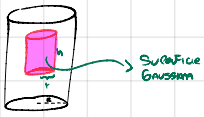
P2)

Primero calculemos Carga encerrada para $r<R$ y $r\geq R$

$r<R$: La carga en el cilindro es $q_{en} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{a}\, r\, dr\, d\theta\, dz$ (dV en cilíndricas)



$$q_{en} = \frac{2\pi h}{a}\left(\frac{r^3}{3}\right) \Rightarrow \boxed{q_{en} = \frac{2r^3\pi h}{3a}}$$

$r\geq R$: $q_{en} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r}{a}\, r\, dr\, d\theta\, dz$



$$\Rightarrow \boxed{q_{en} = \frac{2\pi h}{3a}R^3}$$

Gauss para $r<R$: $\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = E2\pi rh \Rightarrow E2\pi rh = \frac{2r^3\pi h}{3a\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{r^2}{3a\varepsilon_0}\hat{r}}$

Gauss para $r\geq R$: $\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = E2\pi rh \Rightarrow E2\pi rh = \frac{2\pi R^3 h}{3a} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{R^3}{3a\varepsilon_0 r}\hat{r}}$

Potencial en $r<R$ (Respecto $V(r=0)=0$) → En orden, tomo una carga desde el centro y la muevo hasta $r<R$

$$\Delta V = V(r) - \cancel{V(0)}^{0} \Rightarrow V(r) = -\int_0^r \vec{E}\cdot\vec{dr} \Rightarrow V(r) = -\int_0^r \frac{r^2}{3a\varepsilon_0}\hat{r}\cdot dr\hat{r} \Rightarrow V(r) = -\frac{1}{3a\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^r$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{r^3}{9a\varepsilon_0}}$$

Potencial en $r\geq R$

$$V(r) = -\int_0^r \vec{E}\cdot\vec{dr} \Rightarrow V(r) = -\left(\int_0^R \vec{E}\cdot\vec{dr} + \int_R^r \vec{E}\cdot\vec{dr}\right) \Rightarrow V(r) = -\left(\int_0^R \frac{r^2}{3a\varepsilon_0}\hat{r}\cdot dr\hat{r} + \int_R^r \frac{R^3}{3a\varepsilon_0 r}\hat{r}\cdot dr\hat{r}\right)$$

($\vec{E}$ entre $(0,R)$; $\vec{E}$ entre (R,∞))

$$\Rightarrow V(r) = \frac{-R^3}{3a\varepsilon_0} - \frac{R^3}{3a\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{-R^3}{3a\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3}\right)}$$

P3

a) Potencial de distribución plana continua: $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma}{|r-r'|}ds$

Como es un plato, tengo muchos radios → , así que el ds en cilíndricas

$$ds = r\,dr\,d\theta$$

$\vec{r}$ es donde quiero medir: $\vec{r} = z\hat{z}$

$\vec{r'}$ es lo que produce mi campo: $\vec{r'} = r\hat{r}$

Lo "feo" son los valores de σ que varían entre: σ_1 en $(0, \pi/2)$; σ_2 en $(\pi/2, 2\pi)$

Así que el $\phi(r)$ es: $\phi(r) = \underbrace{\frac{\sigma_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}}_{\text{El cuarto}} + \underbrace{\frac{\sigma_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_{\pi/2}^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}}_{\text{Lo demás}}$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{\sigma_1}{8\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{3\sigma_2}{8\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{\sigma_1 + 3\sigma_2}{8\varepsilon_0}\left(\int_0^R \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) \qquad \frac{2r}{2\sqrt{r^2+z^2}} = \left(\sqrt{r^2+z^2}\right)'$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{\sigma_1 + 3\sigma_2}{8\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right]$$ Nota que $z>0 \Rightarrow \sqrt{z^2} = |z| = z$

Para calcular las densidades, recordamos que $\sigma = \frac{\text{Carga}}{\text{Area}}$ (carga por unidad de área)

$$\sigma_1 = \frac{Q}{\pi R^2/4} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \frac{-6Q}{3\pi R^2/4}$$

Que reemplazando queda:

$$\phi(r) = -\frac{5Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right]$$

b) Al Tener Diferentes Posiciones de Carga, El Campo No Tiene Simetría Cilíndrica Ya Que las Componentes X e Y No Se Anulan.

En Consecuencia, Solo se Puede Calcular E_z, Ya Que para E_x E_y Necesitaríamos ϕ_x ϕ_y $(E = -\nabla\phi)$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{5Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right)$$

Pruebe que No Se Anulan :)

P4

Sabemos que el campo es RADIAL en TODO el espacio. Así que lo calculamos por ley de Gauss para afuera y $r > R$



$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{da} \Rightarrow 2\pi r h E = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{en}}{2\pi r h \varepsilon_0} \quad \cdots \text{¿Cuál es mi } q_{en}?$$

, Al ser un Cascaron Cilindrico, Tengo un σ (que no conozco) no un ρ

$\Rightarrow q_{en} = \sigma\, 2\pi a h$, Entonces $\vec{E}(r) = \frac{\sigma a}{r\varepsilon_0}\hat{r}$. Queremos el campo a una distancia $r_0 \rightarrow \vec{E}(r_0) = \frac{\sigma a}{r_0\varepsilon_0}\hat{r}$

Ahora, el Campo es el Responsable de la Fuerza que permite el mov. Circular. Haciendo $\sum F_r$ en eje RADIAL

$$q\frac{\sigma a}{r_0\varepsilon_0} = -m\frac{v^2}{r_0}$$ → De donde saco v^2???

El Ión sale con UNA energía $U_i = qV_0$, y justo antes de entrar a la sección circular de los Electrodos toda la energía se convierte en cinética $K_i = \frac{1}{2}mv^2$. Entonces la velocidad de entrada es $v^2 = \frac{2qV_0}{m}$

Reemplazando : $q\frac{\sigma a}{r_0\varepsilon_0} = \frac{-2mqV_0}{r_0 m} \Rightarrow \sigma = \frac{-2V_0}{\sigma a}$

$$\Rightarrow q\frac{\sigma a}{r_0\varepsilon_0} = -\frac{m}{r_0}\frac{2qV_0}{m\sigma} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{-2V_0}{\sigma a}}$$

Entonces mi Campo para $r \in (a,b)$: $E = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow E(r) = \frac{-2\varepsilon_0 V_0}{a}\frac{a}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E}(r) = -2\frac{V_0}{r}\hat{r}$

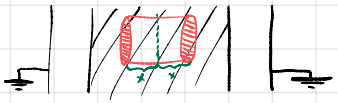
Finalmente, $\Delta V_{BA} \Rightarrow V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl} \Rightarrow \Delta V = \int_b^a E\hat{r}\cdot dl\hat{r} \Rightarrow \Delta V = \int_b^a -2\frac{V_0}{r}\,dr \Rightarrow \boxed{\Delta V = 2V_0 \ln(b/a)}$ //

P5)

Las Regiones son las siguientes:



Ley de Gauss en II :



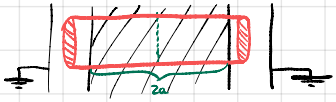
Solo hay flujo por caras

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oint_S E\hat{x}\cdot b\hat{x} = E\cdot 2A \Rightarrow E2A = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0}$$

Donde la carga encerrada en el cilindro es: $q_{en} = \rho \underbrace{A2x}_{\text{Volumen}}$

Reemplazando: $E2A = \frac{2\rho Ax}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{x}}$ en Región II

Ahora para Region I y III :



$$\oint_S \vec{E}\vec{dS} = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E2A = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0}$$

La carga encerrada por el cilindro es: $q_{en} = \rho 2aA$

Reemplazando: $E2A = \frac{\rho 2aA}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{x}$, entonces $\boxed{\vec{E}_I(x) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{x}}$ y $\boxed{\vec{E}_{III}(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{x}}$

Ahora, V_I : $V_I(x) = V_b - \int_{-b}^{x} E_I\,dx \Rightarrow \boxed{V_I(x) = \frac{\rho a(b+x)}{\varepsilon_0}}$ $\quad \int_b^x \frac{\rho x}{\varepsilon_0}dx = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}(b+x)$

V_{II} : $V_{II}(x) = V_{I(a)} - \int_a^x E_{II}\,dx \Rightarrow \boxed{V_{II}(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}(2b-a)}$ $\quad \int_a^x \frac{\rho x}{\varepsilon_0}dx = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x^2-a^2)$

V_{III} : $V_{III}(x) = V_{I(a)} - \int_a^x E_{III}\,dx \Rightarrow \boxed{V_{III}(x) = \frac{\rho a(b-x)}{\varepsilon_0}}$ $\quad \int_a^x \frac{\rho a}{\varepsilon_0}dx = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}(x-a)$