Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Física
Electricidad y Magnetismo FIS1533-1, 2022-2
Profesor: Marcelo Calderón (marcelo.calderon@uc.cl).
Ayudante: Benjamin Wassermann (bewassermann@uc.cl).

Ayudantía 10

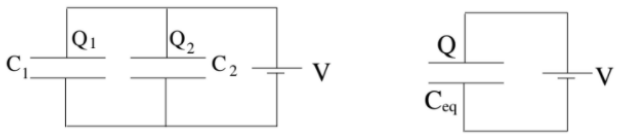
Electrostática: Capacitores y Dieléctricos

Resumen

- **Capacitores**:

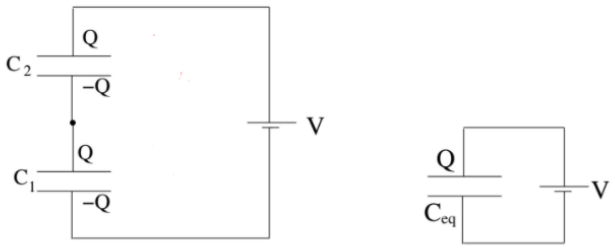
  Podemos realizar conexiones entre capacitores. Donde la capacitancia se comporta de manera ïnversa.ª la resistencia.

  Por lo tanto si tenemos capacitores en paralelo:



$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Para una conexión en serie:



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Por último, para capacitores de 2 cuerpos es importante conocer ciertos valores de capacitancia:

- C Placas paralelas: $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$
- C Cilíndrico: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$
- C Esférico: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})}$

- **Dieléctrico**:

  En un material aislante las cargas se encuentran "ligadas", es decir no pueden moverse libremente. Por lo tanto al aplicar un campo eléctrico externo, los átomos del material se polarizan.De esta forma el material se convierte en una distribución de dipolos. Esta redistribución produce un nuevo campo eléctrico propio del material.

  Para facilitarnos las cosas definimos un vector de polarización $\vec{P}$ como el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen en un material. También definimos nuestro vector de desplazamiento $\vec{D}$ como:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

  Tenemos densidades de carga inducidas en el dieléctrico debido al campo eléctrico externo que produce un reordenamiento de las moléculas. Donde la densidad de carga superficial de polarización es:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

  Y la densidad de polarización volumétrica es:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

  Por otro lado tenemos que el vector de polarización es proporcional al campo externo aplicado:

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}}$$

  Donde ε_0 es la permitividad del vacío y χ es la susceptibilidad eléctrica. La cual nos indica que tan susceptible es el material a polarizarse.

  En general tenemos 2 tipos de cargas : $\begin{cases} \rho_l, & \text{Las cargas libres, que están a nuestra disposición} \\ \rho_p, & \text{Cargas de polarización al interior del material} \end{cases}$

  Escribiendo la Ley de Gauss en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

  Hay que recordar que en este caso ρ considera todas las cargas. Sean libres o de polarizaión.

Luego:

$$\rho = \rho_l + \rho_p$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \rho_l + \rho_p$$

Donde $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$, entonces:

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \rho_l - \nabla \cdot \vec{P}$$

Reordenando y agrupando obtenemos:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\oint_s \vec{D} \cdot ds = Q_l}$$

Por último, algunas relaciones útiles son:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (1 + \chi) \geq 1}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_o (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}$$

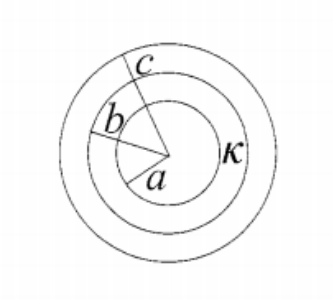
Cosas importantes:

1. Para el cálculo de $\vec{E}$ tanto cargas libres como de polarización son "fuentes"
2. Para el cálculo de $\vec{D}$ sólo actuan como fuentes las cargas libres.
3. ε_r suele llamarse constante dieléctrica que también se conoce como κ
4. Si ponemos un dieléctrico dentro de un capacitor su capacitancia aumenta: $C' = C \cdot \varepsilon_r$

Problemas

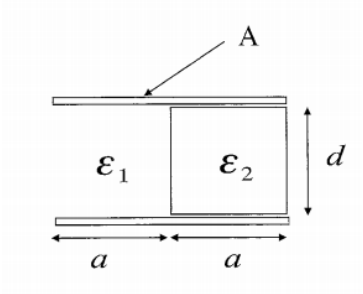
Problema 1

Considere dos cilindros conductores coaxiales. El interior de radio a y el exterior de radio c. El espacio $a < r < b$ con $b < c$ se llena con un dieléctrico de constante κ. Encuentre la capacitancia del dispositivo por unidad de largo



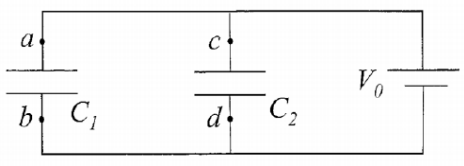
Problema 2

En un condensador de placas cuadradas de área $A = (2a)^2$ se introducen dos dieléctricos que llenan el interior del condensador como se muestra en la figura. Si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que debe aplicarse para mantener esta configuración?



Problema 3

Dos condensadores descargados de capacitancia C_1 y C_2 se conectan en paralelo a una batería que ofrece un potencial V_0. Luego se desconectan y sin perder su carga, se conectan en serie. Calcule la nueva carga en cada placa de los capacitores.



Respuestas

1. $\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\ln\left(\frac{c}{b}\right)}$
2. $\vec{F} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{eq}^2}\frac{2a(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{d}\hat{x}$
3. $Q_1' = \frac{C_1(C_1-C_2)V_0}{C_1+C_2}$
   $Q_2' = \frac{C_2(C_1-C_2)V_0}{C_1+C_2}$