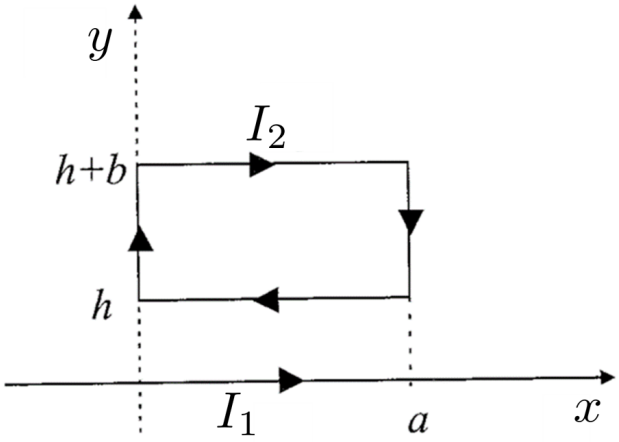
Examen

Fecha: 09 de diciembre 2024

1. Considere un alambre infinito por el que circula una corriente I_1 y una espira rectangular de lados a y b, coplanar con el alambre y tal que el lado a es paralelo a éste y a una distancia h del alambre. Suponga que por la espira rectangular circula una corriente I_2



a) Calcular el vector campo magnético $\vec{B}_1$ inducido por la corriente I_1 en función a la distancia al eje del alambre infinito. **(2 puntos)**

b) ¿Cuál es la fuerza neta que ejerce la corriente I_1 sobre la espira rectangular que conduce la corriente I_2? **(2 puntos)**

c) Calcular la inductancia mutua entre la espira y el alambre. **(2 puntos)**

Solución:
a) Calcular el vector campo magnético $\vec{B}_1$ inducido por la corriente I_1 en función a la distancia al eje del alambre infinito.

El campo magnético inducido por una corriente circulando por un alambre infinito se puede calcular usando la ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc.}}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

C es la trayectoria de integración que es sobre el plano $x = 0$ y encierra la corriente $I_{\text{enc.}} = I_1$. El sentido de integración obedece la regla de la mano derecha con respecto a la corriente I_1 y además es elegido circular concéntrico al alambre infinito. (0.5 pts.)
Entonces en el semiplano infinito $z = 0$ con $y \geq 0$ se obtiene que

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}\hat{z}, \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

donde r es la distancia al eje del alambre infinito.

■

Solución:
b) ¿Cuál es la fuerza neta que ejerce la corriente I_1 sobre la espira rectangular que conduce la corriente I_2?
La fuerza magnética sobre un segmento de corriente rectilíneo esta dado por la expresión

$$\vec{F} = \oint \left(I_2 \, d\vec{\ell} \times \vec{B}_1(y) \right), \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde $I_2 \, d\vec{\ell} = I_2 \, dx \, \hat{x}$ es un elemento de corriente del alambre infinito. Los lados paralelos al eje y de la espira contribuyen con fuerzas opuestas y de la misma magnitud, es decir, se anulan entre sí. Por tanto,

$$\vec{F} = \int_0^a \left(I_2 \, dx\hat{x} \times \vec{B}_1(y = h + b) \right) + \int_a^0 \left(I_2 \, dx\hat{x} \times \vec{B}_1(y = h) \right). \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituyendo la expresión del campo magnético y realizando operaciones se obtiene

$$\vec{F} = \left(I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(h+b)} - I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi h} \right)(-\hat{y}).$$

Simplificando:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi h(h+b)} \hat{y}. \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

■

Solución:
c) Calcula la inductancia mutua entre la espira y el alambre.
Por definición la inductancia mutua M obedece la relación

$$M \, I_1 = \Phi_2 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde Φ_2 es el flujo del campo B_1 a través del área A_2 encerrada por la espira. Entonces

$$M = \frac{1}{I_1} \int_2 \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

En este cálculo, la corriente I_2 y su sentido son irrelevantes. El diferencial de área se considerá de tal forma que el flujo magnético sea positivo, es decir

$$d\vec{A}_2 = dx \, dy \, \hat{z}.$$

Entonces

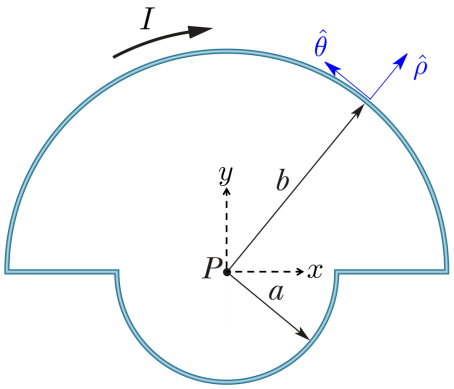
$$M = \frac{1}{I_1} \int_{A_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \hat{z} \cdot dx \, dy \, \hat{z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a dx \int_h^{h+b} dy \frac{1}{y}.$$

Finalmente obtenemos

$$M = \frac{\mu_0 \, a}{2\pi} \ln\left(\frac{h+b}{h} \right). \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

■

2. Una corriente I circula por la espira de radios b y a ($b > a$) mostrada en la figura. Ambas semicircunferencias tienen un origen comun en P.



Con esta información, calcule:

a) El vector campo magnético en el punto P. **(4 puntos)**

b) El vector momento dipolar magnético de la espira. **(2 puntos)**

Solución:
a) Utilizando Biot-Savart podemos calcular el campo usando la expresión

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

El campo magnético total se puede calcular como la superposición de los campos generados por las dos semicircunferencias y las dos secciones rectas.

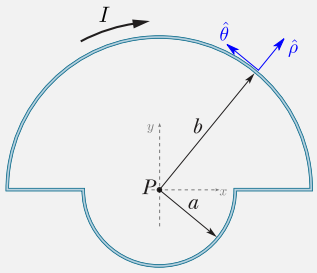
$$\vec{B}_P = \vec{B}_\cap + \vec{B}_\cup + \vec{B}_- + \vec{B}_- \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Por simetría, notamos que los campos generados por las secciones rectas serán nulos, ya que $d\vec{\ell} \propto \hat{\imath}$ es paralelo a $\vec{r} - \vec{r}\,' \propto \hat{\imath}$. Luego, para las porciones circulares tendremos, de acuerdo a la figura:
Para $\cap$

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= b d\theta(-\hat{\theta}) \qquad \text{(0.5 pts.)} \\ \vec{r} &= 0 \\ \vec{r}\,' &= b\,\hat{\rho} \end{aligned}$$

Para $\cup$

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= a d\theta(-\hat{\theta}) \qquad \text{(0.5 pts.)} \\ \vec{r} &= 0 \\ \vec{r}\,' &= a\,\hat{\rho} \end{aligned}$$



■

Así, tendremos

$$\vec{B}_{\cap} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{Ibd\theta(-\hat{\theta})\times(-b)\hat{\rho}}{b^3} \quad \text{(0.5 pts.)}$$

$$\vec{B}_{\cup} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{Iad\theta(-\hat{\theta})\times(-a)\hat{\rho}}{a^3} \quad \text{(0.5 pts.)}$$

o de manera alternativa

$$\vec{B}_{\cap} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\pi}^{0} \frac{Ibd\theta\,\hat{\theta}\times(-b)\hat{\rho}}{b^3}$$

$$\vec{B}_{\cup} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{-\pi} \frac{Iad\theta\,\hat{\theta}\times(-a)\hat{\rho}}{a^3}$$

En cualquier caso, usando $\hat{\theta}\times\hat{\rho} = -\hat{k}$, obtenemos

$$\vec{B}_{\cap} = -\frac{\mu_0 I}{4b}\hat{k} \quad \text{(0.5 pts.)}$$

$$\vec{B}_{\cup} = -\frac{\mu_0 I}{4a}\hat{k} \quad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\hat{k} \quad \text{(0.5 pts.)}$$

■

Solución:
b) El momento dipolar magnético se puede obtener de

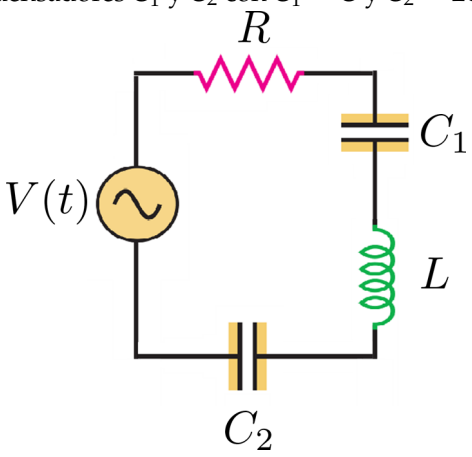
$$\vec{\mu} = IA\hat{n}$$

Luego

$$\vec{\mu} = -I\frac{\pi}{2}(b^2+a^2)\hat{k} \quad \text{(2 pts.)}$$

(1 pto. por la magnitud, 1 pto. por la dirección). ■

3. Considere el circuito de la figura con una fuente de voltaje $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, una resistencia R, una inductancia L y dos condensadores C_1 y C_2 con $C_1 = C$ y $C_2 = 2C$



a) Encuentre la ecuación diferencial (de segundo grado) que debe satisfacer las corrientes del circuito. **(1.5 puntos)**

b) Determine la impedancia equivalente del sistema. **(1.5 puntos)**

c) Encuentre la expresión para la corriente alterna en función del tiempo. Además, determine el valor de C, en términos de ω y L, que maximiza la amplitud de la corriente. **(3 puntos)**

Solución:
a) Por las reglas de Kirchhoff se obtiene que

$$V(t) = I\,R + \frac{Q_2}{C_2} + \dot{I}\,L + \frac{Q_1}{C_1} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Acá es conveniente derivar la expresión con respecto al tiempo,

$$\dot{V}(t) = \dot{I}\,R + \frac{I}{C_1} + \frac{I}{C_2} + \ddot{I}\,L$$

donde

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = I. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Nótese que

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{1}{C}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2C}.$$

Por tanto,

$$-\omega\,V_0 \sin(\omega t) = \ddot{I}\,L + \dot{I}\,R + \frac{3}{2C} I. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

Solución:
(Considerar que en algunas secciones se utilizó la letra j en vez de la i para denotar la unidad imaginaria)
b) El circuito esta en serie, por tanto

$$Z_{\text{eq}} = Z_R + Z_{C_1} + Z_L + Z_{C_2}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituyendo las correspondientes definiciones de las impedancias para cada elemento se obtiene

$$Z_{\text{eq}} = R - \frac{i}{\omega\,C_1} + i\omega\,L - \frac{i}{\omega\,C_2}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Finalmente,

$$Z_{\text{eq}} = R + i\,\omega\,L - \frac{3\,i}{2\,\omega\,C}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

Solución:
(Considerar que en algunas secciones se utilizó la letra j en vez de la i para denotar la unidad imaginaria)
c) Por definición sabemos que

$$\tilde{V}(t) = \tilde{I}(t)\, Z_{\text{eq}}$$

con

$$\tilde{V} = V_0 e^{i\omega t}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Nótese que

$$I(t) = \mathcal{R}e\{\tilde{I}\} = \mathcal{R}e\left\{\frac{\tilde{V}}{Z_{\text{eq}}}\right\}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

en forma fasorial la impedancia se puede escribir como

$$Z_{\text{eq}} = |Z_{\text{eq}}|e^{i\varphi},$$

donde

$$|Z_{\text{eq}}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{3}{2\omega C}\right)^2} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

y

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{3}{2\omega C}}{R}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Entonces

$$I(t) \;=\; \mathcal{R}e\left\{\frac{\tilde{V}}{Z}\right\} \;=\; \mathcal{R}e\left\{\frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z_{\text{eq}}|e^{i\varphi}}\right\} \;=\; \mathcal{R}e\left\{\frac{V_0 e^{i\omega t - i\varphi}}{|Z_{\text{eq}}|}\right\}.$$

Finalmente

$$I(t) \;=\; \frac{V_0}{|Z_{\text{eq}}|}\mathcal{R}e\left\{e^{i(\omega t-\varphi)}\right\} \;=\; \frac{V_0}{|Z_{\text{eq}}|}\cos(\omega t - \varphi). \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Observando la expresión de la corriente vemos que el valor máximo de $I(t)$ se logra cuando $|Z_{\text{eq}}|$ es mínimo. Ya que el enunciado nos da libertad para ajustar los valores de L y ω, entonces podemos escoger valores tales que

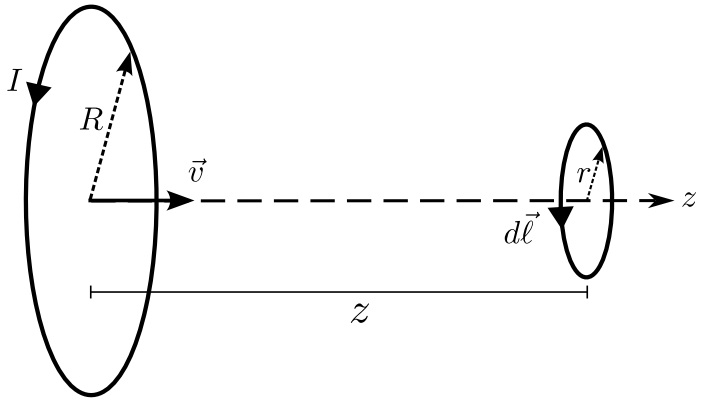
$$\omega L - \frac{3}{2\omega C} = 0$$

es decir

$$C = \frac{3}{2\omega^2 L}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

4. Una espira circular de radio pequeño r está fija en el espacio. Una gran espira de radio R está situada en un plano paralelo a la primera, es coaxial con ella y se le acerca con una velocidad constante $\vec{v} = v\hat{z}$. Las dos espiras son conductores óhmicos. Por la espira grande circula una corriente constante I como se muestra en la figura, y en el instante $t = 0$ la distancia entre las dos espiras es z.



a) Calcular como cambia con el tiempo el flujo del campo magnético generado por la espira grande a través de la espira pequeña. Se asume que $r \ll R$ de manera que el campo magnético en el interior de la espira pequeña se puede considerar uniforme e igual a su valor a lo largo del eje. **(2 puntos)**

b) Calcular la f.e.m. inducida en la espira pequeña en un instante t cualquiera. **(2 puntos)**

c) Argumentar en qué dirección fluye la corriente inducida en la espira pequeña en comparación con el sentido de $d\vec{\ell}$ que se muestra en la figura cuando la espira grande se encuentra a la izquierda y a la derecha de la espira pequeña. Calcular la corriente inducida en la espira pequeña cuando las dos espiras están en el mismo plano y cuando $t \to +\infty$. **(2 puntos)**

Solución:
a) El campo producido por la espira grande en su eje a una distancia genérica d es

$$\vec{B}(0,0,d) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Al tiempo genérico t la distancia entre las dos espiras es $d(t) = z - vt$ (0.5 pts.). Por lo tanto, el campo que siente la espira pequeña en su interior en el mismo instante es $\vec{B}(0,0,d(t))$. Por lo tanto el flujo a través de la espira pequeña a un tiempo t es

$$\Phi(t) = \int_S d\vec{s}\cdot\vec{B}(0,0,d(t)) = \int_S ds|\vec{B}(0,0,d(t))| = |\vec{B}(0,0,d(t))|\pi r^2 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Así,

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[R^2+(z-vt)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\pi r^2\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Nota: También se considera correcta la solución con signo negativo si es que el/la estudiante consideró que la corriente en la espira gira hacia atrás

■

Solución:
b) La f.e.m. en la espira pequeña tiene su origen en el campo no estacionario debido al movimiento de la espira grande. Se calcula $\mathcal{E}(t)$ evaluando la variación de flujo debido a dicho movimiento. Por la Ley de Faraday-Lenz se obtiene que

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 I R^2}{2\left[R^2+(z-vt)^2\right]^{\frac{5}{2}}}\pi r^2 \frac{d}{dt}(z-vt)^2 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{3\mu_0 I R^2 v(z-vt)}{2\left[R^2+(z-vt)^2\right]^{\frac{5}{2}}}\pi r^2 \,. \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

Nota: También se considera correcta la solución con signo positivo si es que el/la estudiante consideró que la corriente en la espira gira hacia atrás (campo negativo en sección a) ■

Solución:

c) Espira grande a la izquierda: La espira grande se encuentra a la izquierda de la espira pequeña para todos los tiempos t tal que $z - vt > 0$. En este intervalo el flujo $\Phi(t)$ aumenta y de hecho $\mathcal{E}(t)$ es negativa. Por la ley de Lenz la corriente inducida tiene que producir un campo que se opone al aumento del flujo. Por lo tanto en este intervalo la corriente inducida tiene signo opuesto al $d\vec{\ell}$ en la figura. (0.5 pts.)
Espira grande a la derecha: La espira grande se encuentra a la derecha de la espira pequeña para todos los tiempos t tal que $z - vt < 0$. En este intervalo el flujo $\Phi(t)$ es decreciente y por ende la corriente inducida en la espira pequeña tiene signo concordante al $d\vec{\ell}$ en la figura. (0.5 pts.)
Espira grande en el mismo plano que la espira pequeña: La dos espira están en el mismo plano cuando $z - vt = 0$. En este instante $t_0 = z/v$ se obtiene que, $\mathcal{E}(t_0) = 0$ y por ende la corriente inducida en la espira pequeña es cero. (0.5 pts.)
Finalmente

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}(t) = -\frac{3\mu_0 I R^2 v\pi r^2}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{(z-vt)}{\left[R^2+(z-vt)^2\right]^{\frac{5}{2}}} = 0\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Por lo tanto la corriente inducida en la espira pequeña cuando $t \to \infty$ es también cero.

■