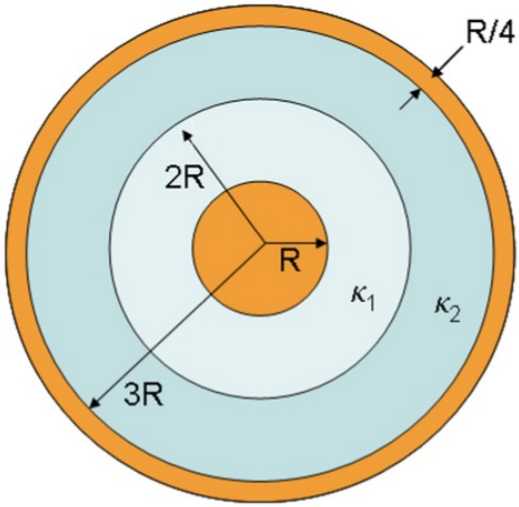
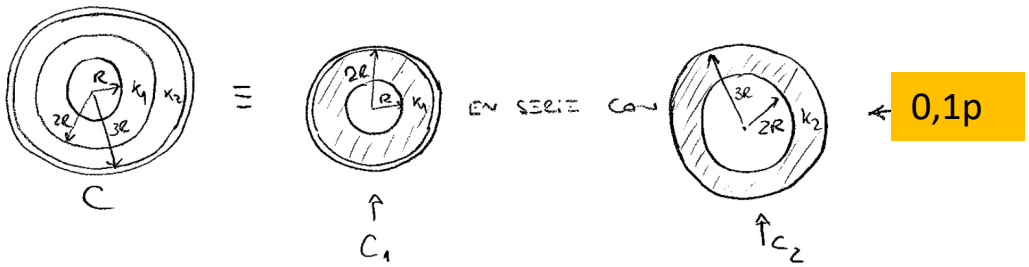
2. Considere un cable coaxial de longitud L, el cual tiene una sección transversal como la mostrada en la figura. Este cable consiste de un alambre macizo de cobre de radio R rodeado por dos mantos (cascarones) cilíndricos sucesivos concéntricos de material dieléctrico de constantes dieléctricas (permitividad relativa) κ_1 y κ_2, respectivamente, y un envoltorio (cascarón) cilíndrico metálico de radio interior $3R$ y espesor $R/4$.

   a) Calcule la capacitancia del sistema, considerando que $L >> R$. $(1pto)$

   b) Si una batería de 12 V es conectada con su polo positivo al conductor macizo y su terminal negativo al conductor exterior, ¿cuál es la carga neta almacenada en el conductor macizo? $(1pto)$

   c) ¿Cuál es la energía almacenada en el condensador cuando está completamente cargado? $(1pto)$





0,1p

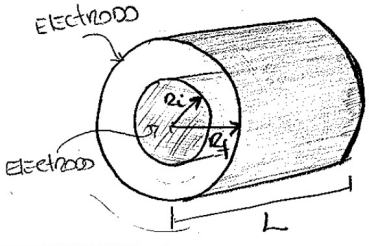
DONDE:

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

0,2p

POR LO TANTO EL PROBLEMA RADICA EN CALCULAR LAS CAPACITANCIAS C_1 Y C_2. PARA ELLO CONSIDERAREMOS QUE $L >> R$.

PRIMERO CALCULAREMOS LA CAPACITANCIA C_c DE UN CABLE COAXIAL SIN DIELECTRICO EN SU INTERIOR, DE RADIO INTERIOR R_i Y EXTERIOR R_f TAL COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA.



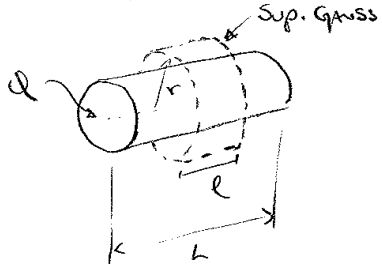
SABEMOS QUE LA CAPACITANCIA ESTÁ DADA POR:

$$C_c = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

DONDE Q ES LA CARGA ALMACENADA SI AL CONDENSADOR SE LE APLICA UNA DIFERENCIA DE POTENCIAL ΔV.

0,1p

Utilizando Ley de Gauss podemos calcular el campo entre los electrodos, para luego determinar la diferencia de potencial ΔV.



Determinando $\vec{E}$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 2\pi r\cdot \ell = \frac{\lambda\cdot \ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

En este caso $\boxed{\lambda = \frac{Q}{L}}$

0,1p

Calculando ΔV:

$$\Delta V = -\int_{R_i}^{R_f} \vec{E}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \Delta V = -\int_{R_i}^{R_f} \frac{\lambda\, dr}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{|\Delta V| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right)}$$ ← 0,1p

Luego la capacitancia C_c está dada por:

$$C_c = \frac{Q}{|\Delta V|} \Rightarrow \boxed{C_c = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right)}}$$ ← 0,1p

Podemos utilizar el resultado anterior para calcular C_1 y C_2 directamente:

0,1p

$$\boxed{C_1 = k_1\cdot\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(2)}} \qquad \boxed{C_2 = k_2\cdot\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$ ← 0,1p

De esta manera la capacitancia del sistema está dado por:

$$\frac{1}{C} = \frac{\ln(2)}{k_1 2\pi\varepsilon_0 L} + \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{k_2\cdot 2\pi\varepsilon_0 L} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{k_1 k_2 2\pi\varepsilon_0 L}\left(k_2\ln(2) + k_1\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{k_1 k_2 2\pi\varepsilon_0 L}{k_2\ln(2) + k_1\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$ ← 0,1p

(b) Si una batería de 12 V es conectada con su polo positivo al conductor macizo y su terminal negativo al conductor exterior, entonces el conductor macizo queda cargado positivamente con carga Q_+ donde: (1/4p)

$$Q_+ = (12\text{V})\cdot C \Rightarrow \boxed{Q_+ = (12\text{ V})\cdot\frac{k_1 k_2 2\pi\varepsilon_0 L}{k_2\ln(2) + k_1\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

0,5p

0,5p

c) La energía almacenada en el condensador luego de conectar la batería está dada por:

$$\underbrace{U = \frac{1}{2} Q \cdot V}_{0{,}5p} \equiv \frac{(12\,V)^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{k_1 k_2 \cdot 2\pi \varepsilon_0 L}{k_2 \ln(2) + k_1 \ln(3/2)}}_{0{,}5p}$$