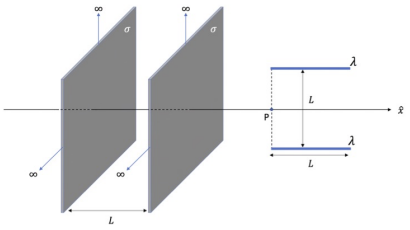
1. El arreglo de la figura consiste en dos líneas paralelas, cada una de largo L y separadas por una distancia L entre sí. Además, se encuentran dos planos infinitos ubicados a distancias L y $2L$ del punto P, respectivamente. Note que las líneas son ortogonales a los planos como muestra la figura. Las líneas y los planos tienen densidades de carga uniforme, donde $\lambda > 0$ es la densidad lineal de carga en cada una de las líneas y $\sigma > 0$ es la densidad superficial de carga de los planos.

   a) Calcule el vector campo eléctrico producido por las líneas de carga en el punto P. Ignore en esta parte la presencia de los planos infinitos.

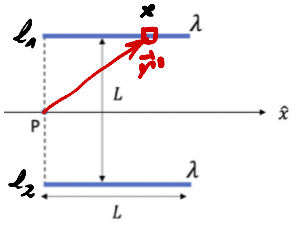
   b) Usando la ley de Gauss y argumentos de simetría, determine el campo eléctrico producido por ambos planos en todo el espacio. Ignore en esta parte la presencia de las líneas.

   c) Considere ahora el arreglo completo (es decir, líneas y planos). Determine el valor de σ/λ para que el campo eléctrico en el punto P sea nulo.



a) El campo eléctrico está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{\text{Objeto}} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dq(\vec{r}').$$



Por simetría (entre ambos alambres) sólo la componente "x" del campo resultante. I.e.,

$$\vec{E} = E\,\hat{x} \quad \text{o bien} \quad E = \vec{E}\cdot\hat{x} \qquad (1/2)$$

$$E = k\int_{\text{Objeto}} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\hat{x}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dq(\vec{r}') = 2k\int_{\text{Alambre}} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\hat{x}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dq(\vec{r}') \qquad (1/2)$$

(1) Sustituyendo: $\vec{r} = 0$ y $\vec{r}' = x\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}$.

Así: $|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = \left(x^2 + L^2/4\right)^{3/2}$ y $(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\hat{x} = -x$.

Además, $dq(\vec{r}') = \lambda\, dx$

$$\Rightarrow E = 2k\int_0^L \frac{-x}{\left(x^2+L^2/4\right)^{3/2}}\lambda\, dx = 2k\lambda\int_0^L \frac{-x\,dx}{\left(x^2+L^2/4\right)^{3/2}} \qquad (1/2)$$

$$= 2k\lambda\, \frac{1}{\left(x^2+L^2/4\right)^{1/2}}\Bigg|_0^L = 2k\lambda\left[\frac{1}{\left(L^2+L^2/4\right)^{1/2}} - \frac{2}{L}\right]$$

$$= \frac{2k\lambda}{L}\left[\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\right] = -\frac{4k\lambda}{L}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{4k\lambda}{L}\left(1 - 1/\sqrt{5}\right)\hat{x}. \qquad (1/2)$$

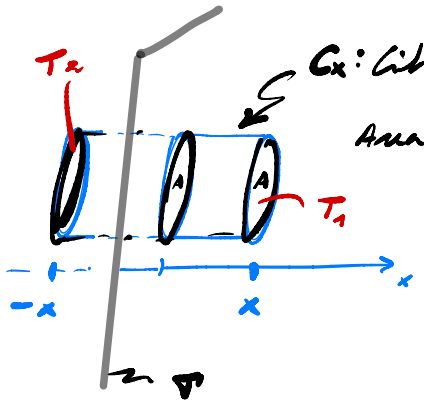
b) Primero calculamos el campo de un plano ∞ situado en $x=0$.

Por simetría el campo fuera del plano:

1/4 $\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\,\hat{x}$ ①

Además,

1/4 $\vec{E}(x) = -\vec{E}(-x)$ ②



Por Gauss:

$$\oint_{C_x} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot A}{\varepsilon_0} \quad (1/4)$$

y

$$\oint_{C_x} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{T_1} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{A}_1 + \int_{T_2} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{A}_2$$

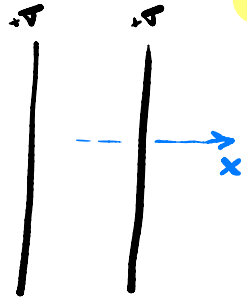
Usa ①∧② →

$$= \int_{T_1} E(x)\,dA_1 + \int_{T_2} E(x)\,dA_2 = 2E(x)A \quad (1/4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(x) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{x}, & x>0 \\ \vec{E}(-x) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{x}, & \end{cases} \quad (1/4)$$

y

Obtenemos el campo de dos planos ∞ usando el principio de superposición. Así:



$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{x}, & \text{a la derecha de planos} \quad (1/4) \\ 0, & \text{entre los planos} \quad (1/4) \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{x}, & \text{a la izquierda de planos.} \quad (1/4) \end{cases}$$

c) Usando partes a) y b) y el principio de superposición encontramos:

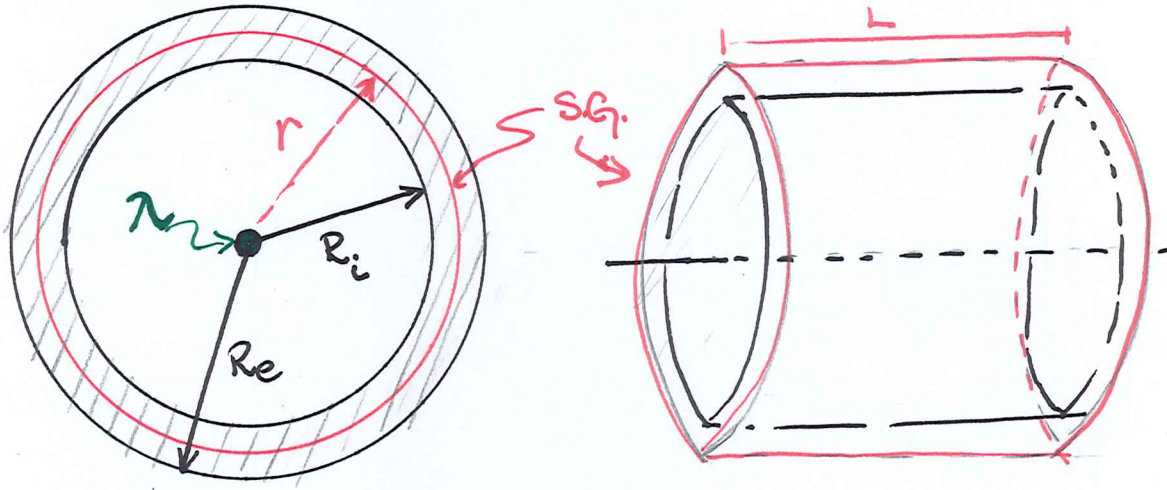
$$\vec{E}_P = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{4K\lambda}{L}\left(1 - 1/\sqrt{5}\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (1/2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{4K\varepsilon_0}{L}\left(1 - 1/\sqrt{5}\right) \stackrel{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{=} \frac{1}{\pi L}\left(1 - 1/\sqrt{5}\right). \qquad (1/2)$$

Pauta P2

Dado que el cilindro es conductor, el campo eléctrico en su interior es cero, cuando este se encuentra en equilibrio electrostático.

Utilizando la ley de Gauss en la sup. gaussiana señalada en la siguiente figura, sabemos que:



Vista sec. transversal Vista lateral

a)

$$\int_{S.G.} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{inc}}{\varepsilon_0} \quad ; \quad q_{inc} = \lambda \cdot L + q_I$$

Donde $\vec{E} = 0$ y q_I es la carga inducida en el manto interior del cilindro en la sección de largo L encerrada por la superficie gaussiana.

$$\Rightarrow \quad 0 = \lambda \cdot L + q_I \Rightarrow \quad q_I = -\lambda \cdot L$$

Luego la densidad superficial de carga inducida en el manto interior está dada por:

$$\sigma_I = \frac{q_I}{2\pi R_i \cdot L} \Rightarrow \boxed{\sigma_I = \frac{-\lambda}{2\pi R_i}} \leftarrow (1p)$$

Luego dado que el cilindro inicialmente está descargado, una carga $q_E = -q_I$ se debe inducir en la superficie exterior del cilindro en un largo L.

$$\Rightarrow q_E = -q_I \Rightarrow q_E = \lambda \cdot L$$

Luego la densidad superficial de carga inducida en el manto exterior está dada por:

$$\sigma_e = \frac{q_E}{2\pi R_e \cdot L} \Rightarrow \boxed{\sigma_e = \frac{\lambda}{2\pi R_e}} \leftarrow (1p)$$

b) Para calcular el campo eléctrico, primero utilizamos una sup. gaussiana similar a la de la preg. anterior, pero con $0 < r < R_i$, en este caso tenemos que:

$$\int_{S.G.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad , \text{ donde } q_{enc} = \lambda \cdot L$$

y dado que $\vec{E}$ es de ley en esa sup. g., se tiene

$$\int_{S.G.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi r \cdot L \Rightarrow E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi r} \hat{r} \qquad 0 < r < R_i} \leftarrow \left(\frac{3}{4}p\right)$$

Luego considerando una S.G. de $r > R_e$, podemos calcular el campo en esa zona, obteniendo que:

$$\int_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{inc}}{\varepsilon_0} \quad ; \text{ donde } q_{inc} = \lambda L + (-\lambda L) + (\lambda L)$$

(q_1 y q_2)

$$\Rightarrow q_{inc} = \lambda L \quad \Rightarrow \quad E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \hat{r} \quad R_e < r} \leftarrow (3/4\ P)$$

$$\therefore \quad \vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi r} \hat{r} & 0 < r < R_i \\ 0 & R_i < r < R_e \\ \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi r} \hat{r} & R_e < r \end{cases} \leftarrow (1/2\ P)$$

c) La diferencia de potencial $\Delta V = V(2R_e) - V(R_i/2)$ está dada por:

$$V(2R_e) - V(R_i/2) = -\int_{R_i/2}^{2R_e} \vec{E} \cdot d\vec{l} \leftarrow (1/2\ P)$$

P=0 ← (1/2 P)

$$\int_{R_i/2}^{2R_e} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_i/2}^{R_i} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{R_i}^{R_e} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{R_e}^{2R_e} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{R_i/2}^{R_i} \frac{\lambda}{\varepsilon 2\pi r} dr + 0 + \int_{R_e}^{2R_e} \frac{\lambda}{\varepsilon 2\pi r} dr \quad \leftarrow (1/2\ P)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln(2_i) - \ln(R_{i/2}) + \ln(2R_e) - \ln(R_e) \right]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln(2) + \ln(2) \right] = \frac{\lambda \ln(2)}{\pi\varepsilon_0}$$

Logo

$$\boxed{V(2_e) - V(R_{i/2}) = -\frac{\lambda \ln(2)}{\pi\varepsilon_0}} \quad \leftarrow (1/2\ P)$$