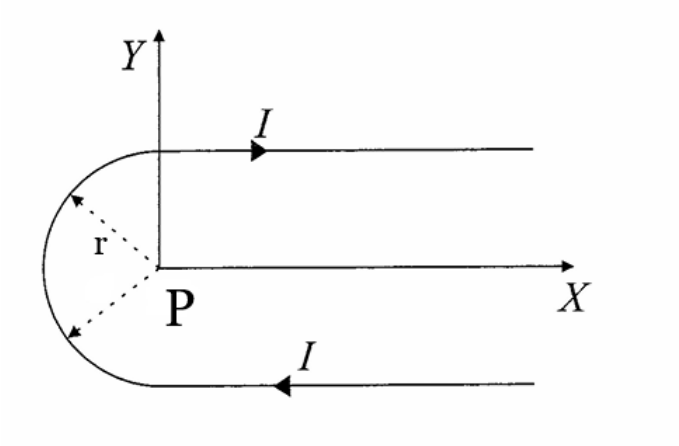
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 20

Problema 1

Un alambre largo se dobla en la forma de horquilla, como se muestra en la figura. Encuentre la expresión exacta para el campo magnético en el punto P que se encuentra en el centro del semicírculo.



SOLUCION:

Usando el principio de superposición calculamos el campo magnético como la suma de las contribuciones debidas a los dos alambres seminfinitos y al semicírculo de radio a. Por la ley de Biot-Savart, los campos magnéticos producidos por estas tres fuentes son perpendiculares a la hoja y entrando a ésta. Elijamos coordenadas cartesianas con origen en el punto P, con el eje x paralelo a los alambres, eje y perpendicular a éstos, y eje z saliendo de la hoja. Por la ley de Biot-Savart, el campo magnético producido por el alambre seminfinito de arriba está dado por

$$\vec{B}_1(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{R} \times (\vec{0} - \vec{R})}{|\vec{R}|^3} \tag{1}$$

en que $\vec{R} = (r\ \hat{y} + x\ \hat{x})$ y x varía entre 0 e infinito. Entonces $|\vec{R}|^3 = (r^2 + x^2)^{3/2}$, $d\vec{R} = dx\ \hat{x}$ y $d\vec{R} \times (-\vec{R}) = -rdx\ \hat{z}$. Reemplazando estas cantidades obtenemos,

$$\vec{B}_1(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{rdx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Usando el reemplazo trigonométrico $x = r \tan\alpha$, podemos escribir la ecuación anterior de la forma

$$\vec{B}_1(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{\pi/2} \cos\alpha\ d\alpha\ \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{z}$$

La contribución del alambre inferior, $\vec{B}_3(0)$, es exactamente igual a $\vec{B}_1(0)$. Finalmente, el campo producido por el semicírculo en el punto P, $\vec{B}_2(0)$, está dado por el lado derecho de la ecuación (1), pero esta vez con $\vec{R} = r(-\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})$ y θ varía entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$. Así, $d\vec{R} = r(\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})d\theta$, de modo que $d\vec{R} \times (-\vec{R}) = -r^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) d\theta\hat{z} = -r^2 d\theta\hat{z}$. Obviamente $|R| = r$. Reemplazando en el lado derecho de (1) obtenemos,

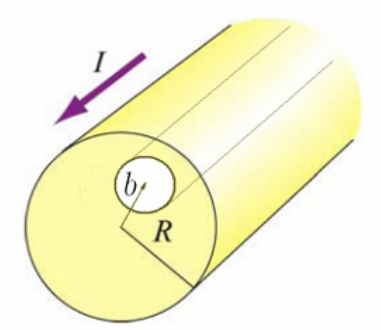
$$\vec{B}_2(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4r} \hat{z}$$

Sumando las contribuciones de los dos alambres rectos y del semicírculo (i.e., las expresiones para $\vec{B}_1(0), \vec{B}_2(0)$ y $\vec{B}_3(0)$) obtenemos finalmente,

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{2r} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \hat{z}$$

Problema 2

Un cable de radio R lleva una densidad de corriente $\vec{J} = J_0\hat{z}$. El cable tiene un hoyo cilíndrico de radio α paralelo al eje del cable, a una distancia b de él. Muestre que el campo magnético dentro de la cavidad es uniforme.

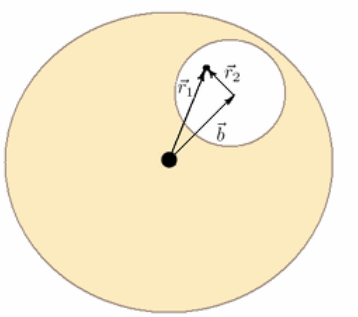


SOLUCION:

Resolveremos el problema por superposición de dos corrientes, una del cilindro completo con densidad de corriente $J_0\hat{z}$, y otra en la cavidad con densidad $-J_0\hat{z}$. El campo magnético al interior de un cable se puede obtener mediante Ley de Ampere, por lo que consideremos una curva circular de radio r, y dada la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, el campo magnético es constante y tangente sobre la curva. Así

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)2\pi r = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_0 \pi r^2$$
$$\Rightarrow \ \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{\theta}$$

Consideremos ahora un punto arbitrario P al interior de la cavidad



donde el vector $\vec{r_1}$ va desde el centro del cable al punto P, tal que $\vec{r_1} = r_1\hat{\rho}_1$, y $\vec{r_2}$ va desde el centro de la cavidad al punto P, de modo que $\vec{r_2} = r_2\hat{\rho}_2$.

Por principio de superposición, es claro que el campo magnético en P es

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 J_0 r_1}{2}\hat{\theta}_1 - \frac{\mu_0 J_0 r_2}{2}\hat{\theta}_2$$

pero podemos escribir nuestras direcciones polares como

$$\hat{\theta}_1 = \hat{z} \times \hat{\rho}_1, \quad \hat{\theta}_2 = \hat{z} \times \hat{\rho}_2$$

Reemplazando esto,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(P) &= \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r_1\hat{z} \times \hat{\rho}_1 - r_2\hat{z} \times \hat{\rho}_2\right) \\
&= \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(\hat{z} \times r_1\hat{\rho}_1 - \hat{z} \times r_2\hat{\rho}_2\right) \\
&= \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(\hat{z} \times \vec{r}_1 - \hat{z} \times \vec{r}_2\right) \\
&= \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{z} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)
\end{aligned}$$

A partir del dibujo, notemos que $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{b}$, el cual es el vector que va desde el centro del cable al centro de la cavidad. De este modo

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{z} \times \vec{b}$$

Esto es un campo uniforme.

Problema 3

Considere una columna de corriente eléctrica que pasa a través de un plasma. Los filamentos de corriente en el interior se atraen magnéticamente y se pueden apretar para crear una densidad de corriente muy grande en una región pequeña. así como un intenso campo magnético. A veces la corriente puede ser interrumpida momentáneamente gracias a este *efecto de constricción*. Este efecto se puede demostrar haciendo que un recipiente de aluminio vacío conduzca una corriente grande paralela a su eje. Suponga que R representa el radio del recipiente e I la corriente hacia arriba, uniformemente distribuida en toda su pared curva. Determine

a) El campo magnético justo en el interior de la pared.

b) El campo magnético justo en el exterior de la pared.

c) La presión sobre la pared.

SOLUCION:

a) Partamos de la Ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_e$$

Consideremos un circulo de radio r ligeramente menor a R. Ya que no encierra ninguna corriente, tenemos que

$$B(2\pi r) = 0 \quad \longrightarrow B = 0$$

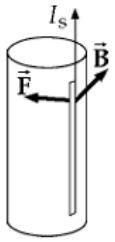
b) Ahora, si consideramos que r es ligeramente más grande que R, por Ley de Ampere se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

y utilizando la regla de la mano derecha, encontramos que la dirección es en sentido antihorario tangente a la superficie del cilindro.

c) Consideremos una tira de la pared de anchura dx y longitud ℓ. Su anchura es tan pequeña comparada con $2\pi R$ que el campo en su posición sería esencialmente el mismo si la corriente en la tira se apagara. La corriente que lleva esta tira es

$$I_s = \frac{I dx}{2\pi R} \text{ hacia arriba}$$



La fuerza en este elemento es, entonces

$$\vec{F} = I_s \vec{\ell} \times \vec{B} = \frac{Idx}{2\pi R}\left(\ell \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right) \text{(arriba} \times \text{dentro)} = \frac{\mu_0 I^2 \ell dx}{4\pi^2 R^2} \text{ radialmente hacia dentro}$$

Finalmente, la presión sobre la tira y todo el cilindrio es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\mu_0 I^2 \ell dx}{4\pi^2 R^2 \ell dx} = \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi R)^2} \text{ hacia dentro}$$