$. Con esto, podemos estirar el camino cerrado de manera que encierre todo el solenoide,notando que la corriente total que atraviesa la superficie encerrada por la trayectoria es NI, con N el número de vueltas del solenoide

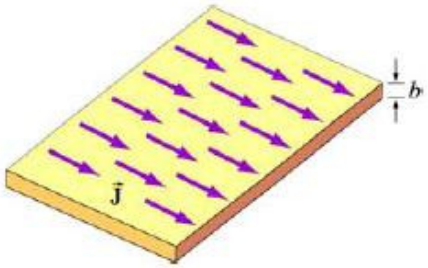
$$\oint_{1234} d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = Bl = \mu_0 NI$$

Finalmente

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

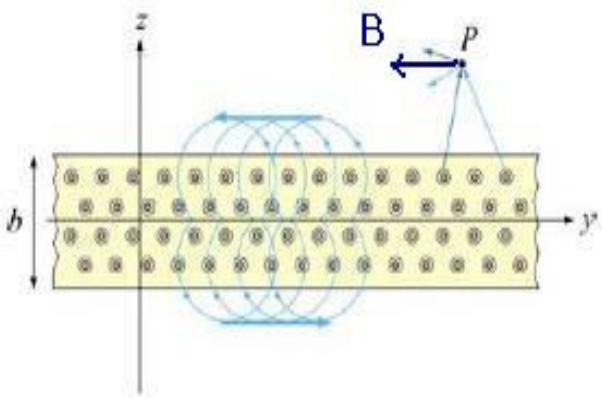
Problema

Considere dos planos infinitos paralelos separados por una distancia b en el plano xy. En la región interior existe una densidad de corriente uniforme $\vec{J} = J_0\vec{i}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio

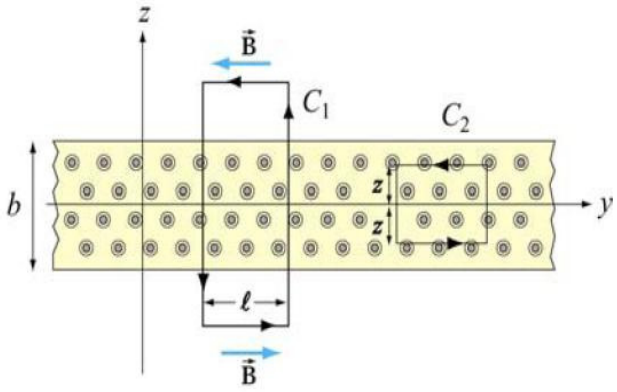


Solución

Podemos pensar la región de corriente como una superposición de conductores paralelos que llevan corrientes en la direccion $+x$. De la figura, y por un argumento de simetría vemos que el campo magnético en un punto P sobre la región apunta en la direccion $-y$



La componente z desaparece después de sumar todas las contribuciones debidas a todos los conductores. Similarmente, se puede mostrar que el campo magnético en un punto dentro de la región apunta en la dirección $+y$, y en un punto inferior a la región también según la dirección $+y$.



Ahora podemos utilizar la ley de Ampère para encontrar el campo magnético debido a esta distribución de corriente. Tomaremos las curvas cerradas que aparecen en la figura. Para el campo exterior, integramos sobre la curva Γ_1. La corriente que atraviesa la superficie limitada por Γ_1 es

$$I(\Gamma_1) = \iint \vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = J_0 \, (bl)$$

Notando que en la integral de línea los segmentos verticales no contribuyen ($d\vec{x}$ perpendicular al campo $\vec{B}(\vec{x})$)

$$\oint_{\Gamma_1} d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B2l = \mu_0 I(\Gamma_1) = \mu_0 J_0 bl$$

de donde

$$B = \mu_0 J_0 b/2$$

Notamos que el campo magnético fuera es uniforme, independiente de la distancia a la región entre ambos planos. Ahora encontremos el campo magnético interior. La corriente total encerrada por el camino cerrado Γ_2 es

$$I(\Gamma_2) = \iint d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = J_0 2zl$$

Usando la ley de Ampère,

$$\oint_{\Gamma_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B2l = \mu_0 I(\Gamma_2) = \mu_0 J_0 2zl$$

de donde

$$B = \mu_0 J_0 z$$

Notemos que en z=0 el campo magnético es nulo, como se requiere por simetría. Resumiendo

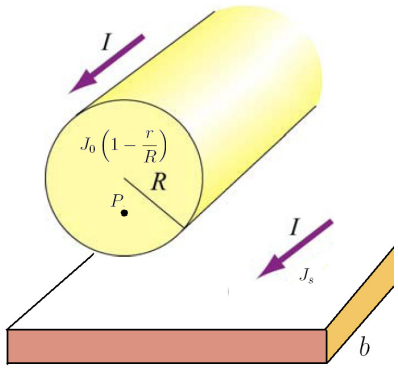
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{j}, z > b/2$$

$$\vec{B} = -\mu_0 J_0 z \hat{j}, -b/2 < z < b/2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{j}, z < -b/2$$

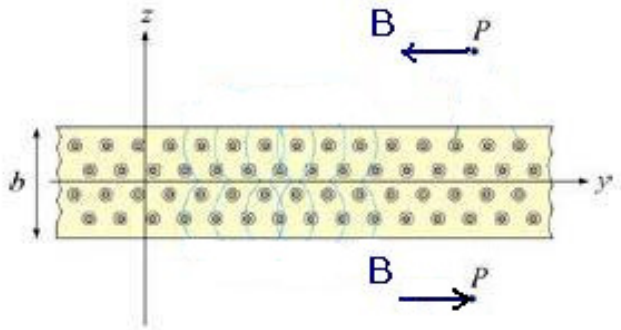
Problema

Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido (en el dibujo, saliendo de la hoja). Una de ellas es una corriente plana e infinita de densidad lineal J_s, y la otra es una corriente cilíndrica infinitamente larga cuya densidad es $J = J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. Encuentre el valor de J_0 en función de J_s, que hace que el campo magnético resultante en el punto P ubicado a distancia $R/2$ del centro del cilindro sea nulo

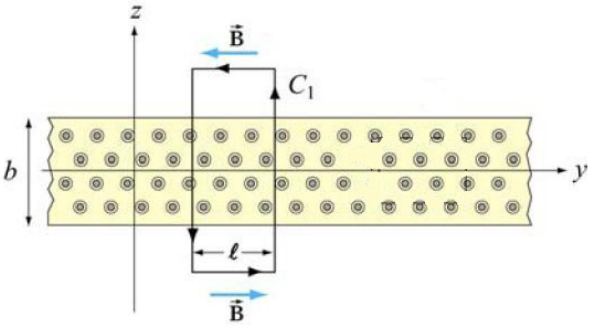


Solución

El campo de la distribución plana de corriente fue obtenido en el problema anterior. De la simetría es claro que su dirección es como se muestra en la figura



y entonces para encontrar su magnitud se utiliza la ley de Ampère, con una curva plana de ancho l

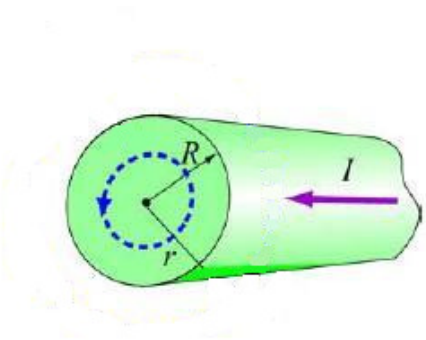


$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}_1(\vec{x}) = 2lB_1 = \mu_0 J_s l b$$

Luego, en la región superior a la distribución plana

$$\vec{B}_1(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 J_s b}{2}\hat{j}$$

Para el cilindro, utilizamos nuevamente la ley de Ampère. Dada su extensión infinita, por simetría el campo magnético en su interior debe ser función únicamente de la coordenada radial r, y su dirección es tal que es tangente en todo punto a una curva circular concéntrica al cilindro



$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}_2(\vec{x}) = \mu_0 I_{enc}$$

luego

$$2\pi r B_2(r) = \mu_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r dr r J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

$$2\pi r B_2(r) = \mu_0 J_0 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right)$$

$$\vec{B}_2(\vec{x}) = \mu_0 J_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right)\hat{\varphi}$$

En el punto P, se tendrá la superposición de ambos campos. Notar que en dicho punto, $\hat{\varphi}$ coincide con la dirección $\hat{j}$, y entonces

$$\vec{B}(P) = \left(\mu_0 J_0 \left(\frac{R}{4} - \frac{R^2}{12R}\right) - \frac{\mu_0 b J_s}{2}\right)\hat{j}$$

para tener un campo magnético nulo, debe tenerse entonces

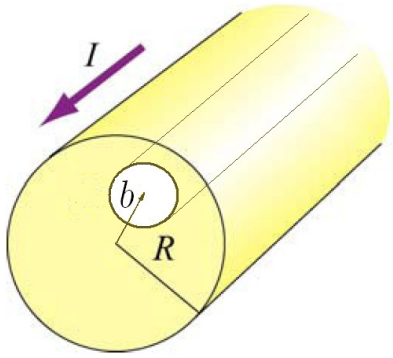
$$J_0 \frac{R}{6} = \frac{b J_s}{2}$$

Finalmente

$$J_0 = \frac{3 b J_s}{R}$$

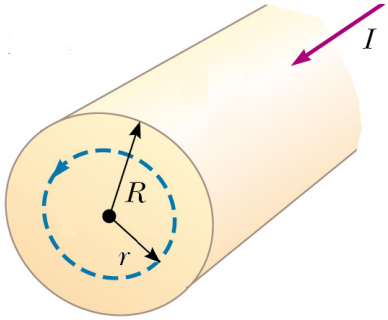
Problema

Un cable de radio R lleva una densidad de corriente $\vec{J} = J_0\hat{k}$. El cable tiene un hoyo cilíndrico de radio α paralelo al eje del cable, a distancia b de él. Muestre que el campo magnético dentro de la cavidad es uniforme



Solución

Resolvemos el problema por superposición de dos corrientes, una del cilindro completo con densidad de corriente $J_0\hat{k}$, y otra en la cavidad con densidad $-J_0\hat{k}$. El campo magnético al interior de un cable con densidad de corriente $\vec{J} = J_0\hat{k}$ se puede obtener fácilmente con la ley de Ampère



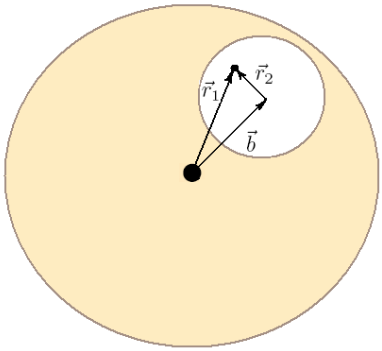
Tomando la curva circular de radio r, y dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, el campo magnético es constante y tangente sobre la curva. Así

$$\oint_\Gamma d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x})\hat{k}\cdot J_0\hat{k}$$

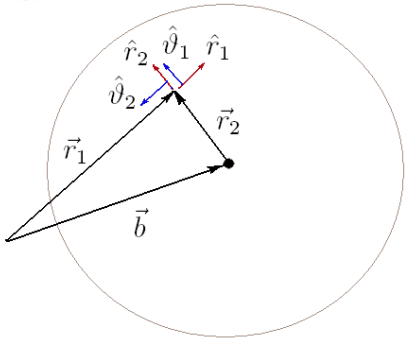
$$B(r)2\pi r = \mu_0 J_0 \pi r^2$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{\vartheta}(r)$$

Sea entonces un punto arbitrario al interior de la cavidad, como muestra la figura



La superposición de los campos magnéticos es la siguiente



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r_1}{2}\hat{\vartheta}_1 - \frac{\mu_0 J_0 r_2}{2}\hat{\vartheta}_2$$

pero

$$\vartheta_1 = \hat{k} \times \hat{r}_1$$
$$\vartheta_2 = \hat{k} \times \hat{r}_2$$

luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r_1 \hat{k} \times \hat{r}_1 - r_2 \hat{k} \times \hat{r}_2\right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(\hat{k} \times \vec{r}_1 - \hat{k} \times \vec{r}_2\right) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{k} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{k} \times \vec{b}$$

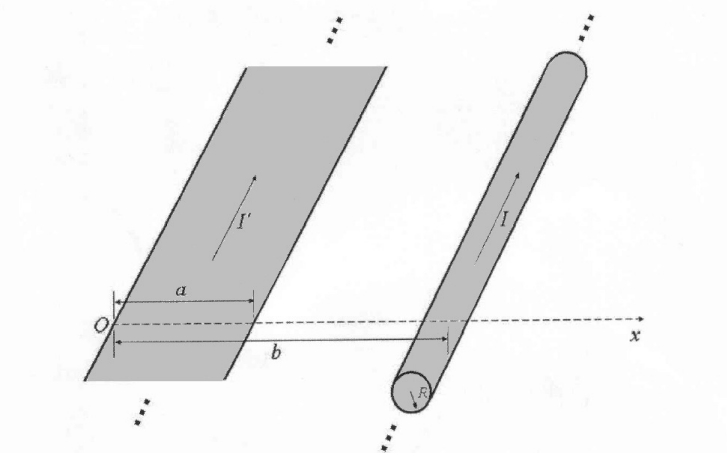
el cual es un campo uniforme

Problema

Se tiene un conductor cilíndrico de radio R, muy largo, con corriente I, y un conductor plano también muy largo con corriente superficial I'. Se supone que ambos conductores son paralelos y que el conductor plano y el eje de la corriente cilíndrica son coplanares. Si el plano conductor tiene ancho a, y el eje del cilindro se encuentra a distancia b del origen, encuentre

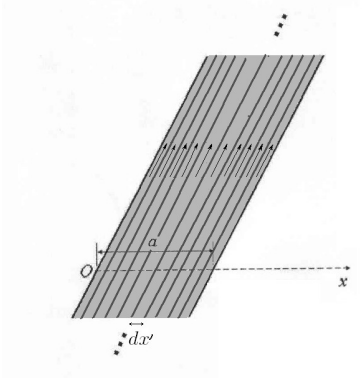
a) El campo magnético sobre el eje x, para $x > a$

b) La fuerza de interacción entre ambos conductores por unidad de largo



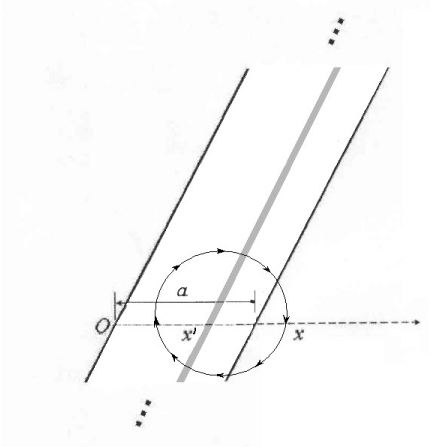
Solución

Resolvemos el problema por superposición. El plano de corriente puede ser visto como una superposición de corrientes lineales muy delgadas, de ancho diferencial dx', como se muestra en la figura



Nos concentramos entonces en la porción de plano contenida entre x y $x + dx$. Este alambre lleva una corriente

$$dI = I' \frac{dx}{a}$$



El campo magnético sobre el eje a distancia x del origen (con $x > a$) se puede obtener mediante la ley de Ampère, integrando sobre la curva circular Γ centrada en x' y de radio $x - x'$. La magnitud del campo magnético alrededor de la curva es constante e igual a la magnitud del campo en x

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = B(x)2\pi(x - x') = \mu_0 I' \frac{dx'}{a}$$

$$\vec{B}(x) = -\frac{\mu_0 I' dx'}{2\pi a(x - x')}\hat{k}$$

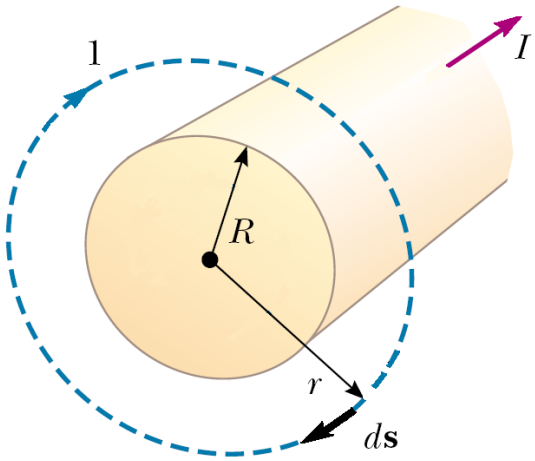
Entonces el campo magnético en x debido a la distribución plana es

$$\vec{B}(x)_1 = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi a}\int_0^a \frac{dx'}{x - x'}\hat{k} = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi a}\ln(x - x')\Big|_0^a \hat{k}$$

Así, para $x > a$

$$\vec{B}(x)_1 = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi a}\ln\left(\frac{x}{x - a}\right)\hat{k}$$

Para el cilindro de radio R, distinguimos dos regiones: dentro y fuera del cilindro. El campo magnético exterior se obtiene de una aplicación inmediata de la ley de Ampère



El sentido de $\vec{B}$, consistente con la dirección de la corriente, se indica en la figura

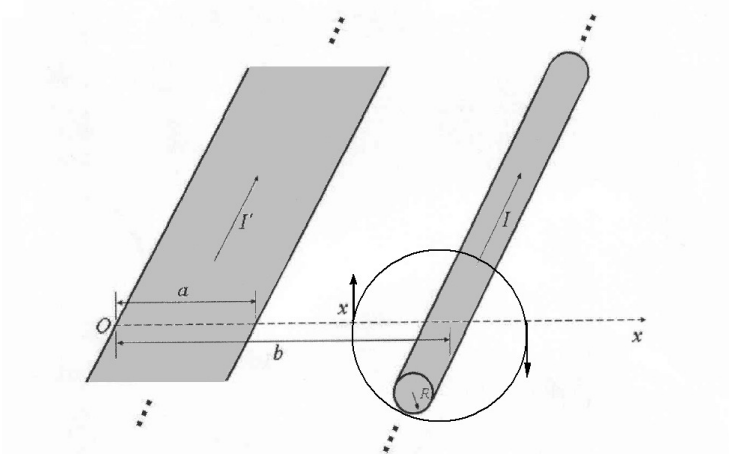
$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

donde r es la distancia radial con respecto al centro del cilindro. De esta forma, en el punto x, con $a < x < b - R$

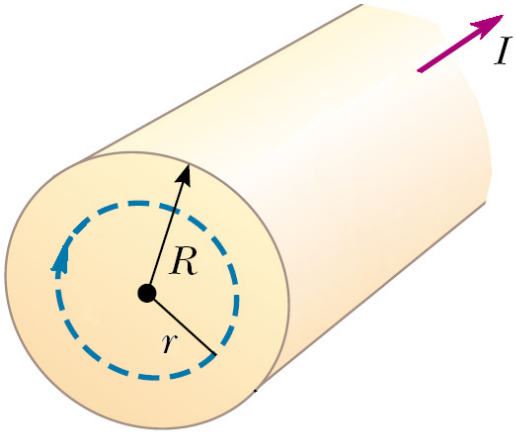
$$\vec{B}_2(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b - x)}\hat{k}$$



Para $x > b + R$

$$\vec{B}_2(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-b)}\hat{k}$$

Ahora, para el campo al interior del conductor cilíndrico, nuevamente se utiliza la ley de Ampère



$$\oint_\Gamma d\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x})\hat{n}(\vec{x})\cdot\vec{J}(\vec{x})$$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x})\hat{j}\cdot J\hat{j} = \mu_0 J\pi r^2$$

donde

$$J\pi R^2 = I \rightarrow J = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B(r) = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi R^2}$$

Finalmente, tenemos lo siguiente. Para $a < x < b - R$

$$\vec{B}(x) = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(b-x)} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

Para $b - R < x < b$

$$\vec{B}(x) = \left(\frac{\mu_0 I(b-x)}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

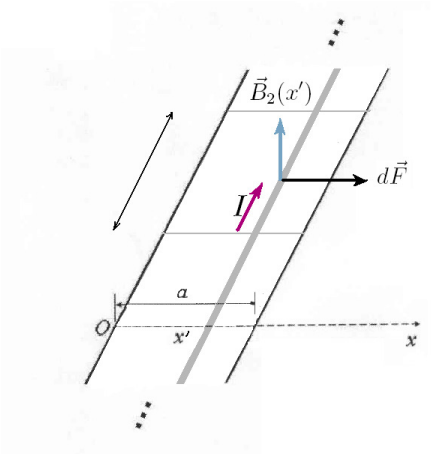
Para $b < x < b + R$

$$\vec{B}(x) = -\left(\frac{\mu_0 I(x-b)}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

Para $b + R < x$

$$\vec{B}(x) = -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-b)} + \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln \frac{x}{x-a} \right) \hat{k}$$

b) Para calcular la fuerza por unidad de largo que ejerce el cilindro sobre la distribución plana de corriente, calculemos la fuerza que se ejerce sobre el segmento lineal de largo 1, y ancho dx' en la posición x'



La fuerza que actúa sobre este segmento es

$$d\vec{F}(x') = \frac{I'dx'}{a}\hat{j} \times B_2(x')\hat{k} = \frac{I'dx'}{a}\frac{\mu_0 I}{2\pi(b-x)}\hat{j} \times \hat{k}$$

$$d\vec{F}(x') = \frac{I'\mu_0 I dx'}{2\pi a(b-x)}\hat{i}$$

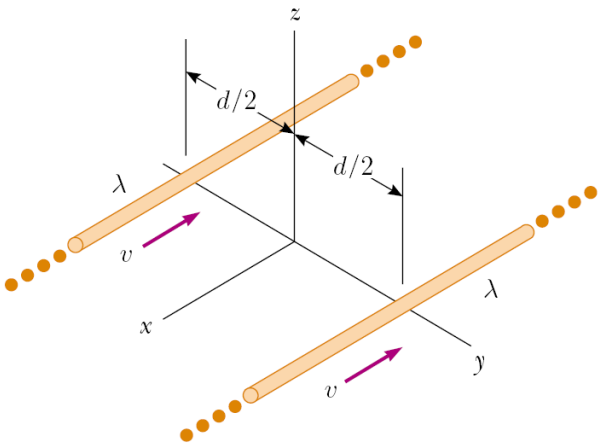
Por superposición, la fuerza neta por unidad de largo que se ejerce sobre el plano es

$$\vec{F} = \int_0^a dx' \frac{\mu_0 I I'}{2\pi a(b-x)}\hat{i}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi a} \ln\left(\frac{b}{b-a}\right)\hat{i}$$

Problema

Suponga que tiene dos cables infinitamente largos con densidad lineal de carga λ, separados por una distancia d, moviéndose a velocidad v constante. Encuentre el valor de v para que la atracción magnética se compense con la repulsión eléctrica. ¿Es razonable este resultado?



Solución

El campo eléctrico generado por el cable izquierdo sobre el cable derecho está dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{j}$$

De esta forma, la fuerza eléctrica por unidad de largo será

$$\vec{F}_L^e = \lambda\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{j} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{j}$$

Por otro lado, los alambres en movimiento equivalen a una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dx}{dt} = \lambda v$$

El campo magnético generado por el cable izquierdo sobre el derecho es

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{k} = -\frac{\mu_0\lambda v}{2\pi d}\hat{k}$$

En este caso, la fuerza magnética por unidad de largo sobre el cable derecho será

$$\vec{F}_L^m = -I\hat{i} \times \left(-\frac{\mu_0\lambda v}{2\pi d}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_L^m = -\frac{\mu_0\lambda^2 v^2}{2\pi d}\hat{j}$$

Para que éstas fuerzas se anulen

$$\vec{F}_L^e + \vec{F}_L^m = 0$$

$$\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{\mu_0\lambda^2 v^2}{2\pi d}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} = \mu_0 v^2$$

La velocidad debe ser

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Evaluando

$$v = \frac{1}{\sqrt{8{,}85 \times 10^{-12} \times 4\pi 10^{-7}}} = 3 \times 10^8$$

Esta es la velocidad de la luz en el vacío!. Claramente este curioso resultado no es razonable, ya que para tratar problemas con velocidades altas se debe usar la electrodinámica relativista

13.1. Potencial Vectorial

A partir de la ley de Biot-Savart se demostró que el campo magnético satisface la siguiente relación integro-diferencial

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla} \times \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Es decir, el campo magnético es el rotor de un campo vectorial, cuya forma más general es

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

donde ψ es un campo escalar arbitrario(función de Gauge). Sea cual sea el campo ψ, el campo magnético obtenido a partir de $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$ es siempre el mismo. Veamos que ocurre con

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla}^2\psi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla}^2\psi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla}^2\psi$$

la condición de corriente estacionaria entrega

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla}^2\psi$$

y del teorema de la divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oiint d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{\nabla}^2\psi$$

La condición de corriente localizada da

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2\psi$$

Para todo ψ. De esta forma, podemos perfectamente escoger un Gauge tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

Este es llamado **Gauge de Coulomb**.

13.2. Ecuación de Poisson y Laplace

Como el campo magnético es de divergencia nula, existe un campo vectorial $\vec{A}(\vec{x})$ tal que

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$$

Luego

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}(\vec{x})$$

El potencial puede ser escogido como un campo de divergencia nula (Gauge de Coulomb), luego

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x})$$

Además, de la forma diferencial de la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

De esta forma, el potencial vectorial bajo el gauge de Coulomb satisface la **ecuación de Poisson**

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{x})$$

en regiones del espacio libre de corrientes, se obtiene la **ecuación de Laplace**

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

13.3. Expansión Multipolar del campo magnético

Sea una distribución localizada de corriente dentro de un volumen V. El potencial vectorial está dado por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Veamos que ocurre muy lejos de las fuentes, es decir, analizaremos el caso $\mid \vec{x}' \mid << \mid \vec{x} \mid$

$$\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^{-1} = \left(\mid \vec{x} \mid^2 + \mid \vec{x}' \mid^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' \right)^{-1/2} = \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \left(1 + \frac{\mid \vec{x}' \mid^2}{\mid \vec{x} \mid^2} - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\mid \vec{x} \mid^2} \right)^{-1/2}$$

La expansión en taylor a primer orden entrega

$$\frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \approx \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\mid \vec{x} \mid^3} - \frac{1}{2} \frac{\mid \vec{x}' \mid^2}{\mid \vec{x} \mid^3} + ...$$

Luego, el potencial vectorial lejos de las fuentes tiene la forma

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi \mid \vec{x} \mid} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi \mid \vec{x} \mid^3} \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \vec{x} + ...$$

Ahora, la primera integral es nula, para ello demostraremos el siguiente lema: $\forall f, g$

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot [f(\vec{x}) \vec{\nabla} g(\vec{x}) + g(\vec{x}) \vec{\nabla} f(\vec{x})] = 0$$

la demostración es la siguiente

$$\iiint_V d^3x \left(\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} fg \right) = \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} fg \right) - \iiint_V d^3x fg \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Usando la condición de corriente estacionaria y el teorema de la divergencia

$$\iiint_V d^3x \left(\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} fg \right) = \oiint_{\delta V} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) fg = 0$$

Tomando $f(\vec{x}) = 1$, $g(\vec{x}) = x$

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} x = \iiint_V d^3x J_x(\vec{x}) = 0$$

Del mismo modo se puede demostrar que la integral de las componentes en y e z es nula. Así

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) = \vec{0}$$

En otras palabras, corrientes estacionarias localizadas no generan monopolos magnéticos!. Mas aún, utilizando el mismo teorema , podemos encontrar una nueva expresión para la segunda integral de la expansión. Tenemos

$$\iiint_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot [f(\vec{x}) \vec{\nabla} g(\vec{x}) + g(\vec{x}) \vec{\nabla} f(\vec{x})] = 0, \forall f, g$$

tomando la componente a-ésima

$$\iiint_V d^3x \vec{J}_a(\vec{x}) \vec{\nabla}_a (fg) = 0$$

tomando $fg = x_b x_c$

$$\iiint_V d^3x \vec{J}_a \vec{\nabla} a(x_b x_c) = \iiint_V d^3x \vec{J}_a \left(x_b \delta_{ac} + x_{cab}\right)$$

$$= \iiint_V d^3x \left(J_c x_b + J_b \vec{x}_c\right) = 0$$

luego

$$\iiint_V d^3x [x_a J_b(\vec{x}) + x_b J_a(\vec{x})] = 0$$

De esta forma, tomando la componente a-ésima de la siguente integral

$$\left(\iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}' \cdot \vec{x}\right)_a = \iiint_V d^3x' J'_a x'_b x_b = \frac{1}{2} \iiint_V d^3x' \left(J'_a x'_b - J'_b x'_a\right) x_b$$

y es fácil verificar que

$$\left(\iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}' \cdot \vec{x}\right)_a = \left(\frac{1}{2} \iiint_V d^3x' [\vec{x} \times \left(\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{x}'\right)]\right)_a$$

Así, se obtiene

$$\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3} \times \iiint_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{x}'$$

Se define el **momento magnético** de una distribución de corriente localizada en V como

$$\mu = \iiint_V d^3x' \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}')$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{\mid \vec{x} \mid^3}$$

Es decir, el potencial vectorial (y por lo tanto el campo magnético) muy lejos de la fuente está completamente determinado (a primer orden) por el momeno magnético de la distribución de carga.

13.4. Magnetismo en la materia

13.4.1. Magnetización

La materia consiste en de una colección de momentos magnéticos. En los materiales no magnéticos, estos momentos están alineados de forma arbitraria, así se cancelan unos a otros y no hay un efecto neto de campo magnético debido a este material. Sin embargo, como hemos visto, ante la prescencia de un campo magnético externo, los momentos magnéticos en el interior del material se alinearán en la dirección paralela al campo

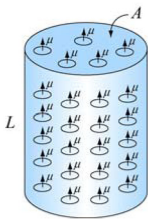
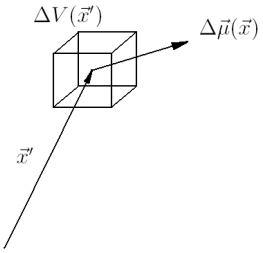


Fig. 13.1: Momentos magnéticos en un material se alinearán en la dirección paralela al campo externo

Estos momentos magnéticos crearán a su vez un campo magnético. Para obtener el efecto de esta magnetización, consideremos un elemento de volumen $\Delta V(\vec{x}')$ ubicado en algún punto interior de material $\vec{x}'$. Este elemento de volumen estará caracterizado por un momento magnético



$$\Delta\vec{\mu}(\vec{x}) = \sum_{a\in\Delta V(\vec{x}')} \vec{m}_a$$

donde la suma se realiza sobre cada átomo contenido en $\Delta V(\vec{x}')$. Definimos la **magnetización** del material como la densidad de momento magnético por unidad de volumen, esto es

$$\vec{M}(\vec{x}') = \left(\frac{\Delta\mu}{\Delta V}\right)\Big|_{\vec{x}'}$$

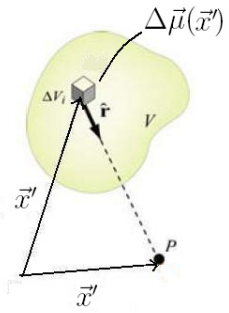
Veamos que ocurre con el campo magnético en un punto $\vec{x}$ fuera del material. El potencial estará dado por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \vec{A}_M(\vec{x})$$

donde $\vec{A}_L(\vec{x})$ es el potencial magnético del campo externo y $\vec{A}_M(\vec{x})$ el potencial debido a la magnetización del medio.

En $\vec{x}' \in V$ hay un momento magnético dado por

$$\mu(\vec{x}') = \vec{M}(\vec{x}')\Delta V(\vec{x}')$$



El potencial en $\vec{x}$ debido a este momento magnético puntual está dado por

$$\Delta\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\Delta\mu(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

El potencial total en $\vec{x}$ debido al material se obtiene al integrar sobre V

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V d^3x' \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

Ahora, se tiene

$$\frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = \vec{M}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}'\frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

de forma que

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}\right)$$

Finalmente

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{\delta V} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \times \vec{M}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Recordando que el potencial magnético de una distribución de corriente libre en un volumen V está dado por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

es inmediato notar que todo sucede como si dentro del material existiera una densidad de corriente estacionaria

$$\vec{J}_M(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x})$$

y como si en el contorno del material hubiera una densidad de corriente superficial

$$\vec{\sigma}_M(\vec{x}) = -\hat{n}(\vec{x}) \times \vec{M}(\vec{x})$$

Notar que

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_M(\vec{x}) = 0$$

(como debe ser para una corriente estacionaria), y

$$\hat{n}(\vec{x}) \cdot \sigma_M(\vec{x}) = 0$$

(como debe ocurrir para una corriente localizada). Luego, el efecto de un campo magnético externo sobre un medio material se puede resumir en una distribución de corriente estacionaria y localizada dentro del medio, el potencial en $\vec{x}$ debido a esta corriente de magnetización está dado por

$$\vec{A}_M(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V d^3x' \frac{\vec{J}_M(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\delta V} dS(\vec{x}') \frac{\sigma_M(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

13.5. Leyes fundamentales en un medio magnetizado

Queremos ver como se pueden reescribir las leyes fundamentales del campo magnético en el interior de un medio material. En todo punto dentro del material, se tendrán una densidad de corriente de carga libre, $\vec{J}_L(\vec{x})$, y una densidad de corriente de magnetización $\vec{J}_M(\vec{x})$. Es decir

$$\vec{J}(\vec{x}) = \vec{J}_L(\vec{x}) + \vec{J}_M(\vec{x})$$

Escribiendo la ecuación rotacional para el campo magnético, se debe incluír por supuesto la densidad de corriente total

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) = \mu_0 \left(\vec{J}_L(\vec{x}) + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x}) \right)$$

Equivalentemente

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{x}) \right) = \vec{J}_L(\vec{x})$$

Definimos el campo $\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{x})$, y entonces

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}_L(\vec{x})$$

La gracia es que al lado derecho aparece únicamente la densidad de corriente libre. Todo el efecto del medio magnetizado se encuentra contenido en $\vec{H}(\vec{x})$ a través de la densidad de momento magnético $\vec{M}(\vec{x})$. Las ecuaciones fundamentales en un medio magnetizado son, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}_L(\vec{x})$$

Notar la total analogía con las leyes fundamentales de la electrostática en un medio

$$\vec{\nabla} \cdot D(\vec{x}) = \rho_L(\vec{x})$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

donde $\rho_L(\vec{x})$ es la densidad de carga libre. Recordar además que en ciertos materiales lineales, homogéneos e isotrópicos

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x}), \epsilon > 0$$

Esto se obtuvo de suponer que los momentos dipolares se alineaban en la dirección del campo eléctrico y que la respuesta era lineal en el campo eléctrico. De esta forma las dos ecuaciones fundamentales de la electrostática podían ser escritas como

$$\vec{\nabla} \cdot E(\vec{x}) = \frac{\rho_L(\vec{x})}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

donde la única diferencia con las leyes en el vacío es la permitividad ϵ, no necesariamente igual a ϵ_0. (de hecho, siempre es mayor o igual). Notar que esto implica que el efecto de un medio dieléctrico es el de disminuír la magnitud del campo eléctrico en su interior. En cambio, con el campo magnético, podría suceder que el material aumentara la magnitud del campo magnético total, lo que veremos a continuación

13.6. Relaciones constitutivas del material

Se tiene

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{x})$$

La magnetización $\vec{M}(\vec{x})$ es, por supuesto, una función del campo magnético

$$\vec{M}(\vec{x}) = \vec{G}(\vec{B}(\vec{x}))$$

En consecuencia

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{B}(\vec{x}))$$

o equivalentemente

$$\vec{B}(\vec{x}) = F(\vec{H}(\vec{x}))$$

Si el medio es **lineal**, la relación entre cada componente de $\vec{B}$ y cada componente de $\vec{H}$ es lineal

$$\vec{B}_a(\vec{x}) = F_{ab}(\vec{x})\vec{H}_b(\vec{x})$$

Si el medio es **homogéneo**, entonces la relación entre $\vec{B}(\vec{x})$ y $\vec{H}(\vec{x})$ es la misma en cada punto

$$\vec{B}_a(\vec{x}) = F_{ab}\vec{H}(\vec{x})_b$$

Por último, si el medio es **isotrópico**, $F_{ab} = \mu\delta_{ab}$, o simplemente

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu\vec{H}(\vec{x})$$

donde μ es una constante llamada **permeabilidad magnética** del material.
Con esto las leyes fundamentales quedan de la siguiente manera

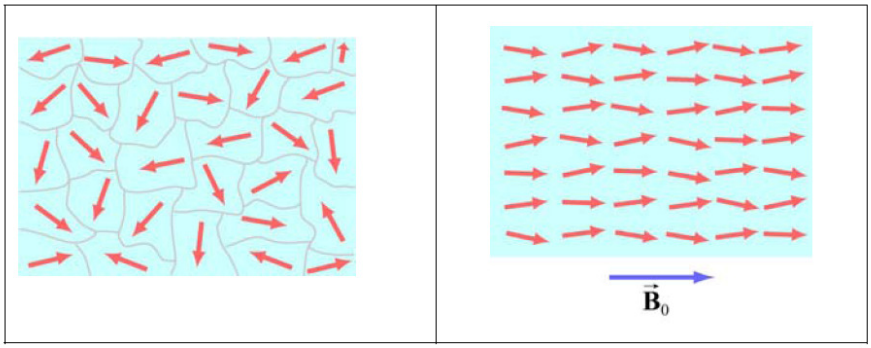
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu\vec{J}_L(\vec{x})$$

Es decir, la ley de Ampère es exactamente la misma, exceptuando que ahora la permeabilidad no es necesariamente igual a la del vacío. Lo interesante es que para ciertos medios, llamados **paramagnéticos**, $\mu > \mu_0$, y el material magnetizado tiende a aumentar la magnitud del campo magnético. Por el contrario, para medios llamados **diamagnéticos** $\mu < \mu_0$, y la magnitud del campo magnético es debilitada

13.7. Ferromagnetismo

Existe otro tipo de materiales, llamados ferromagnéticos. En ellos existe una interacción fuerte entre momentos magnéticos cercanos. Este tipo de materiales está constituído por dominios, como se ilustra en la figura . Un campo magnético externo tiende a alinear los momentos magnéticos en la dirección paralela al campo externo. La interacción entre los momentos magnéticos vecinos causa un alineamiento mucho más fuerte



El aumento en la magnitud del campo magnético puede ser considerable, de hecho la magnitud el campo magnético en el interior de un material ferromagnético puede ser 10^3 o 10^4 veces mas grande que la del campo externo aplicado. El comportamiento de un material ferromagnético es **no lineal**, de forma que no podemos caracterizarlo por una permeabilidad magnética constante. De hecho, la relación $\vec{B} = F(\vec{H})$ no es monovalente, o dicho de otra forma, depende de la historia previa del material. Este fenómeno es conocido como **histéresis**. En la figura se muestra la variación de la magnetización ante la prescencia de un campo magnético externo, partiendo desde a

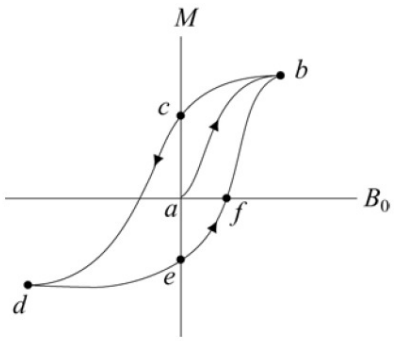


Fig. 13.2: Curva de histéresis

Notar que cuando el campo magnético externo vuelve a ser nulo (c), una magnetización sigue presente. Es decir, la fuerte interacción entre momentos magnéticos cercanos puede mantenerlos alineados, incluso cuando un campo magnético externo se reduce a cero. Estos momentos

alineados puede producir campos magnéticos fuertes, sin la necesidad de un campo magnético externo, este es el origen de los imagnes permanentes.

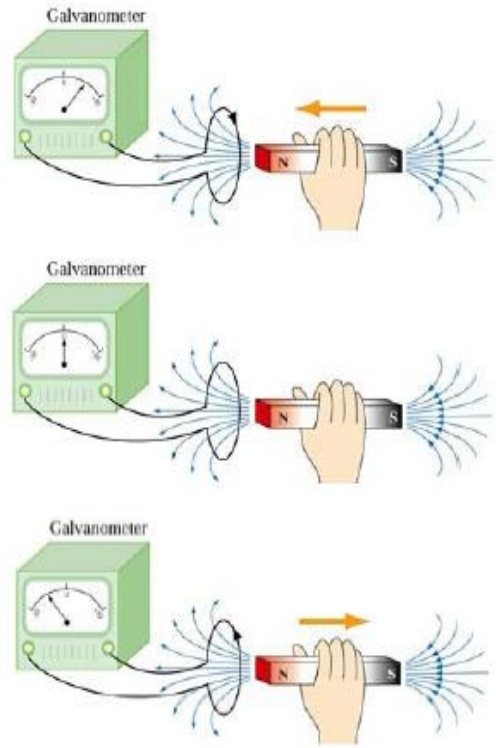
Capítulo 14

Ley de Inducción de Faraday

Los campos eléctricos y magnéticos que hemos considerado hasta ahora han sido producidos por cargas y corrientes estacionarias. A principios del siglo XIX ya era bien sabido que imponiendo una diferencia de potencial entre dos conductores, el campo eléctrico en el interior originaba una corriente de electrones, que a su vez crea un campo magnético a su alrededor. Era válido entonces preguntarse si un campo eléctrico podía o no ser producido por un campo magnético. Diversos intentos se realizaron, hasta que en 1831, Michael Faraday descubrió que una corriente eléctrica se genera en un conductor cuando éste **se mueve** en la cercanía de un imán. Pero, en su época, tal fenómeno, conocido ahora como **inducción magnética**, no parecía ser más que una simple curiosidad.

El notable físico Richard Feynman contaba en sus cursos de Física en Caltech, que cuando Faraday presentó su descubrimiento a la comunidad científica, alguien le preguntó para qué servía, a lo cual Faraday respondió con otra pregunta: *¿para qué sirve un recién nacido?* Medio siglo después, Tomás Edison tuvo la idea de utilizar el descubrimiento de Faraday para generar corriente eléctrica y distribuirla a través de cables por la ciudad de Nueva York. La primera planta eléctrica de la historia fue inaugurada en 1881, y consistía en unas enormes turbinas de vapor que hacían girar unas grandes bobinas de alambre conductor alrededor de imanes. Debido al efecto Faraday se generaba una corriente eléctrica que se podía transmitir por toda la ciudad. La energía térmica se convertía, así, en **energía eléctrica**. Pocos meses después se inauguró la primera planta hidroeléctrica, en la que el agua de un río hacía girar las bobinas.
Toda la electricidad que consumimos hoy en día se genera gracias al efecto Faraday. Lo único que varía es el mecanismo utilizado para hacer girar una bobina alrededor de un imán: este mecanismo puede ser el flujo del agua en una presa, el funcionamiento de un motor de combustión de petróleo, la presión del vapor de agua calentada por el uranio en una planta nuclear, en otras palabras, Faraday descubrió el principio fundamental de la **conversión electromecánica de la energía** (el recién nacido creció espectacularmente, como diría Feynman).

El experimento de Faraday consiste en una espira conductora y un imán.



Faraday mostró que el galvanómetro no mide ninguna corriente cuando el imán está estacionario con respecto a la espira. Sin embargo, se **induce** una corriente cuando existe un movimiento relativo entre el imán y la espira, en particular, el galvanómetro marca en una dirección cuando el imán se acerca, y en la dirección opuesta cuando el imán se aleja.

14.1. Ley de Inducción

La descripción formal es la siguiente, sea Γ una curva que describe la forma del conductor, entonces

$$\varepsilon_\Gamma(t) = \oint_{\Gamma[t]} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)$$

Es la fuerza electromotriz inducida en Γ. Notar que es una cantidad dinámica que puede evolucionar en el tiempo, ya que ahora aceptaremos que los campos eléctricos y magnéticos puedan variar con el tiempo. Del mismo modo

$$\Phi_B(t) = \iint_{S_\Gamma(t)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}, t)$$

es el flujo magnético a través de S_Γ

El experimento de Faraday muestra que una corriente eléctrica es inducida en la espira al cambiar el flujo magnético que la atraviesa. Se comporta entonces como si estuviera conectada a una fuente de f.e.m. Experimentalmente se encuentra que esta f.e.m inducida depende de la tasa a la que varía el flujo magnético a través de la espira, esto es

$$\varepsilon_\Gamma = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

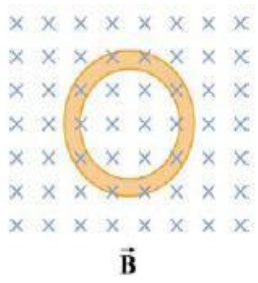
La unidad SI del flujo magnético es el Weber $(Wb) = 1\ T\ m^2$
La ley de Faraday se puede enunciar como sigue: La f.e.m inducida en un circuito cerrado es igual a la tasa negativa de cambio del flujo magnético a través del área encerrada por la espira

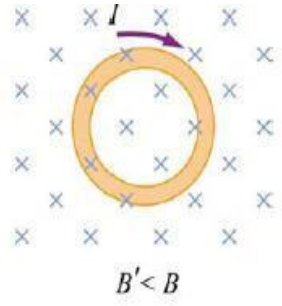
El signo menos indica que la corriente inducida en la espira tiende a oponerse a este cambio de flujo. Existen muchas formas de inducir una fem en una espira. Por ejemplo si consideramos un caso particular en donde el campo magnético es uniforme (espacialmente), la espira es plana y su normal forma un ángulo ϑ con el campo magnético, se tiene

$$\varepsilon = -\frac{d(BS\cos\vartheta)}{dt} = -\left(\frac{dB}{dt}\right)S\cos\vartheta - B\left(\frac{dS}{dt}\right)\cos\vartheta + BS\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

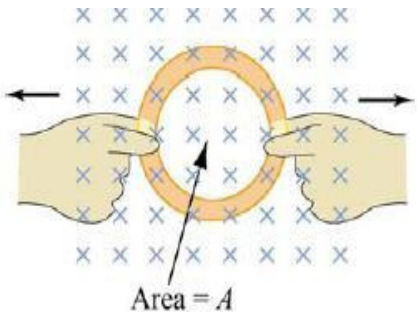
A partir de esto, vemos que una f.e.m inducida se puede producir de las siguientes formas

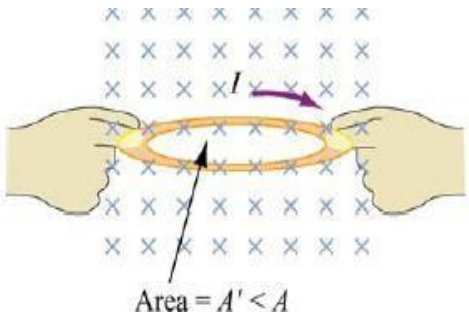
1. Al variar la magnitud de $\vec{B}$ en el tiempo (por ejemplo ocurre cuando en un circuito cercano la corriente varía)



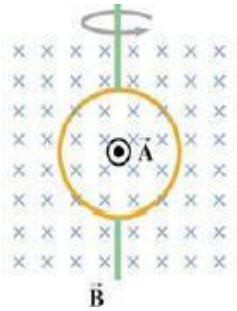


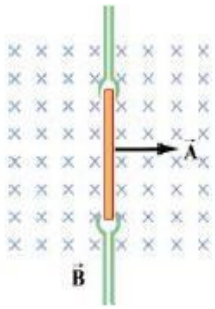
2. Al variar la magnitud de $\vec{S}$, es decir, el área encerrada por la espira en el tiempo





3. Al variar el ángulo entre $\vec{B}$ y el vector de superficie $\vec{S}$ en el tiempo





Este último es el principio más utilizado en centrales de generación

Es fácil obtener el sentido de la corriente inducida, ya que ésta produce un campo magnético que tiene a oponerse al cambio del flujo magnético que induce dicha corriente. Ésta se conoce como Ley de Lenz. (aunque se deduce completamente de la ley de Inducción!)

Esta ley, que introduce una relación dinámica distante entre $\vec{E}(\vec{x},t)$ y $\vec{B}(\vec{x},t)$, variables en el tiempo, sugiere que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son objetos físicos **reales**. **No son intermediarios puramente matemáticos** introducidos para facilitar los cálculos [1]

14.2. Forma diferencial de la ley de Inducción

Consideremos un circuito de prueba Γ fijo, es decir $\Gamma(t) = \Gamma$

$$\varepsilon_{\Gamma(t)} = \oint_{\Gamma} dx \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(x,t)$$

$$\oint_{\Gamma} dx \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = - \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(x,t)$$

Por el teorema de Stokes

$$\iint_{S(\Gamma)} dS(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x},t)\right) = - \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(x,t)$$

válido para todo S(fijo), luego se obtiene la ley diferencial de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x},t) = 0$$

Esta es una de las ecuaciones de Maxwell para campos que varían en el tiempo, y es una generalización para el rotor de $\vec{E}(\vec{x})$, en donde **sólo para casos estáticos** (la primera parte del curso)

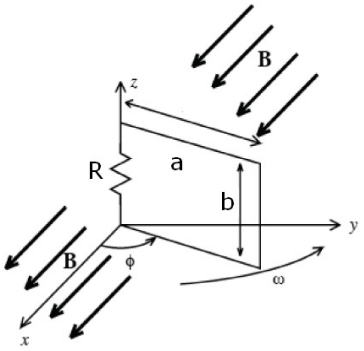
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Notar, que sólo en ése caso el campo $\vec{E}$ es conservativo.

[1] Hypothesis non fingo de Newton se viene abajo en Electromagnetismo

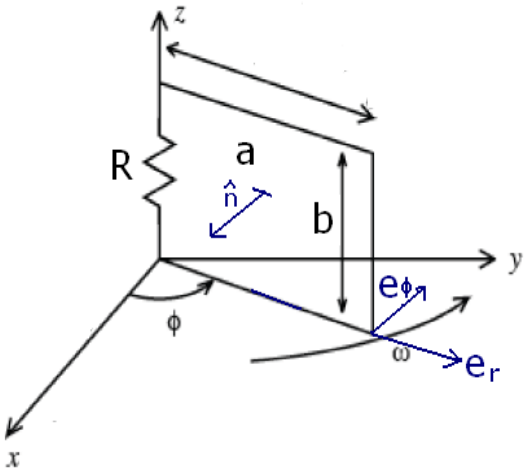
Problema

La espira rectangular de la figura se encuentra sumergida en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{x}$. Si la espira gira con velocidad angular w utilizando el eje z como eje de rotación, y asumiendo que en $t = 0$ la espira se encuentra en el plano y-z, determine la fuerza electromotriz inducida y la corriente inducida en la espira



Solución

Definiendo la normal a la espira rectangular como en la figura



Según ésta definición, la normal es en todo instante igual a $-\hat{e}_\phi$, es decir

$$\hat{n} = -(-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) = \sin\phi\hat{x} - \cos\phi\hat{y}$$

De esta forma, y dado que el campo magnético es uniforme, el flujo a través de la espira es

$$\Phi_B = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot S\hat{n} = BS\sin\phi$$

Es decir

$$\Phi_B = Bab\sin\phi$$

Tenemos una expresión del flujo magnético a través de la espira en función del ángulo polar ϕ. La idea es obtener el flujo en función del tiempo, para ello observamos que

$$\frac{d\phi}{dt} = w \rightarrow \phi(t) = wt + C$$

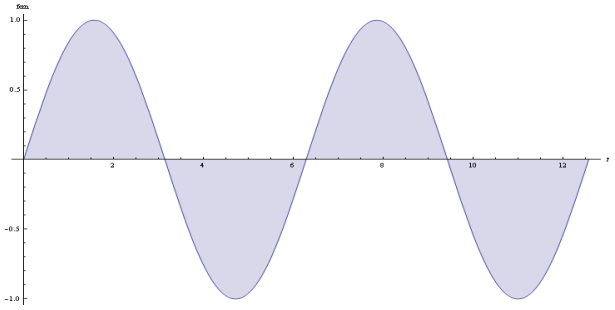
La constante C es fácil de determinar, considerando que en $t = 0$, la espira se ubica en el eje y-z, es decir, $\phi_0 = \pi/2$. Así

$$\Phi_B = Bab\sin(wt + \pi/2)$$

A partir de la ley de inducción de Faraday, podemos obtener la magnitud de la fem inducida en la espira

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Babw\cos(wt + \pi/2)$$

Vemos que la fem es alterna y varía de forma sinusoidal, como se aprecia en la figura



Esta es la forma típica de generación alterna. La tensión que llega a nuestras casas también varía de forma sinusoidal, a una frecuencia de 50 Hz y valor efectivo de 220 Volts.
La magnitud de la corriente es, simplemente

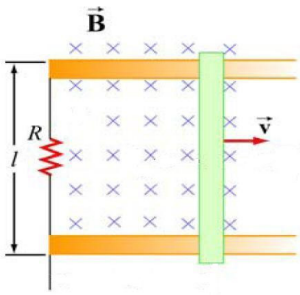
$$I = \frac{|\,\varepsilon\,|}{R} = \frac{Babw}{R}\cos(wt + \pi/2)$$

Problema

Considere la disposición que se muestra en la figura. Suponga que $R = 6\Omega$, $l = 1,2$ m y un campo magnético uniforme de $2,5$ T está dirigido hacia el interior de la página.

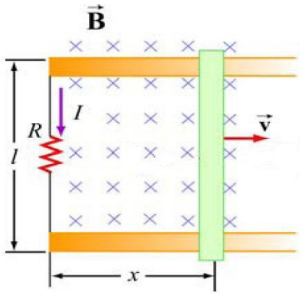
a) ¿A qué rapidez deberá moverse la barra para producir una corriente de 0,5 A en la resistencia?

b) Calcule la fuerza que se debe ejercer sobre la barra en este caso



Solución

a) Consideremos el circuito cerrado formado por la barra y los rieles.



Definamos al vector de superficie como $\vec{S} = -S\hat{k}$. (Hacia dentro del papel) Supongamos que la barra se encuentra a una distancia x del riel izquierdo, según esto, el flujo magnético sobre la superficie plana encerrada por este circuito es

$$\Phi_B = BA = Blx$$

Ahora, utilizando la ley de Faraday obtenemos que la fem inducida en el circuito

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt}$$

Pero dx/dt es simplemente la velocidad de la barra, así

$$\varepsilon = -Blv$$

La correspondiente corriente inducida es

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

Y el sentido de ésta se deduce de la ley de Lenz. Notemos que mientras la velocidad de la barra sea positiva (y entonces se mueve hacia la derecha) el flujo magnético aumenta. Le ley de Lenz dice que la corriente inducida intentará siempre oponerse al cambio de flujo magnético que la origina. Es decir, el sentido de la corriente será tal que intentará frenar a la barra.

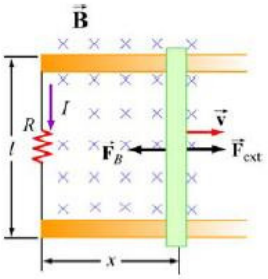
Notar que en la figura anterior se ha supuesto un sentido para la corriente. Éste podría ser correcto o no. Según el sentido de la corriente que aparece en la figura, habrá una fuerza magnética sobre la barra en la direccion $-\hat{i}$, que justamente intentará frenar a la barra, por lo tanto ese será el verdadero sentido de la corriente. Despejando

$$v = \frac{RI}{Bl}$$

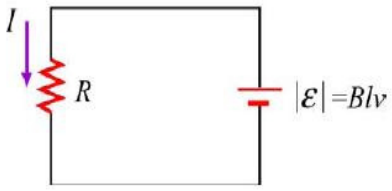
reemplazando los valores numéricos

$$v = \frac{6 \times 0{,}5}{2{,}5 \times 1{,}2} = \frac{3}{3} = 1m/s$$

b) Vemos que sobre la barra actúan dos fuerzas



La fuerza externa es la fuerza que se debe ejercer sobre la barra para que se mueva a velocidad v. La fuerza magnética tiene relación con la corriente inducida que circula por el circuito, cuyo equivalente es



La fuerza magnética que experimenta la barra es simplemente

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} = I(l\hat{j}) \times (-B\hat{k})$$

$$\vec{F}_B = -IlB\hat{i} = -\frac{B^2l^2v}{R}\hat{i}$$

que apunta en la dirección opuesta a $\vec{v}$. Para que la barra se mueva a velocidad constante, la fuerza neta actuando sobre ella debe ser igual a cero. Así

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_B = \frac{B^2l^2v}{R}\hat{i}$$

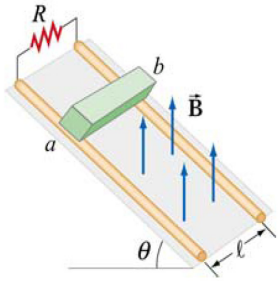
Notar que la potencia entregada por $\vec{F}_{ext}$ es igual a la potencia disipada en la resistencia (consecuencia de la conservación de la energía)

$$P = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = F_{ext} v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

$$P = \frac{(Blv)^2}{R} = \frac{\varepsilon^2}{R} = I^2 R$$

Problema

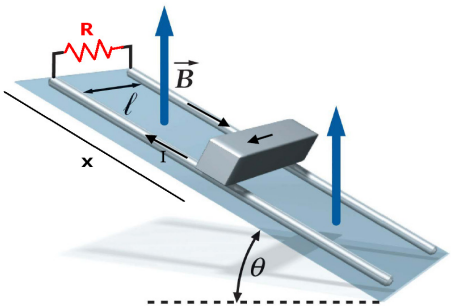
Una barra conductora de masa m y resistencia R desliza entre 2 rieles conductores sin fricción que forman un ángulo ϑ con la horizontal. y están separados una distancia l. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ es aplicado verticalmente. La barra se suelta del reposo y desliza habia abajo.



a) La corriente inducida en la barra. ¿En qué dirección fluye, de a hacia b o de b hacia a ?
b) La velocidad terminal de la barra
Una vez alcanzada la velocidad terminal
c) Cual es la corriente inducida?
d) A qué tasa se disipa energía en la resistencia?
e) Cual es la tasa de trabajo ejercido por la gravedad?

Solución

a) Supongamos que en un instante dado la barra se encuentra a una distancia x del extremo, como se ve en la figura



El circuito formado por los rieles y la barra que desliza encierra una superficie plana cuya normal es

$$\hat{n} = sin\vartheta\hat{x} + cos\vartheta\hat{y}$$

Y el flujo a través de esta superficie es

$$\Phi_B = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B} \cdot S\hat{n} = BS\cos\vartheta = Bxl\cos\vartheta$$

Con esto, la fem inducida en los extremos de la barra es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl\cos\vartheta\frac{dx}{dt}$$

Así, la corriente inducida está dada por

$$I = \frac{|\,\varepsilon\,|}{R} = \frac{Bl}{R}\cos\vartheta\frac{dx}{dt}$$

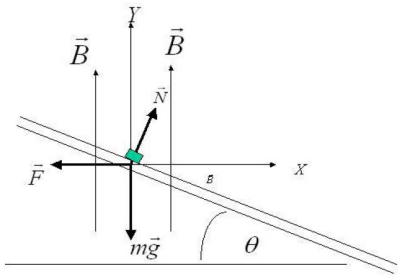
La magnitud de la corriente es tal que se opone al cambio de flujo, es decir, debe ser tal que sobre la barra actúa una fuerza magnética en la dirección -$\hat{x}$.

$$\vec{F}_B = I\vec{L}\times\vec{B} = I\vec{L}\times B\hat{j}$$

De aquí es claro que la corriente debe ir en la dirección $\hat{k}$ (es decir de b hacia a), de forma que

$$\vec{F}_B = IlB\hat{k}\times\hat{j} = -IlB\hat{x}$$

b)



Se tiene además que

$$mg\sin\vartheta - F_B cos\vartheta = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg\sin\vartheta - IlBcos\vartheta = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Recordando que

$$I = \frac{Bl}{R}\cos\vartheta\frac{dx}{dt}$$

se tiene

$$mg\sin\vartheta - \frac{l^2B^2}{R}cos^2\vartheta\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$g\sin\vartheta - \frac{l^2B^2}{mR}cos^2\vartheta\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$A - Bv = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{dv}{(A-Bv)}$$

$$t - t_0 = -\frac{ln(A-Bv)}{B}$$

$$-B(t-t_0) = ln(A-Bv)$$

Finalmente

$$e^{-B(t-t_0)} = A - Bv$$

$$\frac{A}{B} - \frac{1}{B}e^{-B(t-t_0)} = v$$

Si $t_0 = 0$

$$v(t) = \frac{mRg\sin\vartheta}{l^2B^2cos^2\vartheta} - \frac{mR}{l^2B^2cos^2\vartheta}e^{-\frac{l^2B^2}{mR}cos^2\vartheta t}$$

Para encontrar la velocidad terminal, simplemente vemos que ocurre en el límite cuando $t \to \infty$

$$v_t = \frac{mgRtg\vartheta sec\vartheta}{l^2B^2}$$

c) La corriente terminal está dada por

$$I = \frac{Bl}{R}\cos\vartheta v_t = \frac{mgtg\vartheta}{lB}$$

d) El módulo de la fem inducida en esta situación es

$$\mid \varepsilon \mid = \frac{mgRtg\vartheta}{lB}$$

la tasa a la cual se disipa energía en la resistencia es la potencia que consume, esta es

$$P = \mid \varepsilon \mid I = \frac{m^2g^2Rtg^2\vartheta}{l^2B^2}$$

e) La tasa de trabajo ejercida por la gravedad es

$$P_g = F_g v_t$$

donde F_g es la componente de la fuerza gravitacional en la dirección del desplazamiento

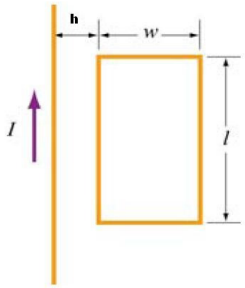
$$P_g = mg\sin\vartheta v_t = \frac{m^2g^2Rtg^2\vartheta}{l^2B^2}$$

que es lo mismo que la potencia que disipa la resistencia. Esto debe tenerse por el principio de conservación de la energía

Problema

Una espira de alambre en forma de rectángulo de largo l y ancho w, y un alambre recto paralelo al lado l y que lleva una corriente I, yacen sobre una mesa.
La distancia entre el alambre largo y el lado izquiero de la espira es h.
a) Determine el flujo magnético que atraviesa la espira.
b) Suponga que la corriente es una función del tiempo con $I(t) = a + bt$, con a y b constantes positivas. ¿Cuál es la f.e.m inducida en la espira y la dirección de la corriente inducida?

Solución



Usando la ley de Ampère para el alambre recto se obtiene que el campo a una distancia r de éste está dado por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k}$$

Es decir, apunta hacia dentro del papel. Definimos el vector de área como $\vec{S} = -S\hat{k}$ de modo que $\Phi_B > 0$. Para obtener el flujo total, simplemente debemos sumar los flujos sobre todos los pequeños elementos de área de largo l y ancho dr encerrados por la espira

$$\Phi_B = \iint_S d\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_h^{h+w} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}(ln(h+w) - ln(h))$$

Finalmente

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} ln\left(1 + \frac{w}{h}\right)$$

b)Utilizando la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 Il}{2\pi} ln\left(1 + \frac{w}{h}\right)\right)$$

Como las dimensiones de la espira permanecen constantes, lo único que varía en el tiempo es la corriente, y entonces

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} ln\left(1 + \frac{w}{h}\right)\frac{dI}{dt}$$

y sabemos que $dI/dt = b$, así

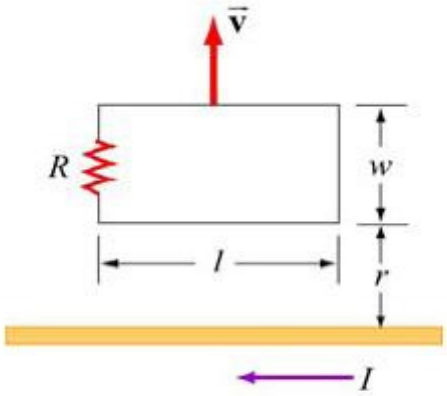
$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 lb}{2\pi} ln\left(1 + \frac{w}{h}\right)$$

Ahora, notemos que el alambre recto de corriente I produce un flujo magnético a través de la espira entrando a la pagina. Por la ley de Lenz, la corriente inducida en la espira debe fluír en el sentido contrareloj para así producir un campo magnético saliendo a través de la página para contrarrestar el incremento del flujo hacia adentro.

Problema

Una espira rectangular de dimensiones l y w se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ alejándose de un alambre recto infinitamente largo que lleva corriente I en el mismo plano de la espira. Sea la resistencia total de la espira R. ¿Cuál es la corriente en la espira en el instante en que el lado más cercano está a una distancia r del alambre?

Solución



Sabemos que el campo magnético a una distancia x del alambre recto está dado por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{k}$$

Apuntando hacia dentro del papel debido a la dirección de la corriente. Ahora, el flujo magnético sobre un elemento diferencial de área de largo l y ancho dx en la espira es

$$d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

donde hemos escogido el vector de superficie apuntando hacia dentro de la página, para que $\Phi_B > 0$. Integrando sobre toda la espira

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_r^{r+w}\frac{dx}{x}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} ln\left(1+\frac{w}{r}\right)$$

el mismo resultado del problema anterior. Derivando con respecto a t, obtenemos la fem inducida

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\frac{d}{dt} ln\left(\frac{r+w}{r}\right) = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\frac{1}{r+w}-\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{dt}$$

donde dr/dt es simplemente el módulo de la velocidad de la espira

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 I l v}{2\pi}\left(\frac{1}{r+w}-\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mu_0 I l v}{2\pi}\left(\frac{r-r-w}{r(r+w)}\right)$$

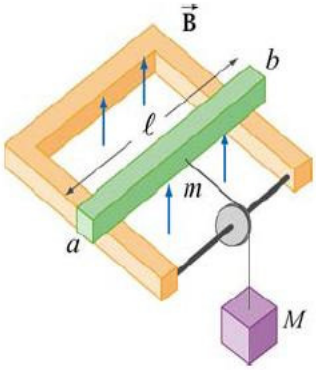
$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi}\frac{w}{r(r+w)}$$

Y la corriente inducida será simplemente

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi R}\frac{w}{r(r+w)}$$

Problema

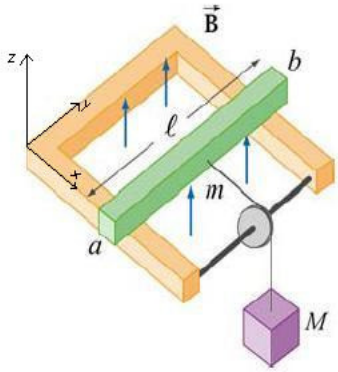
Una barra conductora de masa m y resistencia R es empujada en la dirección horizontal a través de dos rieles sin fricción apartados una distancia l, mediante un hilo de masa despreciable que pasa a través de una polea ideal y que está conectada a un bloque de masa M. Un campo magnético uniforme es aplicado verticalmente hacia arriba. La barra parte del reposo.



a) Sea la velocidad de la barra en algún instante igual a v. Encuentre una expresión para la corriente inducida. En qué dirección fluye, de a hacia b o de b hacia a?
b) Resuelva la ecuación diferencial para la velocidad de la barra en función del tiempo.

Solución

a) Sea nuestro origen de coordenadas la esquina inferior del sistema como se aprecia en la figura



Es una situación muy similar a la del problema 2, si escogemos el vector de superficie $\vec{S} = S\hat{k}$, entonces el flujo a través del circuito será positivo.
Supongamos que cuando la velocidad es v, la barra está a una distancia horizontal x del origen, así

$$\Phi_B = Bxl$$

y la fem inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

La corriente inducida será

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

b) Sea x la coordenada x del centro de masa de la barra en el instante t. El equilibrio de fuerzas para la barra es

$$\sum \vec{F} = T\hat{i} - I\vec{l} \times \vec{B} = T\hat{i} - Il\vec{j} \times B\hat{k} = (T - IlB)\hat{i} = m\frac{dx^2}{dt^2}\hat{i}$$

Para la masa M

$$\sum \vec{F} = Mg - T = M\frac{dy^2}{dt^2}$$

Debemos notar que $dx^2/dt^2 = dy^2/dt^2$, así

$$Mg - M\frac{dy^2}{dt^2} = Mg - M\frac{dx^2}{dt^2} = T$$

Así, el equilibrio de fuerzas para la barra queda

$$(Mg - M\frac{dx^2}{dt^2} - IlB) = m\frac{dx^2}{dt^2}$$

$$Mg - \frac{l^2B^2}{R}v = (m+M)\frac{dx^2}{dt^2}$$

Por último, hay que notar que $v = dx/dt$, y obtenemos una ecuación diferencial para v

$$\frac{dv}{dt} + \frac{l^2B^2}{R(M+m)}v - \frac{Mg}{M+m} = 0$$

la solución es de la forma

$$v(t) = Ce^{-\frac{B^2l^2}{R(M+m)}t} + \frac{MgR}{l^2B^2}$$

y la condición inicial es que $v(0) = 0$, así

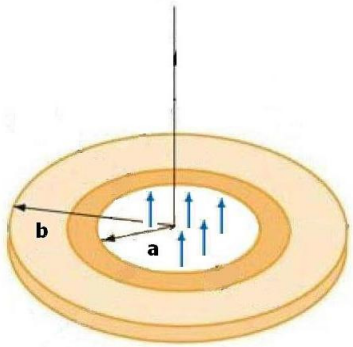
$$C + \frac{MgR}{l^2B^2} = 0 \rightarrow C = -\frac{MgR}{l^2B^2}$$

Finalmente

$$v(t) = \frac{MgR}{l^2B^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{R(M+m)}t}\right)$$

Problema

Un disco en cuyo borde se encuentra una carga uniformemente distribuída q, pende de un hilo vertical. En la región $r < a$ existe un campo magnético uniforme $B\hat{k}$.
Se desconecta la fuente de campo magnético, disminuyendo éste uniformemente a 0 en un intervalo corto de tiempo. Si el momento de inercia del disco es I, calcule la velocidad angular final de éste.



Solución

Inicialmente, se tiene un flujo constante a través de la región $r < a$ dado por

$$\Phi_{Bi} = B\pi a^2$$

donde hemos elegido la normal a la superficie según la dirección $\hat{k}$, de manera que $\Phi_B > 0$. Ahora, tomemos la curva C que coincide con el borde del disco, y utilizando la ley de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

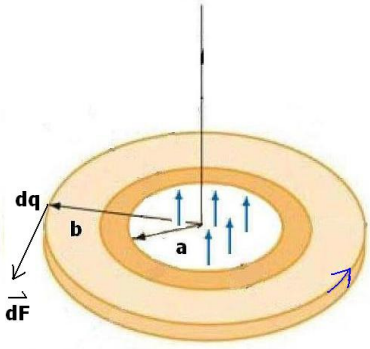
$$E2\pi b = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

lo que se puede reescribir como

$$E2\pi b dt = -d\Phi_B$$

$$E = -\frac{1}{2\pi b}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Este campo eléctrico genera una fuerza sobre cada elemento de carga en el borde del disco



$$\vec{dF} = E\lambda b d\vartheta \hat{\vartheta}$$

En consecuencia, se produce un diferencial de torque dado por

$$d\vec{\tau} = b\hat{r} \times \vec{dF} = E\lambda b^2 d\vartheta \hat{k}$$

$$d\vec{\tau} = -\frac{1}{2\pi b}\frac{d\Phi_B}{dt}\lambda b^2 d\vartheta \hat{k}$$

$$d\vec{\tau} = -\frac{\lambda b}{2\pi}\frac{d\Phi_B}{dt} d\vartheta \hat{k}$$

El torque total a un tiempo t estará dado por

$$\vec{\tau} = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\lambda b}{2\pi}\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

$$\vec{\tau} = -\lambda R \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Si $\vec{L}$ es el momento angular del disco con respecto al centro, entonces

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{d\tau}$$

$$-\lambda b \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

$$-\int_0^{t_f} dt \lambda b \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = \int_0^{t_f} dt \frac{dL}{dt}$$

$$-\lambda b \left(\Phi_B(t_f) - \Phi_B(0)\right) = L_f - L_i$$

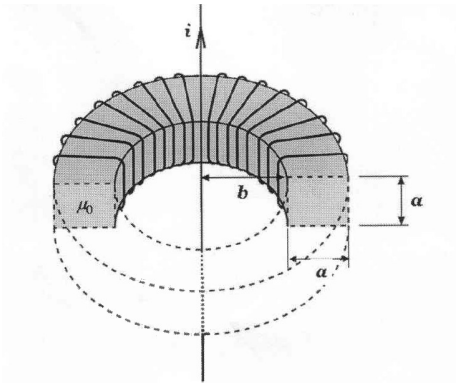
si el disco parte del reposo, $L_i = 0$, y además $\Phi_B(t_f) = 0$

$$\lambda b \pi a^2 B = I w_f$$

$$w_f = \frac{\lambda R \pi a^2 B}{I}$$

Problema

Se considera una bobina con N espiras cuadradas de lado a sin un medio material en el interior. Cada espira está a distancia b de un alambre recto y muy largo que lleva una corriente $I = I_0 \sin wt$, con w constante. Además, todas las espiras cuadradas son coplanares con el alambre recto. Calcule, en función de los datos I_0, w, a, b, la fem inducida entre los terminales de la bobina

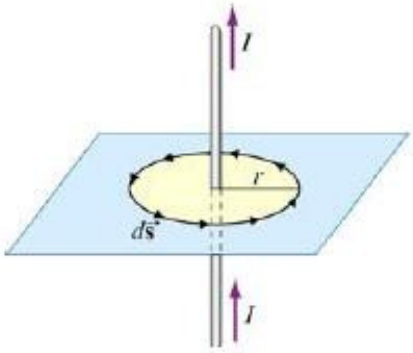


Solución

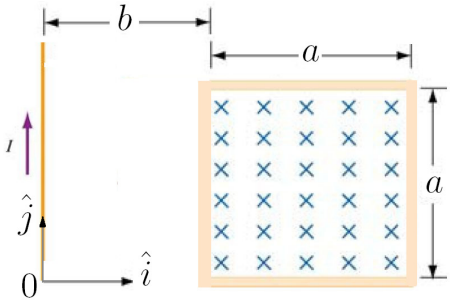
El campo magnético del alambre recto se obtiene fácilmente por la ley de Ampère, pues por la extensión infinita del alambre el campo debe tener una simetría cilíndrica radial, y debe ser tangente a trayectorias que son circunferencias concéntricas al alambre. De esta forma

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 2\pi r B(r) = \mu_o I(t)$$

donde Γ es una circunferencia concéntrica al alambre, de radio r



Calculemos ahora el flujo por una sola espira, como se muestra en la figura



Se tiene

$$\Phi = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

donde S es la superficie plana encerrada por la espira cuadrada. El campo magnético en el plano de la espira está dado por

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}\hat{k}$$

Escogiendo la normal unitaria en el sentido $-\hat{k}$, el flujo magnético queda

$$\Phi(t) = \int_0^a dy \int_0^a dx \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)$$

El flujo será el mismo sobre cada una de las N espiras, de forma que el flujo total sobre la bobina es

$$\Phi_T(t) = N\Phi(t) = \frac{N\mu_0 I(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)$$

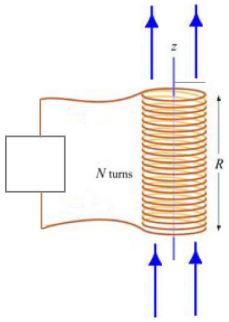
por la ley de Faraday, se inducirá una fem sobre la bobina dada por

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_T(t)}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{N\mu_0 w a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \cos wt$$

Problema

Una bobina circular plana de N vueltas tiene diámetro D y resistencia R. La bobina se orienta con su eje paralelo a un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$ uniforme, y los extremos de la bobina se conectan a un dispositivo capaz de medir la carga que pasa a través de él. Si la bobina se gira en 180 grados sobre un eje perpendicular al campo magnético, el dispositivo mide una carga Q. Encuentre el valor de B en términos de N, D, R y Q



Solución

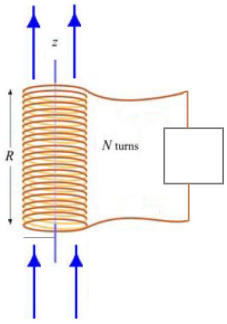
En la situación inicial, el flujo magnético a través de la bobina es constante y está dado por

$$\Phi = N \iint_S dS(\vec{x})\hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

orientando la normal a la espira según $\hat{n} = \hat{k}$, se tiene

$$\Phi = N \iint_S dS(\vec{x})\hat{k} \cdot B\hat{k} = NB \iint_S dS(\vec{x}) = NB\pi \left(D/2\right)^2$$

La espira se gira en 180 grados, de forma que la situación final es la siguiente



Mientras la espira gira, se induce una fem ε entre sus extremos, ya que el flujo magnético Φ varía. Si se induce una fem, se induce una corriente

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R}$$

y

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Supongamos que la espira demora un tiempo T en girar en 180 grados, luego la carga que pasará por el detector es

$$Q = \int_0^T dt I(t) = \int_0^T dt \frac{\varepsilon(t)}{R}$$

$$Q = -\frac{1}{R}\int_0^T dt \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{1}{R}\left(\Phi(T) - \Phi(0)\right)$$

donde

$$\Phi(0) = NB\pi \left(D/2\right)^2$$

mientras que

$$\Phi(T) = -NB\pi \left(D/2\right)^2$$

luego

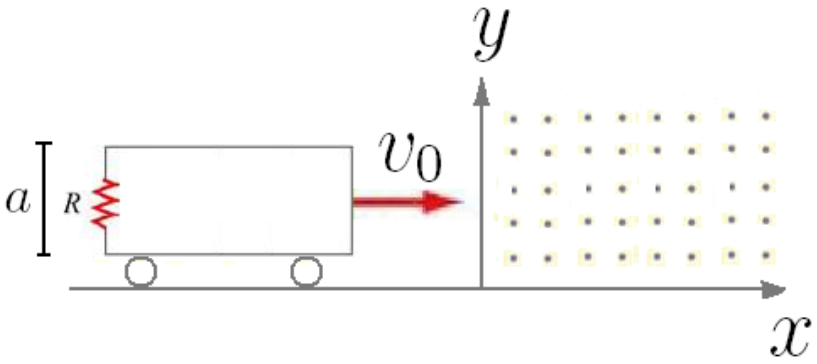
$$Q = \frac{NB\pi D^2}{2R}$$

Finalmente

$$B = \frac{2QR}{\pi N D^2}$$

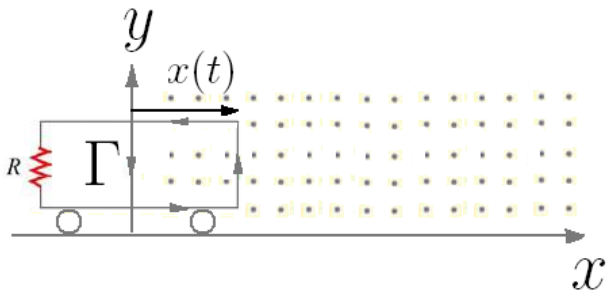
Problema

Un tren de masa m se desplaza inicialmente con velocidad $v_0\hat{i}$. Ingresa a una región de frenado electromagnético para disminuír la velocidad del tren, en donde existe un campo magnético uniforme, en el sentido que se muestra en la figura. Encuentre la velocidad del tren en función del tiempo. El largo del tren es L



Solución

Analizamos un instante cualquiera cuando el tren ha entrado $x(t) < L$ a la región de campo B



Sea Γ la curva que encierra al área que ha ingresado a la zona de campo magnético, en el sentido indicado por la figura. Así, la normal exterior está dirigida según k, y el flujo a través de la espira es

$$\Phi(t) = \iint_{S(\Gamma)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \iint_{S(\Gamma} dS(\vec{x})B = aBx(t)$$

por la ley de inducción, habrá una fem inducida en el circuito Γ

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -aB\dot{x}(t)$$

El signo menos da el sentido de la corriente inducida, como muestra la figura

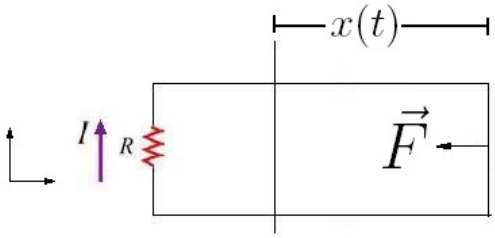


Por ley de mallas, la corriente del circuito en el sentido de la figura está dada por

$$IR = aB\dot{x}(t)$$

$$I = \frac{aB}{R}\dot{x}(t)$$

Por otro lado, en cada segmento del circuito hay una fuerza por unidad de largo dada por $\vec{I} \times \vec{B}$. De la figura es claro que las fuerzas sobre las secciones horizontales se cancelan



$$\vec{F} = -Ia\hat{j} \times B\hat{k} = -IaB\hat{i}$$

De esta forma, la segunda ley de Newton para el tren entrega

$$-IaB = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

pero

$$I(t) = \frac{aB\dot{x}(t)}{R}$$

$$\frac{-(aB)^2\dot{x}(t)}{R} = m\ddot{x}(t), x(t) < L$$

$$\frac{-(aB)^2}{R}\frac{dx(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}, x(t) < L$$

Resolviendo para $v(t)$

$$\frac{-(aB)^2}{mR}v(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

La solución es

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{(aB)^2}{mR}t}, t < t^*$$

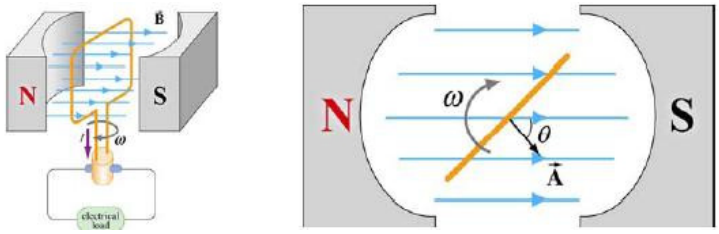
con $x(t*) < L$. Este tiempo puede ser obtenido mediante $x(t)$

$$x(t) = \frac{v_0 mR}{(aB)^2}\left(1 - e^{-\frac{(aB)^2}{mR}t}\right)$$

la solución es válida para todo t tal que $x(t) < L$. Una vez que el tren ha ingresado completamente a la región de campo magnético, el flujo se mantiene constante, luego no hay fuerzas sobre el tren y se mantendrá con velocidad constante igual a $v(t^*)$

Problema

Considere un generador que consta de un electroimán que genera un campo magnético constante. Una espira de área A gira con velocidad angular constante w como se ve en la figura. Si los terminales de la espira se conectan a una resistencia R, calcule la potencia consumida por ésta. Calcule además la potencia necesaria para producir el movimiento rotatorio de la espira.



Solución

El flujo magnético que atraviesa la espira es, dado que el campo magnético es uniforme

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BAcos(\vartheta)$$

$$\Phi_B = BAcos(wt)$$

Así, la tasa a la que varía el flujo magnético es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -BAwsin(wt)$$

Utilizando la ley de Faraday, obtenemos la f.e.m inducida en el circuito

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BAwsinwt$$

Si el circuito se conecta a una resistencia R, la corriente a través de ésta será

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BAw}{R}sinwt$$

Notemos que es una corriente alterna, cuya amplitud máxima es

$$I_0 = \frac{BAw}{R}$$

Ahora, la potencia suministrada al circuito eléctrico es

$$P = |\varepsilon|I = \frac{(BAw)^2}{R}sin^2wt$$

Por otro lado, el torque necesario para producir el movimiento rotatorio de la espira es

$$\tau = \mu Bsin\theta = \mu Bsinwt$$

donde μ es la magnitud del momento magnético de la espira

$$\mu = IA \rightarrow \tau = IABsinwt$$

$$\tau = \frac{B^2 A^2 w}{R} sin^2 wt$$

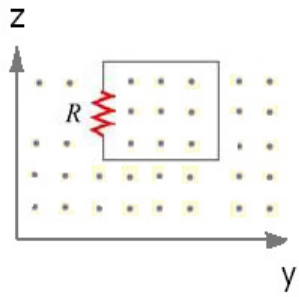
Por último, la potencia mecánica necesaria está dada por

$$P_m = \tau w = \frac{B^2 A^2 w^2}{R} sin^2 wt$$

Como era de esperarse, la potencia mecánica entregada es igual a la potencia consumida por el circuito.

Problema

Considere una espira rectangular de lado a y masa m, en el plano y-z, sumergida en un campo magnético $\vec{B} = (B_0 - \alpha z)\hat{x}$, con $\alpha > 0$. La espira cae en la dirección vertical debido a la gravedad. Encontrar la fem y corriente inducida en función de la velocidad $\vec{v}$ de la espira. ¿Cuál es la velocidad terminal?



Solución

Definiendo la normal a la espira rectangular según $\hat{n} = \hat{x}$, y suponiendo que el extremo inferior se encuentra a una altura z, el flujo mangético a través de la espira está dado por

$$\Phi_B = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \iint_S dydzB(z) = \int_0^a dy \int_z^{z+a} dz(B_0 - \alpha z)$$

$$\Phi_B = a(B_0 z - \frac{\alpha}{2}z^2)_z^{z+a} = a^2 B_o - \frac{a\alpha}{2}(z^2 + 2az + a^2 - z^2)$$

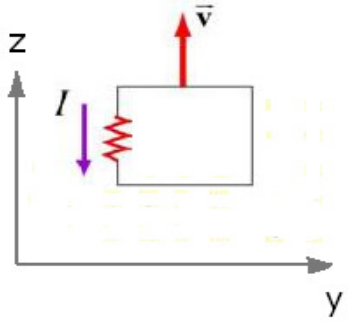
$$\Phi_B = a^2 B_o - \frac{\alpha}{2}(2za^2 + a^3) = a^2(B_0 - \alpha z) - \frac{\alpha a^3}{2}$$

Con esto, y utilizando la ley de inducción de Faraday, podemos determinar la fem inducida en la espira

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dz}\frac{dz}{dt} = -\dot{z}(-\alpha a^2)$$

$$\varepsilon = v\alpha a^2$$

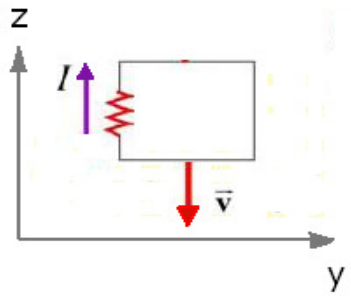
Donde v es la rapidez con que cae la espira. Podemos distinguir dos casos, si la espira sube, entonces $v > 0$ y $\varepsilon > 0$, lo que nos dice que la corriente inducida irá en el sentido contrareloj, como se aprecia en la figura



Otra forma de verlo, es notando que el campo magnético se hace más débil en la medida que aumenta la altura z, de forma que si la espira sube, el flujo disminuye. Así, la corriente inducida debe ir en una dirección tal que el flujo que ésta genere se sume al flujo magnético

externo e intente evitar que el flujo total disminuya

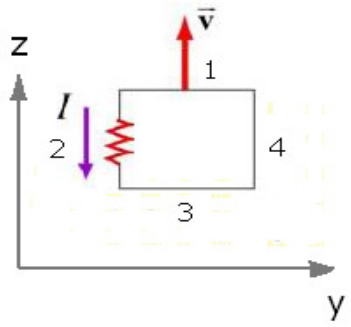
Ahora, el caso de interés (la espira cae por gravedad), implica $v < 0$, de forma que $\varepsilon < 0$ y esto significa que la corriente va en el sentido indicado por la siguiente figura. Otra forma de verlo es notando que si la espira cae, el flujo magnético aumenta, luego la corriente inducida debe generar un flujo magnético opuesto de manera de oponerse a este aumento.



La magnitud de la corriente está dada por

$$I = \frac{|\,\varepsilon\,|}{R} = \frac{\alpha a^2\,|\,v\,|}{R}$$

Ahora, para encontrar la velocidad terminal de la espira, necesitamos encontrar la ecuación de movimiento. Calculemos la fuerza magnética que actúa sobre la espira. Podemos descomponer la fuerza total como la suma de las fuerzas sobre 4 segmentos



Es fácil notar que sobre los segmentos verticales 2 y 4, las fuerzas se anulan (el campo no depende de la coordenada y y la corriente tiene sentido inverso en ambos segmentos). Ahora, la fuerza sobre el segmento 1 es

$$\vec{F}_1 = IaB(z+a)(-\hat{y}\times\hat{x}) = IaB(z+a)\hat{k}$$

Y para el segmento 2

$$\vec{F}_2 = IaB(z)(\hat{y}\times\hat{x}) = -IaB(z)\hat{k}$$

La fuerza total es

$$\vec{F} = Ia(B_o - \alpha(z+a) - B_0 + \alpha z)\hat{k} = -Ia^2\alpha\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{\alpha^2 a^4 v}{R}\hat{k}$$

Notar nuevamente que si $v > 0$ (sube), entonces la fuerza intenta hacer caer a la espira. Si por otro lado, la espira cae $v < 0$ y entonces la fuerza magnética es hacia arriba. Finalmente, la ecuación de movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha^2 a^4 v}{R} - mg$$

Para encontrar la velocidad terminal, imponemos $\frac{dv}{dt} = 0$

$$v_t = -R\frac{mg}{\alpha^2 a^4}$$

El signo menos indica que finalmente la espira cae con velocidad constante dada por $\mid v_t \mid$