PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

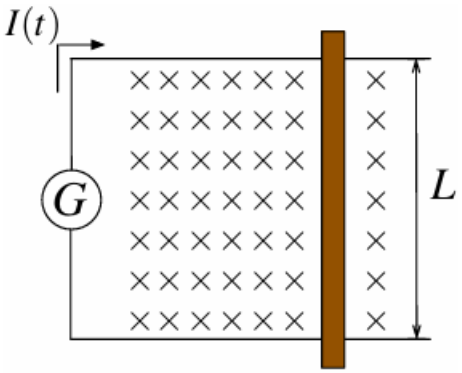
Ayudantía 26

Problema 1

Un generador de corriente G produce una corriente $I(t)$ en un circuito formado por un riel conductor sin roce, en forma de U y una barra conductora de masa m que atraviesa los rieles en dirección perpendicular. Un campo magnético constante y uniforme $\vec{B}$ que apunta perpendicular al plano del circuito existe en todo el espacio. La corriente $I(t)$ que circula en el circuito varía en el tiempo de acuerdo con

$$I(t) = \begin{cases} 0\ , & t < 0 \\ bt\ , & 0 < t < T \\ 0\ , & T < t \end{cases}$$

Para $t \leq T$, determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito y la velocidad de la barra en función del tiempo.



SOLUCION:

La fuerza electromotriz inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_0^L \int_0^{x(t)} B(-\hat{z}) \cdot dxdy\hat{z}$$

de este modo se obtiene que

$$\varepsilon = BL\dot{x} = BLv$$

Por otro lado, considerando que la fuente de corriente es capaz de mantener la corriente constante (en el sentido de la figura) y sin alteraciones durante cada período de tiempo (ie. se ignora la corriente adicional inducida en el circuito), se tiene que la velocidad de la barra está dada por

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$
$$d\vec{F} = I(t)dy(-\hat{y}) \times B(-\hat{z})$$
$$d\vec{F} = BI(t)dy\ \hat{x}$$
$$\Rightarrow \vec{F} = BI(t)L\ \hat{x}$$

Entonces

$$m\frac{dv}{dt} = BLI(t) \Longrightarrow \int_0^{v(t)} dv = \frac{BL}{m}\int_0^t I(t)dt$$

Si $t < 0$

$$v(t) = 0$$

Si $0 < t \leq T$

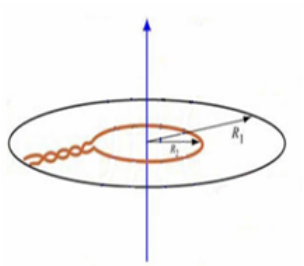
$$v(t) = \frac{BL}{m}\int_0^t btdt = \frac{BLbt^2}{2m}$$

Por lo tanto se tiene que la fem inducida en el circuito es

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{B^2L^2bt^2}{2m} & 0 < t \leq T \end{cases}$$

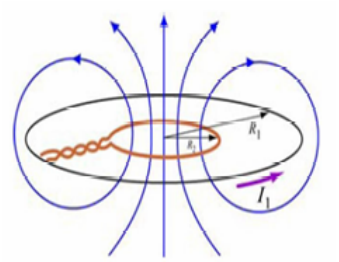
Problema 2

Considere dos espiras coplanares y concéntricas, de radios R_1 y R_2 con $R_1 \gg R_2$. Encuentre la inductancia mutua entre ambas espiras.



SOLUCION:

La inductancia mutua se puede obtener suponiendo que por el anillo más grande circula una corriente I_1 como se muestra a continuación:



El campo magnético en el centro del anillo puede obtenerse fácilmente utilizando la ley de Biot-Savart (desarrollo en ayudantía), obteniendo

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\hat{z}$$

Entonces, el flujo de la espira exterior a través de la espira interior es

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

Si definimos la normal a la superficie encerrada por el anillo interior según el eje $\hat{z}$

$$\Phi_{12} = B_1 S_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \cdot \pi R_2^2$$

Finalmente, la inductancia mutua está dada por

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Problema 3

Note la similitud entre la Ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu I$$

y la ley de Faraday-Lenz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Nada nos impide aplicar los métodos de "anillos amperianos" al cálculo de campos eléectricos generados por campos magnéticos variables, de forma análoga al cálculo de campos magnéticos producidos por corrientes estacionarias. Suponga un solenoide largo y recto, de radio a y con n vueltas por unidad de largo, por el que circula una corriente $I(t)$. Si la corriente varía en el tiempo, encuentre el campo eléctrico que se induce dentro y fuera del solenoide.

SOLUCION:

Como vieron en clases, el campo magnético producido por el solenoide recto es:

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \hat{\boldsymbol{z}}$$

siendo el eje z coincidente con el eje del solenoide. Supongamos un loop circular de radio $r < a$. El flujo magnético encerrado por ese loop es

$$\Phi_B = B(t)\pi r^2 = \mu_0 \pi r^2 n I(t)$$

y la variación de flujo queda como

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \dot{B}(t)\pi r^2 = \mu_0 \pi r^2 n \dot{I}(t)$$

Por la ley de Faraday-Lenz,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\dot{B}(t)\pi r^2 = -\mu_0 \pi r^2 n \dot{I}(t)$$

Dado que el campo magnético es paralelo al eje z, el campo eléctrico inducido será perpendicular a éste, en la dirección tangencial, por lo que $\vec{E} = E\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Así, la fem inducida será

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint E\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot dr\hat{\boldsymbol{\theta}} = 2\pi r E(r)$$

y por ende

$$2\pi E(r) = -\mu_0 \pi r^2 n \dot{I}(t)$$

Con ello,

$$\vec{E}_{in} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \dot{I}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Este es el campo dentro del solenoide. El campo fuera se obtiene de forma análoga, pero el loop ahora encierra todo el solenoide. El flujo es

$$\Phi_B = B(t)\pi a^2 = \mu_0 n \pi a^2 I(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 n \pi a^2 \dot{I}(t)$$

Por la ley de Faraday-Lenz,

$$2\pi r E(r) = -\mu_0 n \pi a^2 \dot{I}(t)$$

Y finalmente:

$$\vec{E}_{\text{out}} = -\frac{\mu_0 n a^2}{2r} \dot{I} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$