Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Física
Electricidad y Magnetismo FIS1533-1, 2022-2
Profesor: Marcelo Calderón (marcelo.calderon@uc.cl).
Ayudante: Benjamin Wassermann (bewassermann@uc.cl).

Ayudantía 12

Electrostática: Dipolos y vector de polarización

Resumen

- **Dipolos**:

  Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas, q y $-q$ separadas a una distancia d, donde d es muy pequeña comparada con las distancias a las que se mide el campo eléctrico producido por estas cargas.

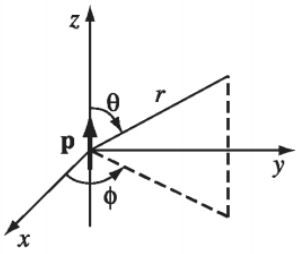
  El dipolo está caracterizado por lo que llamaremos momento dipolar, que se define como:

  $$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$$

  Por otra parte podemos separar el campo eléctrico en 2 componentes, una radial y otra tangencial:

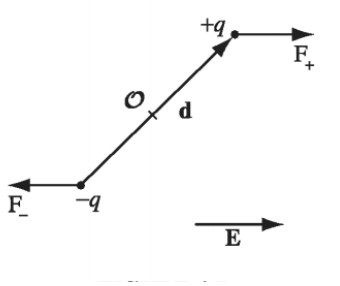
  $$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}$$
  $$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

  Donde:

  Ahora, frente a la acción de un campo externo, tenemos que:

  $$\sum \vec{F} = q\vec{E} - q\vec{E} = 0$$



Sin embargo existe un torque:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

y la energía almacenada por el dipolo es:

$$\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

- **Dieléctrico**:

En un material aislante las cargas se encuentran "ligadas", es decir no pueden moverse libremente. Por lo tanto al aplicar un campo eléctrico externo, los átomos del material se polarizan.De esta forma el material se convierte en una distribución de dipolos. Esta redistribución produce un nuevo campo eléctrico propio del material.

Para facilitarnos las cosas definimos un vector de polarización $\vec{P}$ como el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen en un material. También definimos nuestro vector de desplazamiento $\vec{D}$ como:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

Tenemos densidades de carga inducidas en el dieléctrico debido al campo eléctrico externo que produce un reordenamiento de las moléculas. Donde la densidad de carga superficial de polarización es:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Y la densidad de polarización volumétrica es:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Por otro lado tenemos que el vector de polarización es proporcional al campo externo aplicado:

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}}$$

Donde ε_0 es la permitividad del vacío y χ es la susceptibilidad eléctrica. La cual nos indica que tan susceptible es el material a polarizarse.

En general tenemos 2 tipos de cargas : $\begin{cases} \rho_l, & \text{Las cargas libres, que están a nuestra disposición} \\ \rho_p, & \text{Cargas de polarización al interior del material} \end{cases}$

Escribiendo la Ley de Gauss en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Hay que recordar que en este caso ρ considera todas las cargas. Sean libres o de polarizaión.

Luego:

$$\rho = \rho_l + \rho_p$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \rho_l + \rho_p$$

Donde $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$, entonces:

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \rho_l - \nabla \cdot \vec{P}$$

Reordenando y agrupando obtenemos:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\oint_s \vec{D} \cdot ds = Q_l}$$

Por último, algunas relaciones útiles son:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (1 + \chi) \geq 1}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_o(1 + \chi)\vec{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}$$

Cosas importantes:

1. Si aplicamos un campo externo sobre un dipolo la fuerza neta es cero, sin embargo existe un torque si es que el dipolo no está alineado con el campo.
2. A veces $\vec{E}$ puede ser único y $\vec{D}$ no serlo, o viceversa.

Problemas

Problema 1

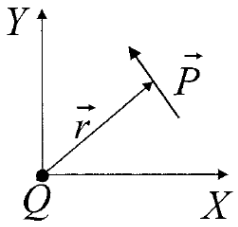
Una esfera dieléctrica de radio b y permitividad de carga ϵ contienen en un interior una densidad de carga libre:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 r & 0 < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Calcule las densidades de carga de polarización en volumen ρ_p y superficial σ_p en las zonas donde existan.

Problema 2

Un dipolo dieléctrico con momento dipolar $\vec{P}$ se encuentra en la posición $\vec{r}$ respecto del origen donde hay una carga Q. Calcule la energía de interacción entre la carga y el dipolo, así como la fuerza y el torque respecto al origen sobre el dipolo.



Problema 3

Una esfera conductora de radio R flota hasta la mitad en un medio dieléctrico de permitividad eléctrica ϵ_1 . La región sobre la esfera es un gas de permitividad eléctrica ϵ_2 . La esfera está cargada con una carga igual a Q.

a) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio, considerando que es igual en ambos medios.

b) Calcule la densidad de carga libre superficial en la esfera conductora, y la densidad superficial de carga de polarización de ambos medios dieléctricos en la interfaz con la esfera.

