Interrogación 1

FIS1533 Electricidad y Magnetismo

Profesores: B. Koch, B. Seifert, P. Ochoa, R. Soto, S. Wallentowitz

09.09.2015, 18:30-21:30

NO USAR NINGÚN APARATO ELECTRÓNICO NI APUNTES!

1. La figura muestra las líneas de campo producidas por 4 cargas puntuales. Determine si:

   a) 3 cargas son positivas y 1 es negativa.

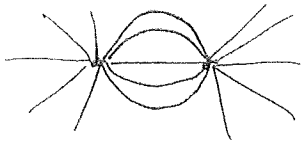
   → *b*) 2 cargas son positivas y 2 son negativas.

   c) 1 carga es positiva y 3 son negativas.

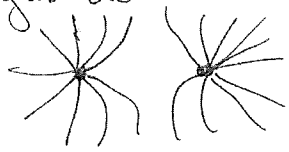
   d) Todas las cargas son del mismo signo.

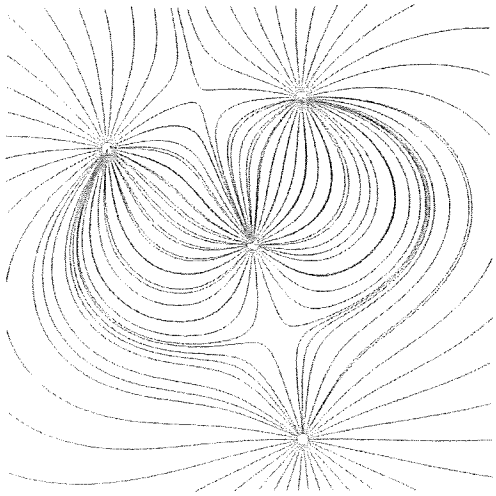
   e) No hay suficiente información para saber.

Líneas de campo para dipolo:



Líneas de campo para 2 cargas del mismo signo:





Por ende, 2 cargas de arriba son del mismo signo. Carga de en medio es de signo opuesto. Carga de abajo es del mismo signo a la de en medio

→ respuesta correcta es b).

2. Se tiene una barra de longitud a en la posición que se muestra en la figura abajo. La barra tiene una carga positiva Q uniformemente distribuida sobre ella. Una carga puntual positiva q se encuentra a una distancia $a+r$ del origen sobre el eje x como indicado en la figura.
La fuerza que siente la carga q es:

a) $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r+\frac{a}{2})^2}\hat{x}$

b) $\vec{F} = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r+\frac{a}{2})^2}\hat{x}$

c) $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r-\frac{a}{2})^2}\hat{x}$

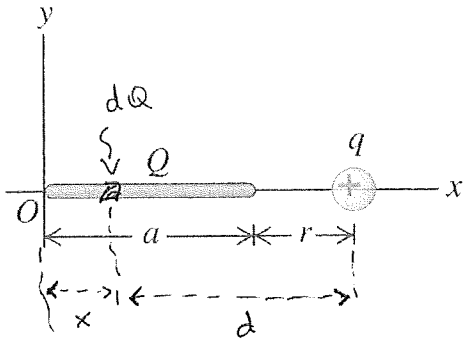
→ d) $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r(a+r)}\right]\hat{x}$

e) $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r(a-r)}\right]\hat{x}$

Dividimos barra en diferenciales dQ.

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{d^2}\hat{x}$$

donde $d = a+r-x$.



Nos queda:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{(a+r-x)^2}\hat{x} \quad \text{pero } dQ = \lambda\, dx \text{ , y } \lambda = \frac{Q}{a}$$

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{Q\,dx}{a(a+r-x)^2}\hat{x} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{(a+r-x)}\right]_0^a\hat{x} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a+r}\right]$$

y $$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{a+x-x}{r(a+r)}\right]\hat{x} = \frac{qQx}{4\pi\varepsilon_0 x}\left[\frac{1}{r(a+r)}\right]\hat{x}$$

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r(a+r)}\right]\hat{x}$$

→ respuesta correcta es d)

3. Se tienen dos cargas negativas $-Q$ fijas en dos vértices de un cuadrado de lado L como se muestra en la figura. También se tiene una carga positiva $+Q$ que se puede mover sobre la diagonal del cuadrado, a una distancia d del punto P.
Determine el valor de d para que el campo eléctrico en el punto P sea cero:

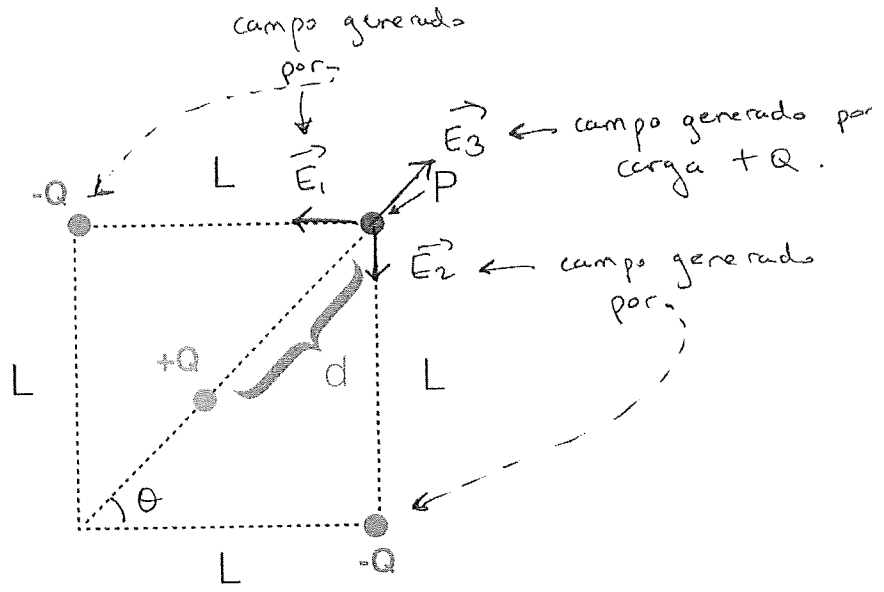
→ *a)* $d = L\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

b) $d = L(2)^{\frac{1}{4}}$

c) $d = L\sqrt{2}$

d) $d = L\frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $d = L\frac{2}{\sqrt{3}}$



Queremos que $|E_{3x}| = |E_{1x}|$ y $|E_{3y}| = |E_{2y}|$, que son condiciones equivalentes.

$$\cos\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2+L^2}} = \frac{L}{\sqrt{2}L} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

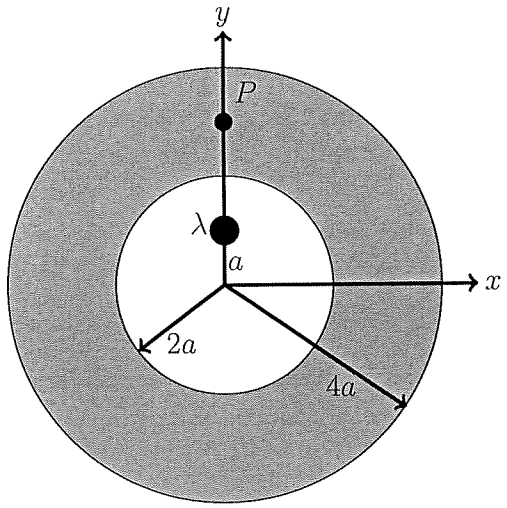
$$E_{3x} = |\vec{E_3}|\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2}\frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \; E_{1x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L^2}$$

Por ende tenemos que: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L^2}$

$$d^2 = \frac{L^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = L\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$$

→ respuesta correcta es a)

1. Un cascarón cilíndrico de largo infinito, con densidad volumétrica de carga uniforme ρ de radio interior $2a$ y radio exterior $4a$ es ubicado en el origen del plano $x-y$ con su eje a lo largo del eje z. Además por el punto $(0,a,0)$ pasa un alambre infinito perpendicular al plano $x-y$ con densidad de carga lineal λ como es mostrado en la figura. ¿Cuál debiese ser la relación entre λ y ρ para que el campo eléctrico en el punto $P=(0,3a,0)$ sea cero?



(a) $\dfrac{\lambda}{\rho} = -\dfrac{5}{4}\pi a^2$

(b) $\dfrac{\lambda}{\rho} = -\dfrac{4}{3}\pi a^2$

(c) $\dfrac{\lambda}{\rho} = a^2$

(d) $\dfrac{\lambda}{\rho} = -\dfrac{10}{3}\pi a^2$

(e) $\dfrac{\lambda}{\rho} = 10\pi a^2$

Para resolver el problema ocupamos la ley de Gauss y el principio de superposición. El campo eléctrico en el punto P debido al cascarón cilíndrico está dado por:

$$E_{cil}(P)\cdot 2\pi(3a)L = \frac{\rho\pi((3a)^2-(2a)^2)L}{\epsilon_0} \implies \vec{E}_{cil}(P) = \frac{5a\rho}{6\epsilon_0}\hat{y} \quad (1)$$

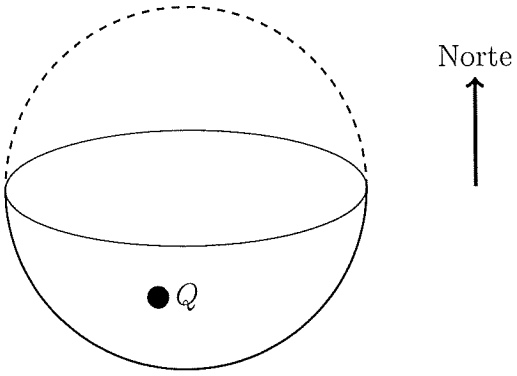
El campo eléctrico en el punto P debido al alambre infinito está dado por:

$$\vec{E}_{alambre}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(2a)}\hat{y} \tag{2}$$

La magnitud total del campo debe ser cero en el punto P, por lo que tenemos que:

$$\frac{5a\rho}{6\epsilon_0} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} = 0 \implies \frac{\lambda}{\rho} = -\frac{10}{3}\pi a^2 \tag{3}$$

2. Una carga Q positiva se encuentra dentro de una esfera como en la figura. ¿Qué se puede decir acerca del flujo del campo eléctrico en los hemisferios norte y sur?



(a) El flujo es mayor en el hemisferio norte que en el hemisferio sur.

(b) El flujo es mayor en el hemisferio sur que en el hemisferio norte.

(c) El flujo es el mismo en ambos hemisferios.

(d) El flujo en el hemisferio norte es $Q/(2\epsilon_0)$

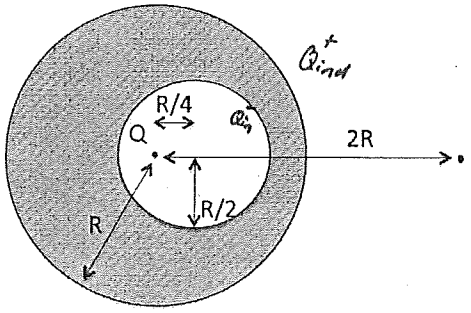
(e) El flujo en el hemisferio sur es Q/ϵ_0

Al estar la carga Q más cerca del hemisferio sur, el flujo es mayor sobre este hemisferio que sobre el hemisferio norte. La respuesta correcta es la b).

(Nota: para esta pregunta también se consideró correcta la respuesta e), para aquellos que consideraron que el hemisferio incluía la tapa)

Problema 1

Un conductor esférico relleno y neutral de radio R tiene un hoyo (vacío) esférico de radio $R/2$. El centro del hoyo esta desplacado del centro del conductor por $R/4$ en dirección $\hat{x}$. Se coloca una carga Q en el centro del conductor (como muestra la figura). Calcula el campo eléctrico a una distancia $2R$ en dirección $\hat{x}$.



Cuanto vale $|E|$ en este punto afuera del conductor?

a) $E = \frac{1}{\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}$

b) $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}$

c) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}$

d) $E = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}$

e) Ninguno de los anteriores

Pauta:

⊕ En conductor $\vec{E} = 0$

⊕ Superficie Gauss encerrando vacio $\Rightarrow \oint_1 E\,ds = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{enc.} = 0$

$\Rightarrow Q^-_{ind} = -Q \neq 0$ con $Q^-_{ind} + Q^+_{ind} = 0$

$\Rightarrow Q^+_{ind} = Q$ Para tener $\vec{E}_{ext}$ ⊥ superficie ext.

$\Rightarrow \sigma_{ext} = \frac{Q^+_{ind}}{4\pi R^2} = cte.$ como cascarón esférico

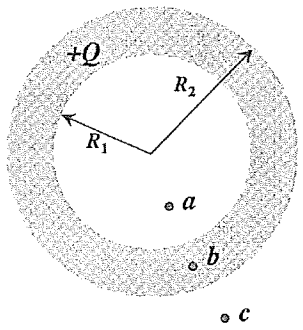
Para $r > R$ $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ en $r = 2R$

$E_r = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}$ (independiente de dirección)

Nombre: _____

Problema 2

Un cascarón esférico tiene un radio interior $R_1 = 1m$ y un radio exterior $R_2 = 3m$, como se muestra en la figura. Esta vez el cascaron es un aislante con una densidad de carga neta positiva $\rho = 108 * 10^{-10} A \cdot s/m^3$. Calcule el campo eléctrico en el punto $r_b = 2\,m$. (puede approximar $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} C/(V \cdot m)$)



Cuanto vale $\vec{E}(r_b)$

a) $\vec{E}(r_b) = 0$

b) $\vec{E}(r_b) = 700\ V/m$

c) $\vec{E}(r_b) = 10\ V/m$

d) $\vec{E}(r_b) = 900\ V/m$

e) $\vec{E}(r_b) = 50\ V/m$

Pauta:

Simetria esférica

Superficie Gauss en $r = r_b$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc.}}{\epsilon_0} \quad (*)$$

$$Q_{enc.} = \iiint_{R_1}^{R_2} \rho(r) \cdot dv = \rho\, 4\pi \int_{R_1}^{r_b} r^2 dr$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho\left(r_b^3 - R_1^3\right) \quad \text{en } (*)$$

$$4\pi\, \vec{E}(r_b) \cdot r_b^2 = \frac{4}{3\epsilon_0}\pi\rho\left(r_b^3 - R_1^3\right)$$

$$E(r_b) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r_b^2}\left(r_b^3 - R_1^3\right) \quad \text{insertar}$$

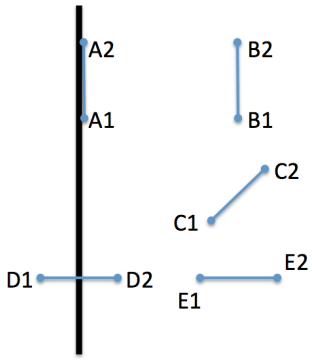
$$= \frac{3 \cdot 36 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 9 \cdot 10^{-12}\, 4}(8-1) \cdot \frac{As}{m^3} \cdot \frac{V \cdot m}{C} \cdot m$$

$$= 700\ \frac{V}{m}$$

8. Un plano infinito y aislador esta cargado con densidad de carga σ, como indicado en la figura.
   ¿Entre cuáles puntos el valor absoluto del voltaje (diferencia de potencial) es máximo?

   a) Entre A_1 y A_2
   b) Entre B_1 y B_2
   c) Entre C_1 y C_2
   d) Entre D_1 y D_2
   e) Entre E_1 y E_2

Entre E1 y E2



9. El potencial eléctrico está dado por $\Phi(x,y,z) = 2x^2\,\mathrm{V\,m^{-2}} + 4y\,\mathrm{V\,m^{-1}} + z^4\,\mathrm{Vm^{-4}} + 8\,\mathrm{V}$ donde x, y, z son las coordenadas cartesianas medidas en metros.
   Calcule el campo eléctrico.

   a) $\vec{E} = +(2,4,1)\,\mathrm{V\,m^{-1}}$
   b) $\vec{E} = -(2,4,1)\,\mathrm{V\,m^{-1}}$
   c) $\vec{E} = -(10,12,9)\,\mathrm{V\,m^{-1}}$
   d) $\vec{E} = -4\left(x\,\mathrm{m^{-1}}, 1, z^3\,\mathrm{m^{-3}}\right)\,\mathrm{V\,m^{-1}}$
   e) $\vec{E} = +4\left(x\,\mathrm{m^{-1}}, 1, z^3\,\mathrm{m^{-3}}\right)\,\mathrm{NC^{-1}}$

Solución en la siguiente página

Pauta 1.

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -grad\left(2x^2\frac{V}{m^2} + 4y\frac{V}{m} + z^4\frac{V}{m^4} + 8V\right) \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2x^2\frac{V}{m^2} + 4y\frac{V}{m} + z^4\frac{V}{m^4} + 8V\right) \\
&= -\left(4x\frac{V}{m^2}, 4\frac{V}{m}, 4z^3\frac{V}{m^4}\right) \\
&= -4\left(x\,m^{-1}, 1, z^3\,m^{-3}\right)\frac{V}{m}
\end{aligned}$$

10. Una esfera maciza conductora de radio R está cargada con una carga $q > 0\,\mathrm{C}$. Calcule el potencial eléctrico Φ a una distancia de $R/2$ del centro de esta esfera asumiendo que el potencial eléctrico es de $3\,\mathrm{V}$ en el infinito.

a) $\Phi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$

b) $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} + 3\,\mathrm{V}$

c) $\Phi = 0\,\mathrm{V}$

d) $\Phi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} + 3\,\mathrm{V}$

e) $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} + 3\,\mathrm{V}$

Solución en la siguiente página

Pauta 2.

$$\text{Ley de Gauss} : \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Esfera} : \vec{E} \parallel d\vec{A} \quad \text{y} \quad E = const \text{ en A}$$

$$E = \frac{q}{A\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \qquad r \geqq R$$

$$\Phi(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r')dr' + 3V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + 3V$$

$$\text{En la superficie} : \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + 3V \qquad (r = R)$$

$$\Phi_{superficie} = \Phi_{interior} = \Phi(r = R/2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + 3V$$

Libro guía: página 795

11. Una carga $q_0 = 100\,\mu C$ se encuentra fija en el centro del sistema de coordenadas cartesianas mientras una segunda carga $q = -1\,\mu C$ está pasando volando. En el tiempo t_1 la carga q tiene la posición $\vec{r}_1 = (-45,0,0)\text{cm}$ y rapidez v_1. Un tiempo más tarde $t_2 > t_1$ se ubica en $\vec{r}_2 = (0,20,0)\text{cm}$ con rapidez v_2.
¿Cuanta energía cinética ganó la carga q? Usar $(4\pi\varepsilon_0)^{-1} \approx 9 \cdot 10^9\,\text{V m C}^{-1}$.

a) $\Delta E_{cin} = 2{,}5\,\text{J}$
b) $\Delta E_{cin} = 2{,}0\,\text{J}$
c) $\Delta E_{cin} = 1{,}5\,\text{N m}$
d) $\Delta E_{cin} = 5\,\text{kJ}$
e) $\Delta E_{cin} = 0\,\text{J}$

Conservación de energía: $E_1 = E_2$

$$\frac{mV_1^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qq_0}{r_1} = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_2}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{CIN} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{(-q)\,q_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$$\Delta E_{CIN} \cong 9\cdot 10^9\,\frac{\text{Vm}}{\text{C}}\cdot 10^{-6}\,\text{C}\cdot 100\cdot 10^{-6}\,\text{C}\,\frac{0{,}45\,\text{m} - 0{,}2\,\text{m}}{0{,}45\,\text{m}\cdot 0{,}2\,\text{m}}$$

$$= 9\cdot 10^{9-6+2-6}\,\frac{0{,}25}{0{,}09}\,\text{J}$$

$$= 10^{9-6+2-6+2}\cdot 0{,}25\,\text{J}$$

$$= 0{,}25\cdot 10^1\,\text{J} = 2{,}5\,\text{J}$$

12. Dos cargas $q_1 = q$ y $q_2 = 2q$ están ubicados en las posiciones $\vec{r}_1 = (-d, 0, 0)$ y $\vec{r}_2 = (d, 0, 0)$ en un sistema de coordenadas cartesianas. Una superficie equipotencial con potencial eléctrico Φ_0 pasa por el punto (x, y, z) donde $x = 0\,\text{m}$ y $z = 0\,\text{m}$. ¿Cuáles son los valores correctos para la coordenada y suponiendo que $\Phi(\infty) = 0\,\text{V}$?

a) $y = \pm\sqrt{\left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\Phi_0}\right)^2 - d^2}$

b) $y = \pm\left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\Phi_0} - d\right)$

c) $y = \pm\sqrt{\left(\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\Phi_0}\right)^2 - d^2}$

d) $y = \pm\sqrt{\left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\Phi_0}\right)^2 + d^2}$

e) $y = \left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\Phi_0} \pm d\right)$

En plano xy:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x-(-d))^2+y^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}$$

$$\phi(x=0\text{m}, y) = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y^2}} \overset{!}{=} \phi_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2+y^2} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0} \qquad |(\,)^2$$

$$y^2 = \left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}\right)^2 - d^2$$

$$y = \pm\sqrt{\left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}\right)^2 - d^2}$$