# Parte II

# Conductores, Ecuaciones de Poisson y Laplace

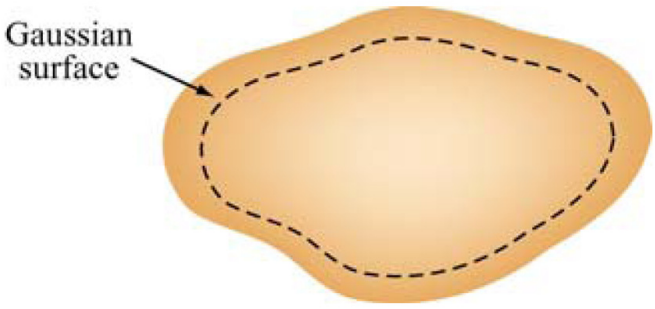
# Capítulo 7

# Conductores

Hasta aquí hemos terminado con los problemas donde la distribución de carga es conocida desde el comienzo. (Integrales de Coulomb). Hasta ahora han sido problemas sin mayores complicaciones que calcular correctamente las integrales. Ahora atacaremos otro tipo de problemas, la determinación de los campos cerca de conductores.
La materia se puede clasificar gruesamente en conductores y aislantes ( o dieléctricos). Un material dieléctrico posee electrones fuertemente ligados a los átomos, de manera que ante la presencia de un campo eléctrico las partículas cargadas pueden cambiar sus posiciones ligeramente, pero se mantienen ligadas a sus moléculas. Por otro lado, un material conductor (como un metal) es aquél que en su interior posee un gran número de electrones libres, y éstos se pueden mover libremente en el conductor, responden a campos eléctricos casi infinitesimales y continúan su movimiento mientras experimentan un campo. Esta corriente de electrones debe estar constantemente provista de fuentes externas de energía, o sino el movimiento de los electrones se detendrá cuando cancelen el efecto de la fuente que produce el campo original (se alcanza un equilibrio estático).

**Campo eléctrostático dentro de un conductor es nulo**
En electrostática, no consideramos fuentes continuas de corriente, de manera que los electrones se moverán hasta que se arreglen de forma que produzcan un campo eléctrico nulo en cualquier parte dentro del conductor (esto suele pasar en una fracción de segundo). Si quedara algún campo dentro del conductor, este campo movería más electrones, luego la única solución electrostática es que el campo es cero en cualquier punto interior del conductor.

**La carga en un conductor se distribuye en su superficie**
Consecuencia directa de la propiedad anterior es que la carga en un conductor debe distribuírse en su superficie. De la ley de gauss, es evidente que si existiera una carga neta al interior del conductor, el flujo eléctrico sobre la superficie de la figura sería distinto de cero, y por lo tanto, existiría un campo eléctrico en su interior



$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0 \rightarrow q_{in} = 0$$

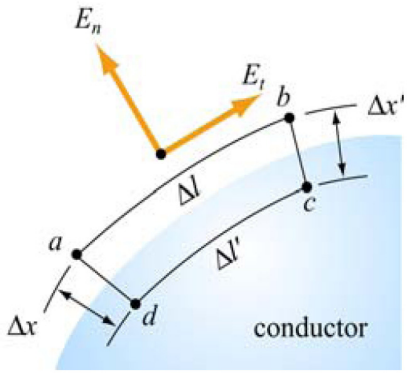
Notar que como el campo eléctrico es cero en el interior de un conductor, entonces

$$-\vec{\nabla}\phi = 0$$

Esto significa que al interior de un conductor el potencial es **constante**.
La dificultad que se presenta cuando hay condutores presentes es evidente. Suponga que estamos en la situación en que se carga un conductor con una carga $Q$. Ahora no estamos en condiciones de saber exactamente dónde están las cargas, sólo sabemos que ellas se van a distribuír sobre toda la superficie. ¿Cómo podemos determinar la forma en que se distribuyen las cargas? Veremos que ellas se deben distribuír de forma que que la superficie del conductor forme una **equipotencial**. Si la superficie de un conductor no fuera equipotencial, entonces habría un campo eléctrico distinto de cero en el interior del conductor, y las cargas en el conductor se seguirán moviendo hasta que finalmente el campo en su interior se anula. (y se alcanze nuevamente un estado de equilibrio electrostático)

**Componente tangencial de $\vec{E}$ en la superficie de un conductor es cero**
Considere la integral de línea sobre el camino cerrado de la figura

$$\oint d\vec{x} \cdot \vec{E}$$




Como el campo eléctrico es conservativo, la integral de línea sobre el camino cerrado *abcda* es cero.

$$\oint_{abcda} d\vec{x} \cdot \vec{E} = E_t(\Delta l) - E_n(\Delta x') + 0(\Delta l) + E_n(\Delta x) = 0$$

donde $E_n$ y $E_t$ son las componentes normal y tangencial del campo eléctrico, respectivamente, y hemos escogido el segmento ab paralelo a $E_t$ en todos los puntos.
En el límite cuando $\Delta x' \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$, se tiene

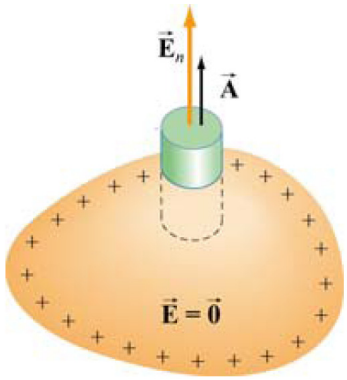
$$E_t \Delta l = 0$$

Como $\Delta l$ es una longitud finita, se concluye que la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie de un conductor es cero. Esto es algo sumamente importante, ya que consecuencia de ésto es que un conductor en equilibrio electrostático es una **Superficie equipotencial**. Mostrar esto ahora resulta evidente, considere 2 puntos $A$ y $B$ sobre la superficie de un conductor, y calcule la diferencia de potencial entre estos dos puntos

$$\phi_B - \phi_A = -\int_A^B d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

ya que $\vec{E}$ sólo tiene componente normal a la curva . Luego, los puntos $A$ y $B$ se encuentran al mismo potencial

**El campo $\vec{E}$ es normal a la superficie de un conductor**
Si la componente tangencial del campo fuera distinta de cero, las cargas entonces se moverían hasta que ésta componente desaparezca. Luego, en un conductor en equilibrio, sólo sobrevive la componente normal del campo eléctrico. Para obtener el campo eléctrico sobre la superficie de un conductor, considere la superficie de Gauss de la figura




De la ley de Gauss obtenemos

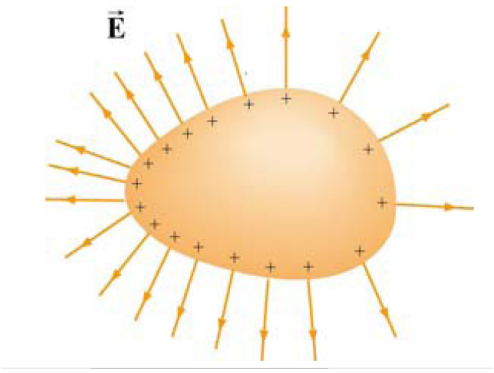
$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E_n A + 0A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

de aquí

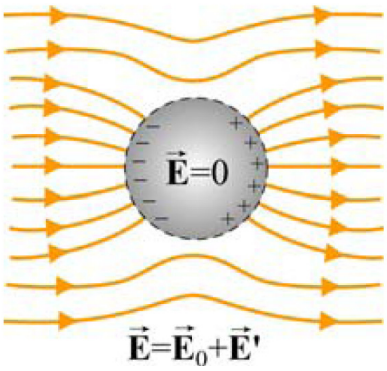
$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Es decir, el campo eléctrico justo sobre la superficie de un conductor es normal a ella y su magnitud está directamente relacionada con la densidad superficial de carga sobre el punto del conductor. Éstas consecuencias son absolutamente generales. Notar que ésto nos permite determinar la densidad superficial de carga sobre un conductor, sin embargo, ! se requiere conocer el campo eléctrico ! ¿Cómo podemos determinar el campo eléctrico sin conocer primeramente la densidad de carga en el conductor?. Veremos más adelante que esto es posible al resolver la ecuación diferencial que satisface el potencial electrostático

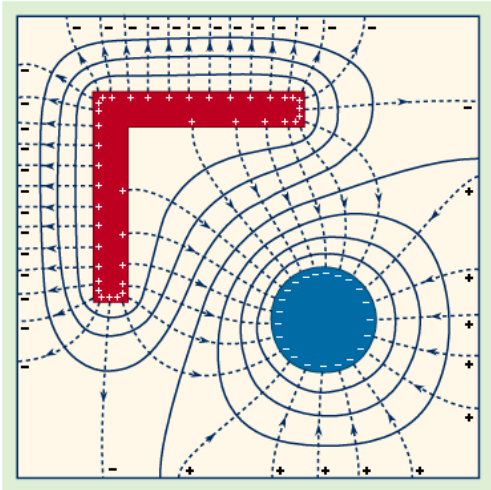
Como conclusión, el campo eléctrico cerca de un conductor tiene la forma de la figura




Como ejemplo, considere un campo uniforme en la dirección horizontal en una región del espacio. Imaginemos que colocamos una esfera conductora en este campo uniforme. Cargas sobre el conductor se moveran y distribuirán hasta alcanzar un equilibrio electrostático, es decir, hasta que el campo en su interior se anule y la componente tangencial del campo sobre la superficie también, de manera que toda las cargas se encuentren en equilibrio en su superficie. La situación de equilibrio será tal cual muestra la figura




Es decir, el campo eléctrico se ve deformado cerca de la esfera conductora, de manera que líneas de campo sean normales en su superficie. El potencial electrostático sobre la superficie esférica es una constante. Otro ejemplo de líneas de campo y superficies equipotenciales se aprecia en la siguiente figura, donde dos conductores se encuentran cercanos



Una aplicación interesante es que la energía potencial de un conductor es muy simple de calcular. Esto se debe a que en un conductor toda la carga se concentra en la superficie, y que sobre ella el potencial es constante. Luego , la energía potencial asociada a un conductor de carga $Q$ y potencial $V$ está dada por

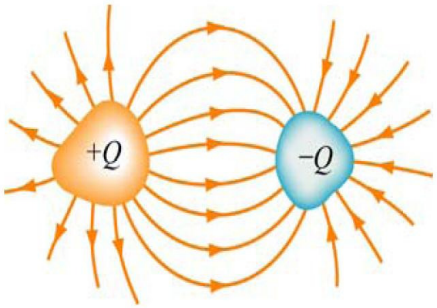
$$U = \frac{1}{2}\iint_S \phi(\vec{x}')dq(\vec{x}') = \frac{1}{2}\phi\iint_S dq(\vec{x}') = \frac{1}{2}\phi\iint_S \sigma(\vec{x}')dS(\vec{x}') = \frac{1}{2}\phi Q$$

La energía potencial de un conductor con carga $Q$ y a potencial $\phi$ está dada por

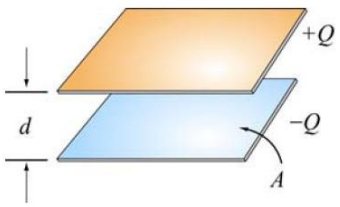
$$U = \frac{1}{2}\phi Q$$

## 7.1. Condensadores

Un condensador es un dispositivo capaz de acumular carga eléctrica. Éstos pueden variar en tamaño y forma, pero su configuración básica consiste en 2 conductores cargados con cargas iguales y opuestas. Los condensadores son de gran importancia en electrónica, y entre sus aplicaciones más conocidas están el almacenamiento de energía eléctrica, amortiguamiento de los cambios de voltaje cuando se conectan a resistencias, filtros de frecuencias, reguladores de tensión y muchas más.




Cuando se encuentran descargados, la carga en ambos conductores es cero. Durante el proceso de carga, una carga $Q$ se mueve desde un conductor a otro, dándole a uno una carga neta $+Q$ y al otro carga neta $-Q$. Una diferencia de potencial entre ambos $\Delta V$ se crea, con el conductor cargado positivamente a un potencial más alto que el conductor cargado negativamente. Notar que aunque esté cargado o descargado, la carga total del condensador como un todo es cero.
El ejemplo más simple de un condensador consiste de 2 placas conductoras de área A, paralelas entre sí, separadas a una distancia $d$




La carga $Q$ almacenada en un condensador es linealmente proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores $|\Delta V|$. Así

$$Q = C|\Delta V|$$

Donde $C$ es una constante positiva llamada **capacidad**. Físicamente, es una medida de la capacidad de almacenar carga eléctrica en sus conductores para una diferencia de potencial dada $\Delta V$. La unidad de capacidad es $C/V$ (Coulomb/ Volt), también conocida como $F$(Farad).

El Farad es una unidad muy grande, condensadores típicos no poseen una capacidad superior a 1 $\mu$ F.

## 7.2. Ecuaciones de Poisson y Laplace

Dadas las ecuaciones fundamentales de la electrostática

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Interesa encontrar una formulación matemática equivalente de este problema. Efectivamente, uno podría relacionar ambas ecuaciones, y obtener una única ecuación general que permita solucionar cualquier problema electrostático. De la segunda ecuación, se desprende que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

Utilizando ésto en la primera ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi(\vec{x})) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Se obtiene la **Ecuación de Poisson**

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Donde el operador $\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ es el conocido **Laplaciano**. Con esto, hemos logrado reducir aún más el problema de la electrostática, y todo consiste en encontrar un campo escalar que satisfaga la ecuación de Poisson en una región del espacio con las condiciones de borde adecuadas. Una vez resuelta esta ecuación, se puede obtener el campo como $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ y luego todo el problema estará completo.

La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial, que en coordenadas cartesianas equivale a

$$\frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,y,z)$$

En regiones del espacio libres de carga ($\rho(\vec{x}) = 0$), se debe resolver la **Ecuación de Laplace** con condiciones de borde adecuadas

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = 0$$

Las ecuaciones de Poisson y Laplace aparece en diversas ramas de la física, como en gravitación, dinámica de fluídos, propagación del calor, etc

Evidentemente, resolver las ecuaciones de Poisson o Laplace puede resultar analíticamente muy complejo, sin embargo existen casos donde la simetría permite resolver éstas ecuaciones sin mayor dificultad. En electrostática existen varios métodos para resolver problemas Poisson - Laplace, algunos de ellos son
Método de las imágenes
Expansión del potencial en polinomios ortogonales
Funciones complejas analíticas, que resuelven Laplace en 2 dimensiones
Método de las funciones de Green
Métodos numéricos

Algunos de estos métodos serán desarrollados en detalle en capítulos siguientes

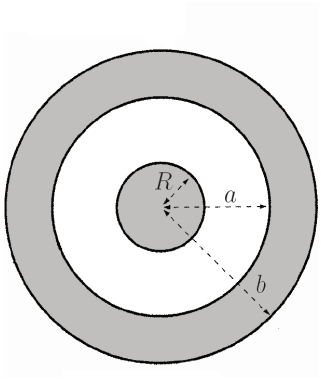
**Problema**

Una esfera de metal de radio $R$ y carga $q$ está rodeada por un cascarón esférico metálico de radio interior $a$ y radio exterior $b$. El cascarón no tiene carga neta

a) Encuentre la densidad superficial de carga en cada superficie

b) Encuentre el potencial en el centro utilizando infinito como punto de referencia

c) Si la esfera exterior se conecta a tierra bajando su potencial a cero (igual que en infinito), ¿Cómo cambian las respuestas anteriores?

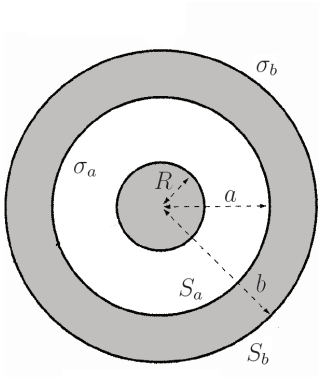



**Solución**

a) Como la esfera de radio $R$ es metálica (conductora), toda la carga debe estar concentrada en su superficie. Dada la simetría esférica del problema, esta distribución de carga debe ser uniforme, es decir

$$\sigma_R = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Ahora, el cascarón es eléctricamente neutro, sin embargo en sus superficies ($S_a$ y $S_b$) se induce carga de forma que el campo eléctrico en su interior sea nulo




Debe tenerse que $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$ para $a < r < b$. Tomando una superficie Gaussiana esférica de radio $r$, $a < r < b$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0$$

ya que $\vec{E}(\vec{x})$ es nulo en todos los puntos interiores del cascarón. Por otro lado

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

luego $Q_{int} = 0$, donde

$$Q_{int} = q + \sigma_a 4\pi a^2 = 0$$

y se obtiene la densidad superficial de carga en la superficie interior del cascarón

$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Como el cascarón es neutro, debe tenerse que

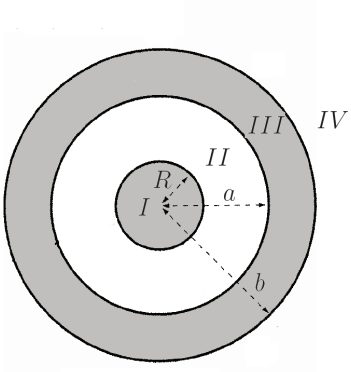
$$\sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = 0$$

$$-q + \sigma_b 4\pi b^2 = 0$$

$$\sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2}$$

Es decir, sobre la superficie interna se induce una carga total $-q$, y sobre la superficie externa, por supuesto, $q$.

b) Distinguimos 4 regiones, como se indica en la figura




Como las regiones $I$ y $III$ están contenidas en el interior de un conductor

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in I, \vec{x} \in III$$

Para encontrar el campo eléctrico en las regiones $II$, y $IV$, utilizamos la ley de Gauss. Tomando una superficie esférica de radio $r$ con $R < r < a$ (región $II$), se tiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\hat{r}, R < r < a$$

Del mismo modo, para una superficie esférica de radio $r$, con $r > b$ (región $IV$), se tiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\hat{r}, b < r$$

Con esto, podemos calcular el potencial en el origen

$$\phi(0) = \int_0^\infty d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}')$$

tomando, por supuesto, un camino radial

$$\vec{x}' = r\hat{r}$$

$$d\vec{x}' = dr\hat{r}$$

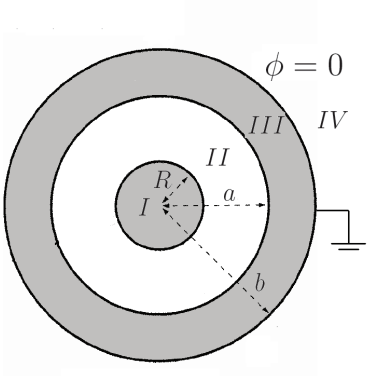
$$r \in [r, \infty]$$

$$\phi(0) = \int_0^\infty dr\hat{r} \cdot \vec{E}(r)\hat{r} = \int_0^\infty drE(r)$$

$$\phi(0) = \int_0^R drE(r) + \int_R^a drE(r) + \int_a^b drE(r) + \int_b^\infty drE(r)$$

$$\phi(0) = \int_R^a \frac{drq}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_b^\infty \frac{drq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

c) Ahora, se tiene




Al igual que antes debe tenerse que $\vec{E}(\vec{x}) = 0$ para $\vec{x} \in III$ (interior de un conductor). Esto simplemente se traduce en

$$q + \sigma_a 4\pi a^2 = 0$$

(por ley de Gauss). Es decir, al igual que antes

$$\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Además el potencial ahora es nulo sobre la superficie exterior $S_b$, esto quiere decir que

$$\phi(b) = \int_b^\infty d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0$$

para cualquier camino entre $b$ y el infinito. Por supuesto, esto requiere que

$$\vec{E}(\vec{x}') = 0 \forall \vec{x} \in IV$$

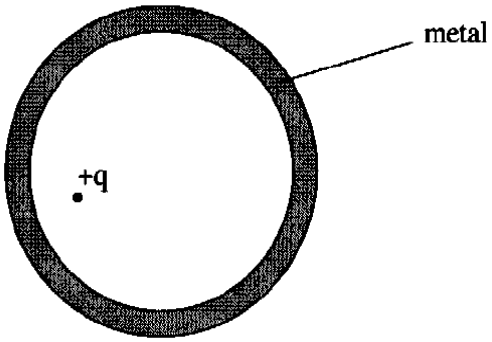
Notar que esto implica que la carga encerrada por una superficie Gaussiana contenida en $IV$ necesariamente es cero. Es decir, el cascarón ya no es un objeto eléctricamente neutro (se debe inducir una carga neta en el, igual a $-q$).

$$q + \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 = q - q + \sigma_b 4\pi b^2 = 0$$

$$\sigma_b = 0$$

**Problema**

Una esfera metálica se encuentra inicialmente descargada. Ahora imagine que una carga positiva $q$ es colocada en algún lugar (no necesariamente al medio) dentro de la esfera y sin tocar las paredes.




a) ¿Qué carga se induce en la pared interior y exterior de la esfera? Indicar cualitativamente la concentración de densidad de carga inducida . Describir cómo son las líneas de campo eléctrico dentro y fuera de la esfera

b) Suponga que se mueve la carga $q$ dentro de la cavidad. ¿Cambia la distribución en la superficie exterior de la esfera?

c) Ahora se coloca la carga $q$ en contacto con la superficie interior de la esfera.¿Cómo queda la distribución de carga en la superficie interior y exterior?

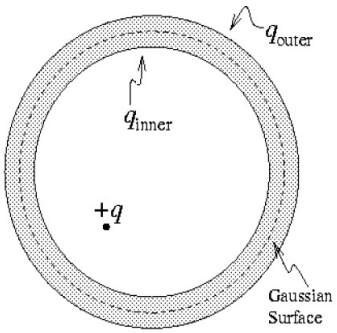
d) ¿Qué sucede si ahora se acerca otra carga $q'$ cerca de la superficie exterior del conductor?

**Solución**

a) La carga $q$ en el interior de la esfera metálica inducirá una separación de carga en el metal. Sea $q_{int}$ la carga total inducida en la superficie interior, y $q_{out}$ la carga total inducida en la superficie exterior. Debido a que la esfera inicialmente se encuentra descargada, la ley de conservación de la carga indica que se debe tener

$$q_{in} + q_{out} = 0$$

¿Cuánto vale $q_{int}$? Tomemos una superficie Gaussiana contenida enteramente dentro del cascarón esférico como se muestra en la figura



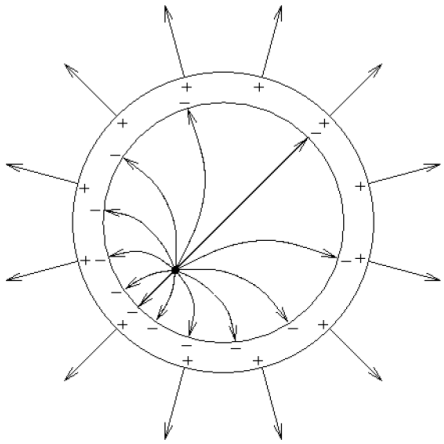

La carga total encerrada por esta superficfie es

$$q_{enc} = q_{int} + q$$

Pero, debido a que el campo eléctrico $\vec{E}$ es cero en el interior de metal, la ley de Gauss indica

$$\oiint d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{(q_{int} + q)}{\epsilon_0} = 0$$

De esta forma $q_{int} = -q$, y entonces $q_{out} = q$. La distribución de éstas cargas y sus respectivas líneas de campo son como se aprecia en la siguiente figura



La carga negativa en la superficie interna se concentra mayoritariamente en la parte de la esfera más cercana a la carga q. En contraste, la carga positiva de la superficie exterior se distribuye uniformemente sobre la superficie exterior. Ésto último debido a que la esfera metálica es una superficie equipotencial, y la única forma de que esto suceda es que el campo sea radial y uniforme sobre la superficie exterior

El campo eléctrico fuera de la esfera es

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

tal como si la carga $q$ se encontrara en el centro del conductor

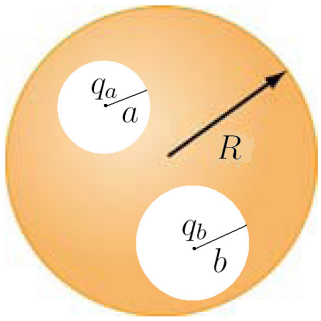
b) La distribución de carga en el exterior no cambia al mover la carga $q$ en el interior, por la misma razón anterior. Por supuesto, la carga inducida en el interior de la superficie si se vuelve a distribuír en la medida que movemos $q$, para asegurar que el campo en su interior siga siendo nulo $\vec{E} = 0$. Ésto resulta interesante, pues desde el exterior del conductor podríamos saber cuanta carga se encuentra en el interior, pero no podremos asegurar en que posición se encuentra.

c) Cuando la carga $q$ toca la superficie interior, la carga inducida $-q$ se concentrará enteramente en el punto de contacto y cancelará la carga $q$.

d) Si se acerca ahora otra carga $q'$ al exterior de la esfera, entonces la carga se distribuirá en la superficie exterior de forma de ser una equipotencial. La distribución de carga al interior no cambia debido a la prescencia de una carga en el exterior. En otras palabras, si una cavidad está encerrada en un conductor, ninguna distribución estática de carga en el exterior podrá producir campos dentro. Este principio se conoce como shielding, y explica el por qué los aparatos eléctricos se encuentran en cubiertas metálicas. .

**Problema**

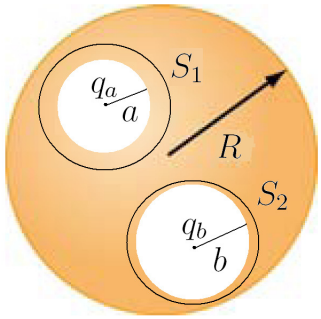
Dos cavidades esféricas, de radios $a$ y $b$ están contenidas en el interior de una esfera conductora neutra de radio $R$. En el centro de cada cavidad hay una carga puntual $q_a$ y $q_b$




a) Encuentre las densidades de carga superficiales
b) ¿ Cuál es el campo eléctrico fuera del conductor?
c) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?

**Solución**

a) Sobre las superficies $S_a$ y $S_b$ en cada cavidad se inducirá carga de forma de anular el efecto de las cargas puntuales en el interior del conductor. Sean dos superficies $S_1$ y $S_2$ como se muestra en la figura




Como $S_1$ está contenida en el interior del conductor

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

se obtiene

$$Q_{int} = 0 = q_a + \sigma_a 4\pi a^2 = 0$$

se obtiene la densidad superficial de carga inducida en la cavidad

$$\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2}$$

Del mismo modo, y utilizando la ley de Gauss con la superficie $S_2$, se obtiene

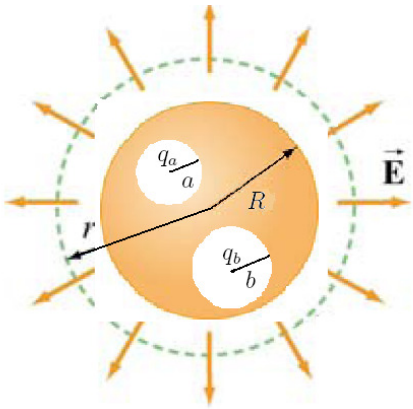
$$\sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2}$$

Como el conductor es neutro, se inducirá carga en la superficie exterior, de forma que

$$-q_a - q_b + \sigma_R 4\pi R^2 = 0$$

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

b) El efecto de las cargas puntuales $q_a$ y $q_b$ es anulado mediante las cargas inducidas en las cavidades. Con esto, el campo exterior posee una simetría esférica, y se puede obtener por la ley de Gauss




$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_a + q_b}{\epsilon_0}$$

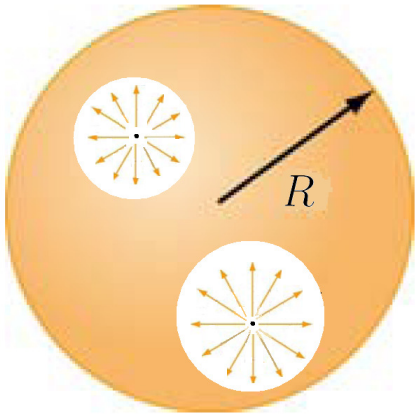
$$\vec{E}(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi r^2 \epsilon_0}\hat{r}, r > R$$

c) Dentro de la cavidad $a$, el campo es simplemente el de la carga puntual $q_a$

$$\vec{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_a^2} q_a \hat{r}_a$$

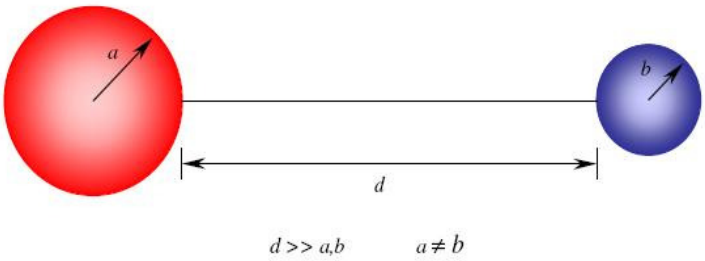
donde $r_a$ es la distancia desde un punto interior a la cavidad $a$ a la carga puntual $q_a$. Del mismo modo, dentro de la cavidad $b$

$$\vec{E}_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_b^2} q_b \hat{r}_b$$



**Problema**

Un sistema de dos esferas de radio $a$ y $b$ (con $a > b$) conductoras cargadas posee una carga total $Q$. Si ellas están separadas por una gran distancia y se les conecta con un alambre conductor de dimensiones despreciables, calcule la carga total sobre cada esfera y la magnitud aproximada del campo eléctrico sobre la superficie de cada una.




$d >> a,b \qquad a \neq b$

**Solución**

Sabemos lo siguiente: Cada esfera tiene una carga desconocida, pero su suma sí lo es

$$Q_A + Q_B = Q$$

Notemos que el sistema entero es un conductor, y por lo tanto, es un equipotencial. Además, como las esferas están separadas por una gran distancia, entonces el campo producido por una afecta de manera despreciable el campo de la otra. En la vecindad exterior de $A$, el campo es de la forma

$$\vec{E}_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A^2}\hat{r}_A$$

y en la vecindad de $B$ es de la forma

$$\vec{E}_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B^2}\hat{r}_B$$

Ahora usemos el hecho que el sistema completo es un conductor, y por lo tanto $\phi(a) - \phi(b) = 0$

$$\phi(a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}_A \cdot d\vec{l} = \frac{Q_A}{4\pi a\epsilon_0}$$

$$\phi(b) = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}_A \cdot d\vec{l} = \frac{Q_B}{4\pi b\epsilon_0}$$

De donde

$$\frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

Lo que equivale a

$$Q_A = Q_B\frac{a}{b}$$

y usando que $Q = Q_A + Q_B$

$$Q_A = \frac{aQ}{a+b}$$

$$Q_B = \frac{bQ}{a+b}$$

Con esto, el campo eléctrico sobre la superficie de la esfera A tiene como magitud

$$E_A = \frac{aQ}{4\pi\epsilon_0(a+b)a^2}$$

$$E_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a+b)a}$$

y para la esfera B

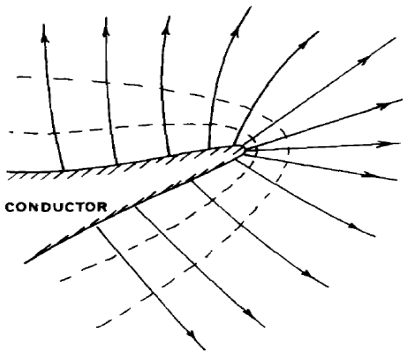
$$\vec{E}_B = \frac{bQ}{4\pi\epsilon_0(a+b)b^2}$$

$$\vec{E}_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a+b)b}$$

De esta forma,

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{b}{a} < 1$$

Es decir, el campo eléctrico sobre la esfera de radio menor es mayor que el campo sobre la esfera de radio mayor. Los campos están en proporción inversa de los radios.
Éste es un efecto muy conocido, y ocurre cuando se carga un conductor que no es esférico, por ejemplo, alguno que tenga una punta o un lado muy puntiaguido, como el de la figura

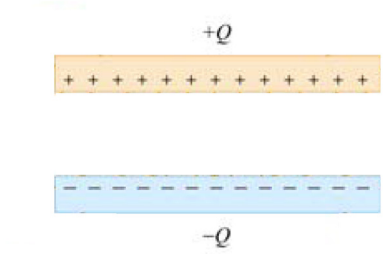



Entonces una cantidad relativamente pequeña de carga acumulada en la punta puede generar una densidad superficial de carga muy grande, y como consecuencia, un mayor campo justo afuera. Este resultado es técnicamente muy importante, por que por ejemplo el aire se vuelve conductor si el campo es demasiado grande.

Lo que sucede es que un ion cerca de la punta es acelerado por este campo intenso, y si el campo es lo suficientemente grande, el ion puede obtener suficiente energía cinética antes que golpee otro atomo y entonces podrá arrancar otro electrón de éste atomo. Como resultado, se producen más y más iones. Este movimiento constituye una descarga. Si se desea cargar entonces un conductor a un potencial alto y que no se produzcan descargas sobre él en el aire, hay que asegurarse que la superficie sea suave, de forma que no hayan partes donde el campo sea anormalmente alto

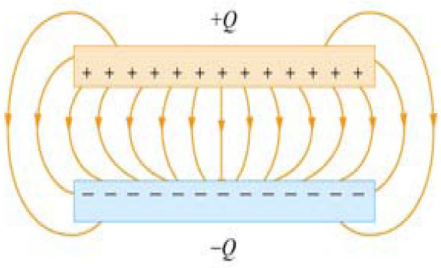
**Problema**

Considere dos placas metálicas conductoras de igual área $A$ y separadas una distancia $d$. La placa superior posee carga $Q$ mientras que la placa inferior tiene carga $-Q$. Encontrar la capacidad del sistema




**Solución**

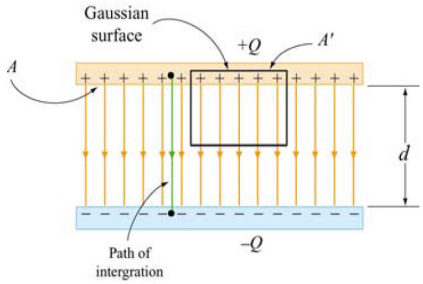
Para encontrar la capacidad C, primero debemos conocer la forma del campo eléctrico en el interior del condensador (y luego determinar la diferencia de potencial entre placas). Por supuesto que un condensador real tiene un largo finito, luego, las líneas de campo cerca del borde de las placas se deforman, y el campo no está contenido totalmente entre las placas. En la figura se aprecian las líneas de campo considerando el efecto de los bordes




De todas formas, ignoraremos éste tipo de efectos asumiendo una situación ideal, en donde las líneas de campo son rectas . En el límite cuando las placas tienen largo infinito (o bien un largo mucho mayor que la separación), el campo tendrá simetría plana y entonces podemos usar la ley de Gauss para determinar su magnitud

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Elegimos una superficie de Gauss con forma de caja, de área $A'$, tal como muestra la figura



Como el campo en el interior del conductor es nulo, sólo hay flujo sobre una de las tapas, de esta forma la ley de Gauss queda

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = EA' = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A'}{\epsilon_0}$$

de donde el campo eléctrico al interior del condensador tiene magnitud igual a

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ahora, la diferencia de potencial entre las placas del condensador se obtiene integrando el campo sobre una curva que va desde la placa positiva hasta la placa negativa. Por supuesto elegimos una trayectoria paralela en todo instante al campo

$$\Delta V = \phi_- - \phi_+ = -\int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ed$$

Para obtener la capacidad, el término relevante es el valor absoluto de esta diferencia de potencial, digamos

$$\mid \Delta V \mid = Ed$$

De esta forma, la capacidad de un condensador plano está dada por

$$C = \frac{Q}{\mid \Delta V \mid} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Claramente depende únicamente de la geometría del condensador, y aumenta linealmente con el área de las placas. Mientras mayor área, mayor capacidad de almacenar carga tiene para una misma diferencia de potencial entre sus placas. Además es inversamente proporcional a la distancia $d$ entre placas, esto debido a que mientras menor es la distancia, menor es la diferencia de potencial entre ambas para una carga fija Q.

Ahora, si tenemos un condensador plano de área cuadrada y de lado 10 cm, tendremos $A = 0,1 \times 0,1 = 0,01\ m^2$
Suponiendo un ancho $d = 1$ cm, tenemos que la capacidad vale

$$C = \frac{9 \times 10^{-12} \times 0,01}{0,01}$$

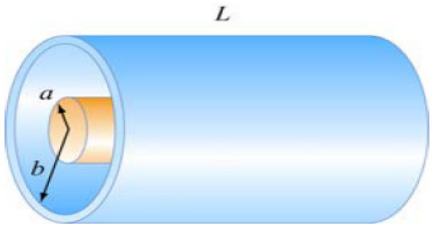
$C = 9 \times 10^{-12}$ F

Como ejemplo, si al condensador se aplica una diferencia de potencial de $1,5$ Volts (pila 2A), será capaz de almacenar una carga igual a

$$Q = C\Delta V = 1,5 \times 9 * 10^{-12} = 1,35 \times 10^{-11}$$

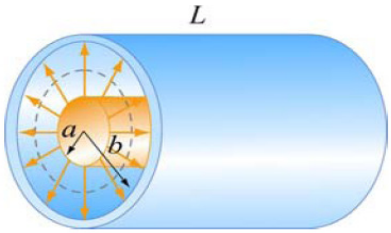
**Problema**

Considere un cilindro sólido de radio $a$ rodeado por una cáscara cilíndrica de radio interior $b$. La longitud de ambos cilindros es $L$ y consideramos que este largo es mucho mayor que las dimensiones de $b-a$, la separación entre cilindros, de manera que se puede despreciar los efectos de borde. El condensador se carga de forma que el cilindro interior posea carga $Q$ y el exterior carga $-Q$. ¿Cuál es la capacidad?




**Solución**

Para obtener la capacidad debemos primero obtener el campo eléctrico en cualquier parte en la región entre ambos conductores. Debido a la simetría cilíndrica del sistema, elegimos por supuesto una superficie Gaussiana como un cilindro coaxial con longitud $l < L$ y radio $r$ donde $a < r < b$. Usando la ley de gauss, tenemos




$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \oiint_S E(r)\hat{r} \cdot dS\hat{r} = E(r)2\pi rl$$

Ahora, notar que por la simetría, para que los cilindros sean equipotenciales, el campo debe ser radial a sus superficies, y luego, deben tener una densidad superficial de carga uniforme $\sigma$. La carga encerrada por el cilindro de Gauss es, simplemente

$$q_{in} = \frac{2\pi al\sigma}{\epsilon_0}$$

Con esto,

$$E(r) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0 r}$$

Notar que el campo eléctrico es diferente de cero únicamente en la region $a < r < b$. Para $r < a$ la carga encerrada es $q_{enc} = 0$ ya que la carga neta del conductor de radio $a$ debe ubicarse sobre su superficie. Del mismo modo, para $r > b$, la carga total encerrada es 0, debido a que un condensador en su totalidad es neutro, es decir, cualquier superficie que encierre completamente al condensador encierra una carga total igual a cero.

La diferencia de potencial está dada por

$$\Delta V = \phi_b - \phi_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b E_r dr$$

$$\phi_b - \phi_a = -\frac{a\sigma}{\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{a\sigma}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

donde el camino de integración tiene la dirección radial del campo eléctrico. Como era de esperarse, el conductor exterior con carga negativa tiene menor potencial. De esta forma tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma 2\pi a L \epsilon_0}{a\sigma ln(\frac{b}{a})} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{ln(b/a)}$$

Claramente sólo función de los factores geométricos. Consideremos un condensador cilíndrico de largo $L = 5$ cm
$b = 0,5$ cm, $a = 0,1$cm

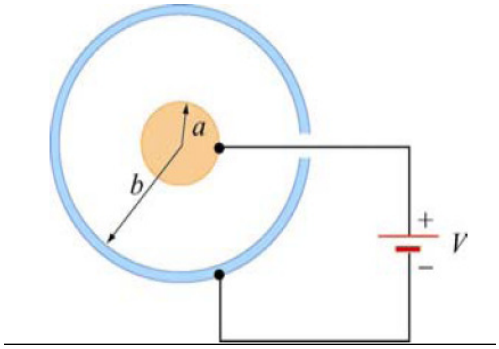
$$C = \frac{2\pi 9 \times 10^{-12} \times 0,05}{ln(5)} = 1,75 * 10^{-12} F$$

Si conectamos una bateria de 5 Volt a este condensador, se almacenará una carga de

$$Q = C\Delta V = 8,784 \times 10^{-12} C$$

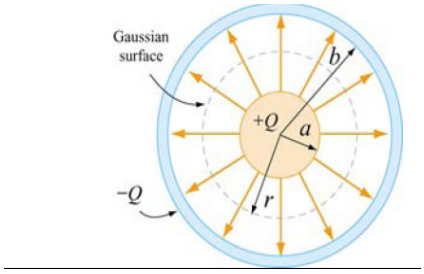
**Problema**

Considere un condensador esférico, que consiste de 2 esféras concéntricas de radios $a$ y $b$. La cáscara interior posee carga $Q$ distribuída uniformemente sobre su superficie, y la esfera exterior posee una carga igual pero opuesta $-Q$. Cuál es la capacidad de esta configuración?




**Solución**

El campo eléctrico sólo es distinto de cero en la región $a < r < b$. Usando la ley de Gauss con una superficie esférica y de radio $r$ como se muestra en la figura




$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E_r A = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

de donde

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

La diferencia de potencial entre las dos cáscaras conductoras es

$$\Delta V = \phi_b - \phi_a = -\int_a^b d\vec{l} \cdot \vec{E}$$

$$\phi_b - \phi_a = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

de donde obtenemos

$$C = \frac{Q}{\mid \Delta V \mid} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

Ahora, para un conductor esférico aislado, también se puede hablar de capacidad, ésta se obtiene tendiendo el radio $b$ a infinito, luego, la capacidad de la esfera conductora de radio $a$ es

$$C_a = \lim_{b\to\infty} C = 4\pi\epsilon_0 \lim_{b\to\infty}\left(\frac{ab}{b-a}\right) = 4\pi\epsilon_0 \lim_{b\to\infty}\frac{a}{(1-\frac{a}{b})} = 4\pi\epsilon_0 a$$

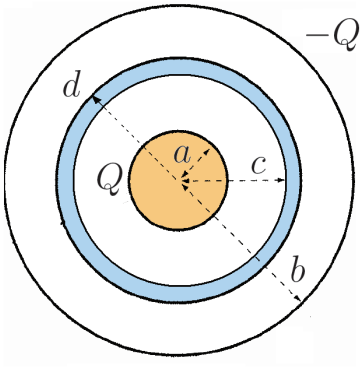
Luego, para una esfera conductora de radio $R$, su capacidad es
$C = 4\pi\epsilon_0 R$

Este resultado también se podría obtener considerando que una esfera de radio $R$ con carga $Q$ uniformemente distribuída sobre su superficie posee un potencial $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, usando infinito como referencia para el potencial, esto da

$$C = \frac{Q}{\mid \Delta V \mid} = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R$$

**Problema**

Considere un conductor esférico de radio $a$ dentro de otro de radio $b$. En el espacio entre ambos conductores se introduce un cascarón esférico (concéntrico) conductor de radios interno y externo $c$ y $d$, respectivamente. Si el conductor de radio $a$ tiene carga $Q$ y el exterior de radio $b$ tiene $-Q$, discuta que ocurre con la capacidad al introducir el cascarón

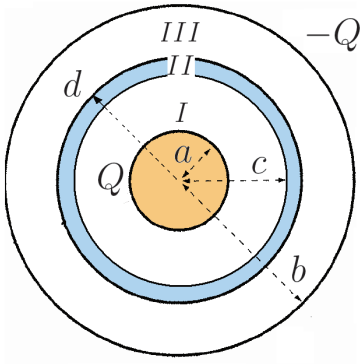



**Solución**

En el problema anterior se obtuvo que la capacidad de un condensador esférico está dada por

$$C = \frac{Q}{\mid \Delta V \mid} = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{ab}{b-a} \right)$$

Veamos que ocurre cuando se introduce un conductor neutro entre $a$ y $b$. Distinguimos 3 regiones, como se indica en la figura




Claramente el campo (de existir) en todo el espacio presenta una dependencia radial. Por ley de Gauss,utilizando una superficie esférica de radio $r$, con $a < r < c$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, a < r < c$$

Para la región $II$, dada por $c < r < d$

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in II$$

pues corresponde al interior de un conductor. En consecuencia, se induce una carga $-Q$ sobra la superficie interna del cascarón. Dado que éste es neutro, sobre su superficie exterior sei induce carga $Q$. Para la región $III$, exactamente el mismo resultado encontrado en la región $I$

se obtiene para el campo eléctrico $\vec{E}(r)$, $d < r < b$. Vemos que este conductor altera el campo eléctrico en el interior (con respecto al caso en que no está), donde la única diferencia es que se anula para cierta región interior, claramente disminuyendo la diferencia de potencial entre el conductor de radio $a$ y el conductor de radio $b$, en consecuenctia, aumentará la capacidad del sistema. En efecto

$$\Delta V = \phi_a - \phi_b = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_a^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

donde se ha utilizado un camino radial para calcular la integral de línea, dada la naturaleza del campo

$$\Delta V = \int_a^c d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_c^d d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_d^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

y como $\vec{E}(r) = 0 \ \forall c < r < d$

$$\Delta V = \int_a^c d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_d^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

$$\Delta V = \int_a^c dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_d^b dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Delta V = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

Pero $c < d$, entonces

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{d} - \frac{1}{c} < 0$$

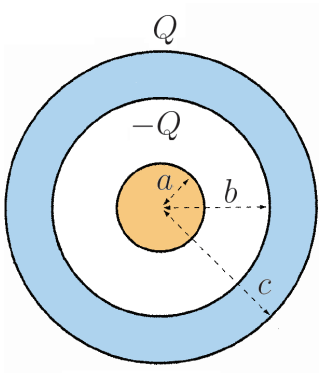
En consecuencia, la diferencia de potencial entre el conductor interior y exterior disminuye en comparación al caso en que no está el cascarón. De esta forma

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

es mayor que el del condensador esférico original

**Problema**

Tres cáscaras esféricas conductoras concéntricas muy delgadas poseen radios $a$,$b$, y $c$, respectivamente, siendo $a < b < c$. Inicialmente la cáscara interior está descargada, la del medio posee una carga total negativa $-Q$ y la externa una carga total positiva $Q$




a) Encuentre el potencial electrostático en cada una de las cáscaras conductoras
b) Si las cáscaras interior y exterior son conectadas mediante un alambre conductor muy delgado que está aislado al pasar por la cáscara central, ¿Cuál es ahora el potencial eléctrico de cada una de las cáscaras? ¿Cuál es la carga en cada una de las esferas?

**Solución**

Distinguimos naturalmente tres regiones del espacio, dadas por $I : r < a$, $II : a < r < b$, $III : b < r < c$, $IV : r > d$. En cada una de ellas el campo eléctrico posee dirección radial y su magnitud depende únicamente de la distancia $r$ al centro del conductor interno. Utilizando la ley de Gauss para la región $I : r < a$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0, \forall S \in I$$

pues $\vec{E}(\vec{x}) = 0 \ \forall \vec{x} \in I$ (interior de un conductor). Para la región $II$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

pues la cáscara de radio $a$ se encuentra inicialmente descargada. De esta forma, el campo eléctrico también es nulo en esta región, $\vec{E}(\vec{x}) = 0 \ \forall \vec{x} \in II$. Del mismo modo, utilizando una superficie esférica de radio $r$, con $b < r < c$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Por último, para $r > d$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 0, \forall S \in IV$$

pues la carga encerrada por cualquier superficie contenida en la región $IV$ es cero. En resumen

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < b \\ \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } b < r < c \\ 0 & \text{si} r > c \end{cases}$$

El potencial en la cáscara exterior es

$$\phi(c) = \int_c^\infty d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando por supuesto un camino radial $\vec{x}' = r\hat{r}$, $d\vec{x}' = dr\hat{r}$, $r \in (c, \infty)$

$$\phi(c) = \int_c^\infty dr\hat{r} \cdot \vec{E}(r) = 0$$

El potencial en la cáscara de radio $b$ es

$$\phi(b) = \int_b^\infty dr\hat{r} \cdot E(r)\hat{r} = \int_b^c dr \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi(b) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^c \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\Big|_b^c$$

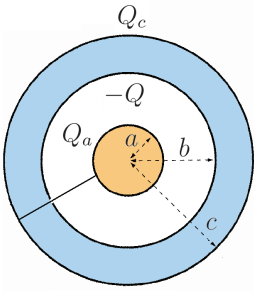
$$\phi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-c}{bc}\right)$$

por último, el potencial en $r = a$ es

$$\phi(a) = \int_a^\infty dr\hat{r} \cdot E(r)\hat{r} = \int_a^b drE(r) + \int_b^c drE(r) + \int_c^\infty drE(r)$$

$$\phi(a) = \int_b^c drE(r) = \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-c}{bc}\right)$$

b) Ahora se tiene la siguiente configuración




Los conductores de radio $a$ y $c$ se encuentran unidas al mismo potencial. De esta forma, la carga contenida inicialmente en estos dos conductores se distribuirá, donde por supuesto se debe tener

$$Q_a + Q_c = Q$$

Definiendo las mismas regiones anteriores, nuevamente se tiene

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in I$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in IV$$

(región $I$ es el interior de un conductor y la carga total del sistema sigue siendo nula). El campo en la región $II$ se obtiene con la ley de Gauss (superficie esférica de radio $r$, $a < r < b$)

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_a}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

y del mismo modo, tomando una superficie esférica de radio $r$, $b < r < c$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = E(r)4\pi r^2 = \frac{-Q + Q_a}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

El potencial en $r = c$ es, por supuesto, nulo

$$\phi(c) = \int_c^\infty drE(r) = 0$$

además

$$\phi(b) = \int_b^\infty drE(r) = \int_b^c drE(r) = \int_b^c dr\frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi(b) = \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^c dr\frac{1}{r^2} = \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{c-b}{bc}\right)$$

y

$$\phi(a) = \int_a^\infty drE(r) = \int_a^b drE(r) + \phi(b)$$

$$\phi(a) = \phi(b) + \int_a^b dr\frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \phi(b) + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

pero las cargas inducidas en $a$ y $c$ deben ser tal que

$$\phi(a) = \phi(c) = 0$$

luego

$$\phi(a) = \frac{Q_a - Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{c-b}{bc}\right) + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right) = 0$$

$$\phi(a) = (Q_a - Q)\frac{c-b}{bc} + Q_a\frac{b-a}{ab} = 0$$

$$Q_a\left(\frac{c-b}{bc} + \frac{b-a}{ab}\right) = Q\frac{c-b}{bc}$$

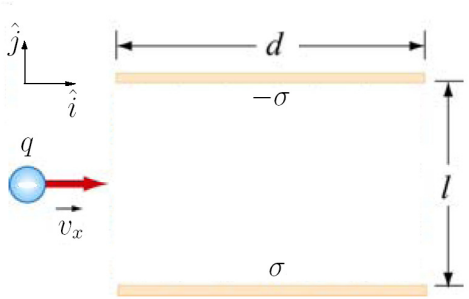
$$Q_a\left(\frac{ac - ab + bc - ac}{abc}\right) = Q\frac{c-b}{bc} \rightarrow Q_a\left(\frac{b(c-a)}{a}\right) = Q(c-b)$$

Finalmente

$$Q_a = Q\frac{a(c-b)}{b(c-a)}$$

**Problema**

Considere un condensador de placas paralelas cargadas con densidades $\sigma$ y $-\sigma$ , como muestra la figura. Se arroja una carga $q$ horizontalmente por el espacio entre las placas con velocidad $v_x$. Encuentre la trayectoria seguida por la partícula cargada y el ángulo que forma su vector velocidad con la horizontal al momento de salir, considerando que $l$ es lo suficientemente grande como para que la carga no choque con alguna de las placas. Considere además que en todo instante la carga $q$ siente una fuerza electrostática




**Solución**

El campo eléctrico en la región entre placas, despreciando efectos de borde y considerando $d >> l$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{j} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{j}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{j}$$

Así, la fuerza electrostática que siente la carga $q$ está dada por

$$\vec{F} = q\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{j}$$

Notar que estrictamente esto es válido únicamente cuando $q$ está quieta, sin embargo consideraremos que esta fuerza de interacción se mantiene a medida que la carga se mueve. De la segunda ley de Newton

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0}\hat{j}$$

De esta forma, la cinemática de la carga está descrita por

$$x(t) = v_x t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{q\sigma}{m\epsilon_0}t^2$$

y las velocidades

$$V_x(t) = v_x$$

$$V_y(t) = at = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0}t$$

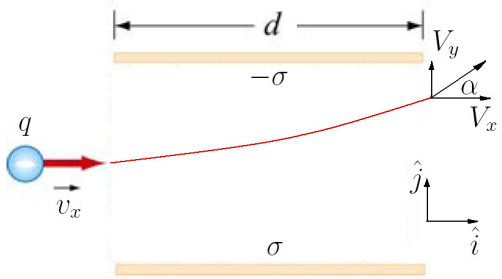
donde el origen coincide con la posición inicial de la carga la momento de ingresar a la región. Para obtener la trayectoria, utilizamos

$$t = \frac{x(t)}{v_x}$$

y entonces

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{q\sigma}{m\epsilon_0}\frac{x^2}{v_x^2}$$

la trayectoria es una parábola en el plano $x - y$




El tiempo que demora la carga en llegar al extremo derecho es

$$t_d = \frac{d}{v_x}$$

con esto, la velocidad vertical en el momento en que sale es

$$V_y(t_d) = at_d = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0}\frac{d}{v_x}$$

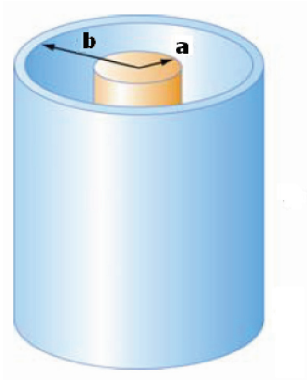
y el ángulo $\alpha$ está dado por

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{V_y(t_d)}{V_x(t_d)}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{q\sigma d}{m\epsilon_0 v_x^2}\right)$$

**Problema**

Dos cilindros muy largos y concéntricos, de radios $a$ y $b$, con $b > a$, se encuentran inicialmente descargados. La región entre ambos se llena con una densidad homogénea de carga $\rho$, y luego cada uno de los cilindros se conectan a tierra. Calcule, resolviendo a -la- Poisson, el potencial y el campo eléctrico en la región interior.




**Solución**

En la región interior a ambos cilindros, es decir $a < r < b$, el potencial satisface la ecuación de Poisson

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Si usamos coordenadas cilíndricas, el potencial podría depender de $\vartheta$, $r$ y $z$. Sin embargo, de la simetría del problema es evidente que

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$$

con lo que $\phi = \phi(r, z)$. Además, debido a que la longitud de los cilindros es mucho mayor a $(b-a)$, el potencial también debe ser simétrico con respecto a $z$. De esta forma, podemos despreciar efectos de borde y considerar que el potencial es sólo una función radial de la forma $\phi = \phi(r)$

Ahora, el Laplaciano en coordenadas cilíndricas para una función que sólo depende de $r$ es

$$\vec{\nabla}^2\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi(r)}{\partial r})$$

De esta forma, la ecuación de Poisson se transforma en

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) = -\frac{r\rho}{\epsilon_0}$$

Luego

$$r\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\int dr\frac{r\rho}{\epsilon_0} + C$$

$$r\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{r^2\rho}{2\epsilon_0} + C$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{r\rho}{2\epsilon_0} + \frac{C}{r}$$

Finalmente

$$\phi(r) = -\int dr \frac{r\rho}{2\epsilon_0} + \int dr \frac{C}{r}$$

$$\phi(r) = -\frac{r^2\rho}{4\epsilon_0} + C\ln r + A$$

Esta es la solución general de la ecuación de Poisson para un potencial de simétría cilíndrica, dependencia radial, y densidad de carga constante. Ahora debemos imponer las condiciones de borde adecuadas para que la solución sea única (Problema Poisson-Dirichlet)

Tenemos $\phi(a) = 0$ Equivale a imponer que la superficie cilíndrica de radio $a$ es una equipotencial conectada a tierra. Luego

$$\phi(a) = -\frac{a^2\rho}{4\epsilon_0} + C\ln a + A = 0$$

Además, $\phi(b) = 0$, con esto

$$\phi(b) = -\frac{b^2\rho}{4\epsilon_0} + C\ln b + A = 0$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos

$$0 = C(\ln a - \ln b) + \frac{(b^2 - a^2)\rho}{4\epsilon_0}$$

De donde obtenemos la constante $C$

$$C = \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}$$

De la primera condición despejamos $A$

$$A = \frac{a^2\rho}{4\epsilon_0} - \ln a \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}$$

$$A = \frac{a^2 \ln(a/b)\rho - lna(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}$$

$$A = \frac{\rho(b^2 \ln a - a^2 \ln b)}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}$$

Con esto, la solución del potencial para $a < r < b$ es

$$\phi(r) = -\frac{r^2\rho}{4\epsilon_0} + \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 \ln(a/b)} \ln r + \frac{\rho(b^2 \ln a - a^2 \ln b)}{4\epsilon_0 \ln(a/b)}$$

Hermoso resultado. Ahora, para obtener el campo eléctrico, usamos el hecho

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

el operador gradiente en coordenadas cilíndricas para una función que sólo depende de $r$ es

$$\vec{\nabla}\phi(r) = \frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\hat{r}$$

de manera que

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{r\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 r \ln(a/b)}\right)\hat{r}$$

que es el campo eléctrico para $a < r < b$. Para $r < a$ es claro que el campo $\vec{E}$ es nulo, ya que no hay carga encerrada por el conductor interior.

Calculemos las densidades de cargas sobre los conductores. Para el conductor interior, tenemos que el campo eléctrico sobre su superficie tiene magnitud

$$E(a) = \frac{a\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 a \ln(a/b)}$$

La densidad de carga sobre la superficie de un conductor se relaciona con el campo eléctrico según

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Con esto la densidad de carga será

$$\sigma_1 = \epsilon_0 \left(\frac{a\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 a \ln(a/b)}\right)$$

El campo eléctrico en la superficie del conductor exterior tiene magnitud

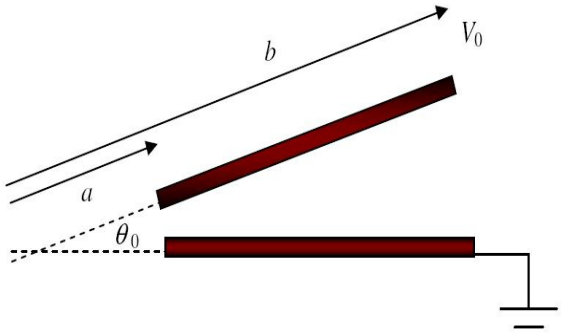
$$E(b) = \frac{b\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 b \ln(a/b)}$$

y la densidad de carga será

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \left(\frac{b\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(a^2 - b^2)\rho}{4\epsilon_0 b \ln(a/b)}\right)$$

**Problema**

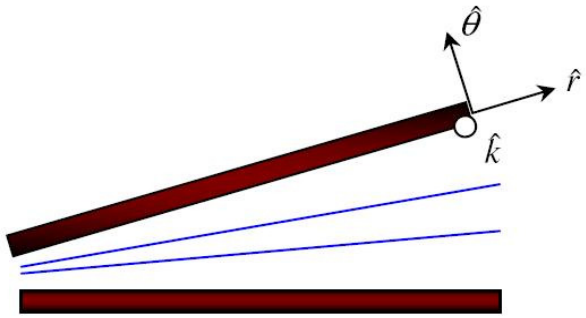
Considere el siguiente dispositivo



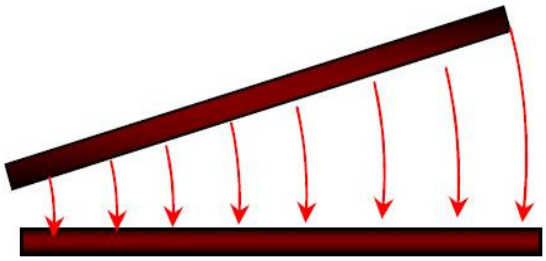

a) Determine el potencial y el campo eléctrico entre las placas.
b) Determine la capacidad por unidad de largo.
Desprecie los efectos de borde.

**Solución**

a) Sabemos que las líneas equipotenciales deben respetar la geometría del dispositivo. De esta forma, las equipotenciales serán rectas radiales, es decir




Por lo tanto, las líneas de campo, al ser perpendiculares a las equipotenciales, deben seguir la dirección $\hat{\theta}$, es decir, son arcos concéntricos.



Si suponemos que el dispositivo es muy largo en la dirección Z, entonces se puede suponer que

$$\vec{E} = E(r, \vartheta)\hat{\vartheta}$$

Pero

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(r, \vartheta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\hat{\vartheta}$$

Como el campo tiene dirección $\hat{\theta}$, $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$
Luego, se tiene que el potencial sólo depende de $\vartheta$, lo cual era de esperarse.
Planteamos la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} = 0$$

$$\phi(\vartheta) = A\vartheta + B$$

Pero la placa inferior está conectada a tierra

$$\phi(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\phi(\vartheta_0) = \phi_0 \rightarrow A = \frac{\phi_0}{\vartheta_0}$$

Finalmente

$$\phi(\vartheta) = \frac{\phi_0}{\vartheta_0} \vartheta$$

$$\vec{E}(r, \vartheta) = -\frac{1}{r} \frac{\phi_0}{\vartheta_0} \hat{\vartheta}$$

b)Calculemos la capacidad por unidad de largo.

$$C = \frac{Q}{V}$$

La carga por unidad de largo, $Q$, de una de las placas puede calcularse a partir de la densidad de carga $\sigma$ que aparece en cada placa del condensador. Su valor puede determinarse directamente del campo eléctrico

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

De donde obtenemos

$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{r} \frac{V_0}{\theta_0}$$

Así, el valor de $Q$ es

$$Q = 1 \int_a^b \sigma(r) dr = \int_a^b \frac{\epsilon_0}{r} \frac{\phi_0}{\vartheta_0} dr = \epsilon_0 \frac{\phi_0}{\vartheta_0} \ln(\frac{b}{a})$$

Finalmente

$$C = \frac{\epsilon_0}{\vartheta_0} \ln(\frac{b}{a})$$

**Problema**

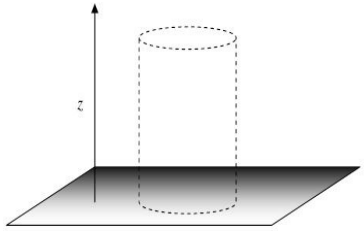
El campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra está dado por la expresión

$$\vec{E}(z) = -(ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z})\hat{k}$$

Con $\alpha, \beta > 0$, y $z$ la altura desde la superficie de la tierra.

a) Determine la densidad de carga

b) Calcule la cantidad total de carga contenida en una columna vertical de sección S que se extiende teóricamente desde x=0 hasta $x = \infty$




**Solución**

a) Para obtener la densidad de carga, utilizamos la forma diferencial de la ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

En este caso

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Las componentes de $\vec{E}$ en $x$ e $y$ son nulas, así

$$\alpha a e^{-\alpha z} + \beta b e^{-\beta z} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$$

Finalmente

$$\rho(z) = \epsilon_0(\alpha a e^{-\alpha z} + \beta b e^{-\beta z})$$

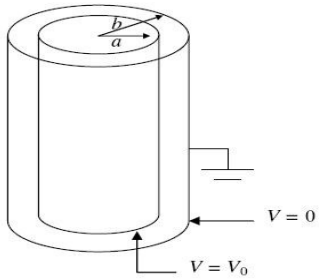
b) La carga total contenida en una columna vertical de sección $S$ será

$$Q = \iiint \rho(z) d^3x = S \int_0^\infty \rho(z) dz = S \int_0^\infty \epsilon_0(\alpha a e^{-\alpha z} + \beta b e^{-\beta z}) dz$$

$$Q = S\epsilon_0(a + b)$$

**Problema**

Se tienen dos cilindros conductores coaxiales, uno de radio $a$ y el otro de radio $b$, conectados a una diferencia de potencial $V_0$.
Calcule $\rho(\vec{x})$,$\vec{E}(\vec{x})$ y $\phi(\vec{x})$ en todo el espacio y $\sigma$ en cada superficie.




**Solución**

Utilizaremos la ecuacion de Laplace, esto es

$$\vec{\nabla}^2\phi(r) = 0$$

El laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Si suponemos que el par de conductores cilíndricos es mucho más alto que su radio, entonces se puede afirmar que el potencial no debe depender de la coordenada $z$, y por lo tanto $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Así mismo, como las características de los conductores no varían con el ángulo $\phi$, también debe cumplirse que $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$.
De esta forma la ecuación diferencial que debemos resolver es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) = 0$$

Con condiciones de borde

$$\phi(a) = V_0, \phi(b) = 0$$

Esta ecuación se puede resolver integrándola directamente

$$\phi(r) = A\ln r + B$$

Esta solución general más las condiciones de borde nos entregan un sistema lineal de ecuaciones

$$A\ln(a) + B = V_0$$

$$A\ln(b) + B = 0$$

De donde obtenemos

$$A = \frac{V_0}{\ln(a/b)}$$

$$B = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln b$$

Y el potencial entre las placas conductoras es

$$\phi(r) = \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(r/b)$$

Válida solo entre $a < r < b$

El campo eléctrico se puede calcular como $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, es decir

$$E(r) = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}, a < r < b$$

$$\vec{E}(r) \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \hat{r}, a < r < b$$

La densidad de carga es $\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, pero

$$\vec{\nabla} \cdot (\frac{\hat{r}}{r}) = 0$$

Con lo que $\rho(r) = 0$, es decir, no hay densidad de carga entre los conductores.
Para determinar las densidades de carga superficial en cada conductor hay que usar el hecho de que el campo en la superficie de un conductor cumple

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

De esta forma, para el conductor $a$

$$\sigma_a = \epsilon_0 \frac{V_0}{a \ln(b/a)}$$

Y para el conductor $b$

$$\sigma_b = -\epsilon_0 \frac{V_0}{b \ln(b/a)}$$

Todo el desarrollo anterior es válido para $a < r < b$.

En el cilindro interno, $(r < a)$

$$\vec{E}(r) = 0$$

ya que dentro de un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico es siempre nulo. De esta forma

$$\phi(r) = V_0$$

$$\rho(r) = 0$$

Ahora, si $r > b$, para calcular el campo utilizamos

$$\phi(b) - \phi(\infty) = \int_{\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{b} dr E(r)$$

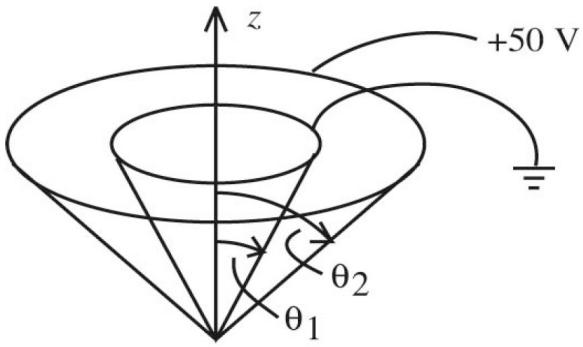
Pero $\phi(b) = 0$, con lo que

$$E(r) = 0$$

Si el campo es 0, entonces $\phi = cte = \phi(b) = 0$, y $\rho(r) = 0$

**Problema**

Dos conos conductores concéntricos, cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son $\vartheta_1 = \pi/6$, y $\vartheta_2 = \pi/4$ respectivamente, se muestran en la figura. Los conos son de extensión infinita y en $r = 0$ están separados por una distancia infinitesimal. Si el cono interior está a un potencial de 0 V, y el exterior a 50 $V$, determinar el potencial y el campo eléctrico $\vec{E}$ en la región interior a ambos conductores




**Solución**

Sea $V$ la región delimitada por $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. Si no hay densidad de carga libre en $V$, el potencial satisface la ecuación de Laplace en $V$

$$\vec{\nabla}^2\phi = 0$$

Dada la geometría del problema, es conveniente utilizar coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}^2\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

El problema posee una clara simetría azimutal (el potencial claramente no depende del ángulo polar $\varphi$). Además, debe existir una independencia en la coordenada $r$, pues la extensión de los conos es infinita. De esta forma, el potencial debe ser únicamente función de $\vartheta$, y se debe resolver

$$\vec{\nabla}^2\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) = 0$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) = 0$$

$$\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = C_1$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = C_1 csc\vartheta$$

$$\phi(\vartheta) = C_1\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + C_2$$

Además

$$\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \ln(\tan\vartheta/2) + C$$

En efecto

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\ln\left(\tan\vartheta/2\right)+C\right)=\frac{1}{\tan\vartheta/2}\sec^2\vartheta/2\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cos\vartheta/2\sin\vartheta/2}=\frac{1}{\sin\vartheta}$$

con esto

$$\phi(\vartheta)=C_1\ln\left(\tan\vartheta/2\right)+C_2$$

Debemos imponer las condiciones de borde en las superficies conductoras. Se tiene

$$\phi(\vartheta_1)=0$$

$$\phi(\pi/6)=C_1\ln\left(\tan\pi/12\right)+C_2=0$$

Además

$$\phi(\vartheta_2)=50$$

$$\phi(\pi/4)=C_1\ln\left(\tan\pi/8\right)+C_2=50$$

Resolviendo el sistema para $C_1$ y $C_2$

$$50=C_1\left(\ln\left(\tan\pi/8\right)-\ln\left(\tan\pi/12\right)\right)$$

$$50=C_1\ln\left(\frac{\tan\pi/8}{\tan\pi/12}\right)$$

$$C_1=\frac{50}{\ln\left(\frac{\tan\pi/8}{\tan\pi/12}\right)}$$

y

$$C_2=-C_1\ln\left(\tan\pi/12\right)$$

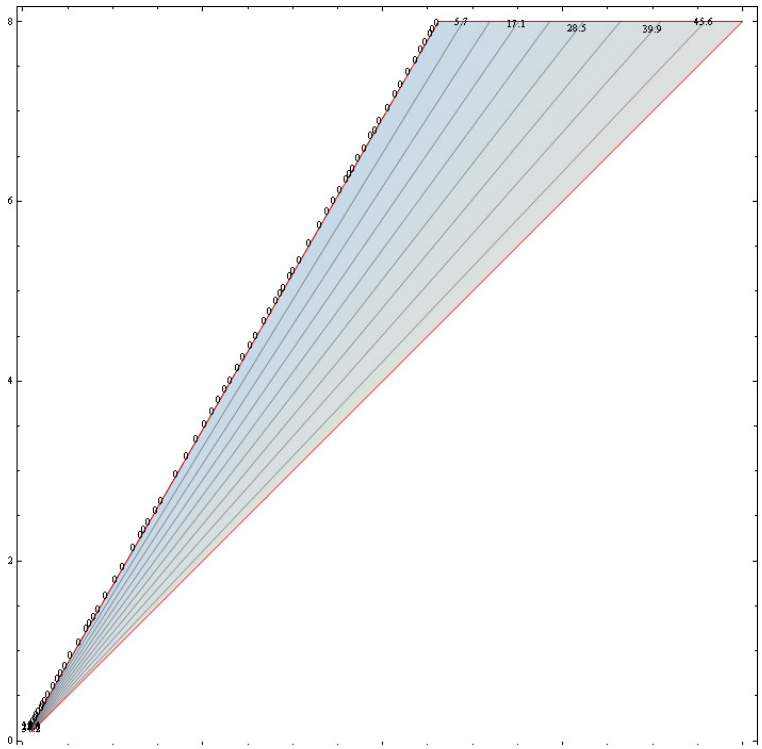
Evaluando

$$C_1=114{,}78834$$

$$C_2=151{,}171411$$

y la solución es

$$\phi(\vartheta)=114{,}78834\ln\left(\tan\vartheta/2\right)151{,}171411$$




Para encontrar el campo eléctrico, utilizamos que

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

En coordenadas esféricas, y considerando que $\phi$ solo depende de $\vartheta$

$$\vec{E}(r,\vartheta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\hat{\vartheta}$$

$$\vec{E}(r,\vartheta) = -\frac{1}{r}\frac{114{,}78834}{2\sin\vartheta}\hat{\vartheta}$$

## 7.3. Almacenamiento de Energía en un condensador

Los condensadores se suelen utilizar para el almacenamiento de energía eléctrica. La cantidad de energía almacenada se puede pensar como el trabajo necesario para cargar al condensador, así, durante el proceso de carga, una fuente de voltaje realiza el trabajo para mover cargas desde una placa a la otra.




Imaginemos que el condensador está inicialmente descargado. En cada placa del condensador hay muchas cargas negativas y positivas, pero estan en equilibrio, por lo que la carga total en ambas es cero, y por consiguiente no existe ningún campo eléctrico entre ellas.
Comencemos extrayendo una carga positiva $+dq$ de la placa inferior, llevándola hasta la superior. Al hacer esto, la placa de abajo queda con carga neta $-dq$. Se repite este proceso una y otra vez, de esta manera cargamos el condensador y creamos un campo eléctrico donde no había inicialmente.

Supongamos que la cantidad de carga en la placa superior en un instante dado es $+q$, y la diferencia de potencial correspondiente es $\Delta V = q/C$. Para traer otro elemento de carga $+dq$ a la placa superior, el trabajo necesario será $dU = \Delta V dq$ (Recordar la interpretación física del potencial!). Si al final del proceso la carga en cada placa es de $Q$ (en módulo), entonces el trabajo realizado (energía entregada al sistema) durante el proceso es

$$U = \int_O^Q dU = \int_0^Q dq\Delta V = \int_0^Q dq\frac{q}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Esto es igual a la energía potencial eléctrica almacenada en un condensador

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2$$

## 7.4. Fuerzas entre conductores cargados

Pensemos ahora en una aplicación directa de esta idea de energía electrostática. ¿Cuál será la fuerza entre las placas de un condensador cargado? Evidentemente debe existir una fuerza, ya que ambas placas están cargadas con cargas de signo opuesto. Esta fuerza es fácil de obtener usando el resultado para la energía electrostática de un condensador, usando el principio de trabajo virtual.
Usemos este método para determinar la fuerza entre las placas de un condensador de placas paralelas. Si imaginamos que el espacio entre las placas es incrementado una pequeña cantidad, digamos $\Delta z$, entonces el trabajo mecánico realizado para moverlas será

$$W = F\Delta z$$

donde F es la fuerza entre las placas. Este trabajo debe ser igual al cambio en la energía electrostática del condensador. Notando que

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

El cambio en la energía ( **si la carga permanece constante**) es

$$\Delta U = \frac{1}{2}Q^2\Delta(\frac{1}{C})$$

Luego, se tiene

$$F\Delta z = \frac{Q^2}{2}\Delta(\frac{1}{C})$$

Esto se puede reescribir como

$$F\Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2}\Delta C$$

Esta fuerza, por supuesto, resulta de la atracción de las cargas en las placas, pero vemos que no nos tenemos que preocupar en detalle sobre como están distribuídas, lo único que necesitamos conocer es la capacidad $C$. En el límite cuando $\Delta z \to 0$

$$F = -\frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dz} = -\left(\frac{dU}{dz}\right)\Big|_{Q=cte}$$

En general

$$\vec{F} = -\left(\vec{\nabla}U\right)\Big|_{Q=cte}$$

Notar que para éste cálculo hemos asumido que la carga en el condensador permanece constante (es decir el condensador se encuentra aislado y no está eléctricamente conectado a otros objetos, de forma que la carga total no cambia). Supongamos que en vez de eso hubieramos imaginado que el condensador es mantenido a una diferencia de potencial constante y utilizamos el desplazamiento virtual. Entonces habríamos tenido

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

y entonces

$$F\Delta z = \frac{1}{2}V^2\Delta C$$

que en el límite equivale a

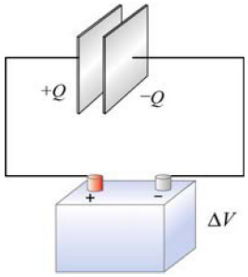
$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dz} = \left(\frac{dU}{dt}\right)\Big|_{V=cte}$$

En general

$$\vec{F} = \left(\vec{\nabla}U\right)\Big|_{V=cte}$$

## 7.5. Condensadores en circuitos eléctricos

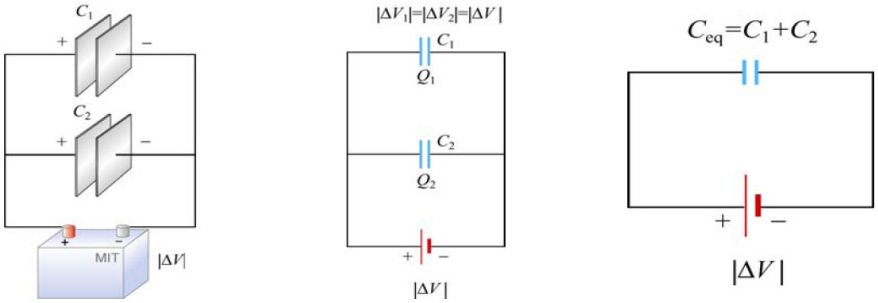
Un condensador se puede cargar al conectar sus terminales a una batería, que mantiene una diferencia de potencial $\Delta V$ entre sus placas.




La conexión resulta de compartir cargas entre los terminales y las placas. Por ejemplo, si la placa se conecta al terminal positivo, adquirirá carga positiva. Esto produce una reducción momentánea de carga en los terminales, y por lo tanto decrece el potencial entre éstos. Luego, reacciones químicas dentro de la batería transfieren más carga desde un terminal al otro para compensar la pérdida y mantener el voltaje en su nivel inicial. La batería se puede pensar entonces como una bomba de carga que trae carga $Q$ de una placa a la otra

### 7.5.1. Conexión en paralelo

Si tenemos dos condensadores, de capacidad $C_1$ y $C_2$ y con cargas $Q_1$ y $Q_2$ y se conectan en paralelo, como en la figura




Las placas izquierdas de cada condensador son conectadas al terminal positivo de la batería y están al mismo potencial que la terminal positiva. De forma similar, las placas derechas están conectadas al terminal negativo y poseen el mismo potencial de éste. La diferencia de potencial entre las placas de ambos condensadores es la misma, luego

$$C_1 = \frac{Q_1}{\mid \Delta V \mid}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{\mid \Delta V \mid}$$

Estos condensadores se pueden ver como un condensador equivalente de capacidad equivalente $C_{eq}$, con una carga $Q$ administrada por la batería. Debe tenerse que

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \mid \Delta V \mid + C_2 \mid \Delta V \mid = (C_1 + C_2) \mid \Delta V \mid$$

de forma que

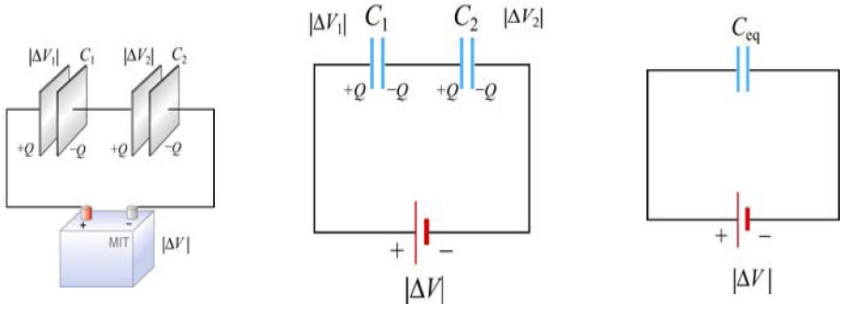
$$C_{eq} = \frac{Q}{\mid \Delta V \mid} = C_1 + C_2$$

Luego, condensadores conectados en paralelo suman su capacidad, en general

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

### 7.5.2. Conexión en serie

Supongamos que tenemos dos condensadores inicialmente descargados $C_1$ y $C_2$ conectados en serie. Una diferencia de potencial $\mid \Delta V \mid$ se aplica entre ambos condensadores. La placa izquierda del condensador 1 está conectada al terminal positivo y se carga positivamente con $+Q$, mientras que la placa derecha del condensador 2 se conecta al terminal negativo y se carga negativamente con $-Q$. ¿Qué sucede con las placas interiores? Ellas estaban inicialmente descargadas, ahora ambas placas exteriores tienen cargas iguales pero opuestas. De esta forma la placa derecha del condensador 1 adquirirá carga $-Q$ y la placa izquierda del condensador 2 $+Q$




Las diferencias de potencial en los condensadores son

$$\mid \Delta V_1 \mid = \frac{Q}{C_1}$$

$$\mid \Delta V_2 \mid = \frac{Q}{C_2}$$

respectivamente. Vemos que la diferencia de potencial $\Delta V$ es simplemente la suma de las diferencias individuales en cada condensador

$$\mid \Delta V \mid = \mid \Delta V_1 \mid + \mid \Delta V_2 \mid$$

Estos dos condensadores se pueden reemplazar por un único condensador equivalente

$$C_{eq} = \frac{Q}{\mid \Delta V \mid}$$

Luego

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

y la capacidad equivalente para dos condensadores en serie está dada por

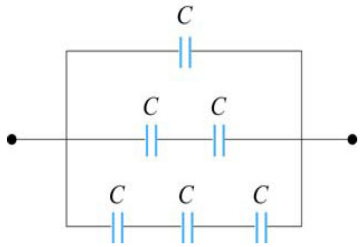
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

En general

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

**Problema**

Considere la configuración de la figura. Encuentre la capacidad equivalente asumiendo que todos los condensadores tienen la misma capacidad $C$




**Solución**

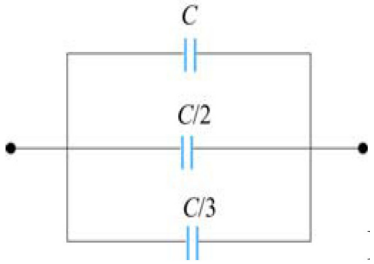
Para los condensadores conectados en serie, la capacidad equivalente esta dada por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

Por otro lado, para los condensadores conectados en paralelo, la capacidad equivalente es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

Con esto, se obtiene el siguiente circuito equivalente

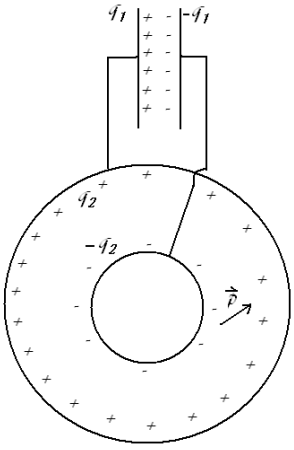



Notar que ahora tenemos 3 condensadores en paralelo. La capacidad equivalente es

$$C_{eq} = C(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{6}C$$

**Problema**

Se tiene un condensador plano con capacidad $C_1$ y un condensador esférico con capacidad $C_2$. El primero tiene cargas eléctricas $q_1$ y $-q_1$ y el segundo tiene cargas eléctricas $q_2$ y $-q_2$. Luego se conectan ambos condensadores como lo muestra la figura




a) Obtenga las nuevas cargas $q_1'$, $-q_1'$, $q_2'$, $-q_2'$ una vez obtenido el equilibrio eléctrico
b) ¿Cuánto vale la pérdida de energía potencial eléctrica?
c) Según su sentido físico ¿dónde se pierde dicha energía?
d) Se coloca un dipolo eléctrico $\vec{p}$ entre las dos esferas del condensador eléctrico. ¿Qué sucede con él?

**Solución**

a) Por conservación de la carga eléctrica, al conectar ambos condensadores, la carga total sólo debe distribuírse, luego

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$$

Al producirse el equilibrio eléctrico, los conductores unidos quedan a un mismo potencial, digamos $V$, luego la diferencia de potencial entre sus terminales es común para ambos condensadores (están conectados en paralelo), esto es

$$q_1' = C_1 V$$
$$q_2' = C_2 V$$

Luego

$$\frac{q_1'}{q_2'} = \frac{C_1}{C_2}$$

Con esto

$$q_1' = \frac{C_1(q_1 + q_2)}{C_1 + C_2}$$

$$q_2' = \frac{C_2(q_1 + q_2)}{C_1 + C_2}$$

b) La energía inicial está dada por

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2}$$

Y la energía final por

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{q_1'^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2'^2}{C_2}$$

La diferencia de energía es

$$U_i - U_f = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} - \frac{q_1'^2}{C_1} - \frac{q_2'^2}{C_2}\right)$$

$$U_i - U_f = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} - \frac{C_1(q_1+q_2)^2}{(C_1+C_2)^2} - \frac{C_2(q_1+q_2)^2}{(C_1+C_2)^2}\right)$$

$$U_i - U_f = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} - \frac{(q_1+q_2)^2}{C_1+C_2}\right)$$

$$U_i - U_f = \frac{1}{2}\frac{(q_1C_2 - q_2C_1)^2}{C_1C_2(C_1+C_2)}$$

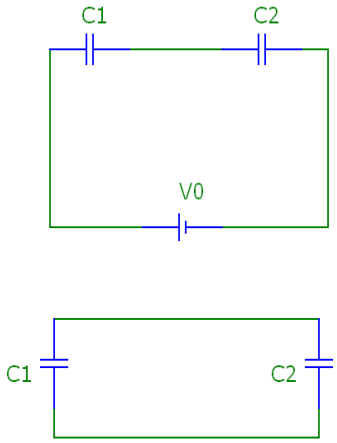
Esta es la pérdida de energía

c) La pérdida de energía se produce debido a que al conectar ambos condensadores, se produce una redistribución de carga en ellos (y entonces en un intervalo de tiempo breve circula una corriente eléctrica en los conductores). La energía que se pierde corresponde a la energía disipada en forma de calor en los conductores

d) El dipolo gira para orientarse en el sentido del campo eléctrico entre ambas cáscaras esféricas. Además, como el campo no es uniforme en esta región, el dipolo se desplaza hacia donde el campo eléctrico es más intenso, es decir, hacia la cáscara negativa

**Problema**

Hay dos condensadores con capacidades $C_1$ y $C_2$ conectados a una batería de potencial $V_o$. A continuación se desconectan de la batería y se unen como en la figura de abajo




Calcular la nueva diferencia de potencial entre las placas en función de $C_1$, $C_2$ y $V_o$

**Solución**

Se tiene que inicialmente $C_1$ y $C_2$ están conectados en serie, luego su capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C_{eq_1}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Con esto

$$C_{eq_1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Si $Q_1$ es la carga almacenada por el sistema (igual en cada condensador), entonces

$$C_{eq_1} = \frac{Q_1}{V_o}$$

$$Q_1 = C_{eq_1} V_o = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_o$$

Ahora, los condensadores se conectan en paralelo, por lo que en esta situación la capacidad equivalente es

$$C_{eq_2} = \frac{2Q_1}{V}$$

Ojo! El factor 2 se debe a que inicialmente la carga total es $2Q_1$ (en cada condensador inicialmente se almacena carga $Q_1$). $V$ es la nueva diferencia de potencial en los condensadores. Ademas se tiene que

$$C_{eq_2} = C_1 + C_2$$

Así

$$C_1 + C_2 = 2\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) V_o \frac{1}{V}$$

de aquí obtenemos que

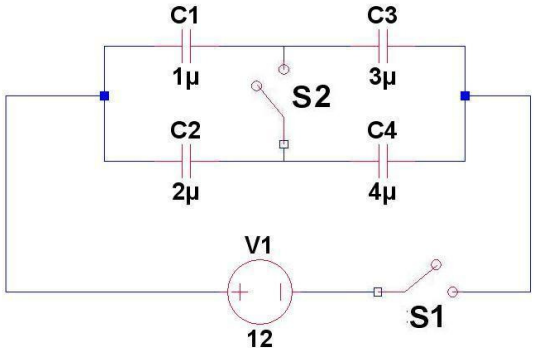
$$V = 2\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)\left(V_o\frac{1}{C_1+C_2}\right)$$

Finalmente

$$V = 2\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}V_o$$

**Problema**

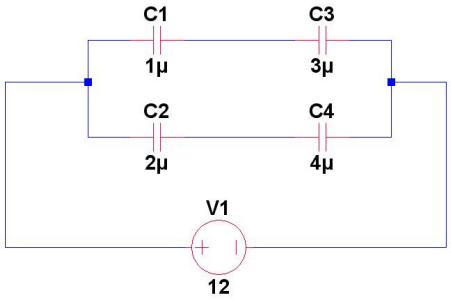
Se tiene un circuito como el que se muestra en la figura.




a) Encontrar la carga de cada condensador cuando se cierra el interruptor S1.
b) Cuando se cierra también el interruptor S2

**Solución**

a) Cuando sólo se cierra el interruptor 1, se tiene




En este caso, $C_1$ y $C_3$ están en serie, asi como también $C_2$ y $C_4$.
La capacidad equivalente entre $C_1$ y $C_3$ está dada por

$$\frac{1}{C_{eq1}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = 1 + \frac{1}{3}\mu = \frac{4}{3}(\mu F)^{-1}$$

Con lo que

$$C_{eq1} = \frac{3}{4}\mu F$$

Del mismo modo, para la capacidad equivalente entre $C_2$ y $C_4$

$$\frac{1}{C_{eq2}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\mu F)^{-}1 = \frac{3}{4}(\mu F)^{-1}$$

Así

$$C_{eq2} = \frac{4}{3}\mu F$$

Por último, $C_{eq1}$ y $C_{eq2}$ están en paralelo, por lo que la capacidad total será

$$C_{eq} = C_{eq1} + C_{eq2} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}\mu F$$

Con esto podemos determinar la carga total suministrada por la fuente, dada por

$$Q = \Delta V C = 12\frac{25}{12}\mu F = 25\mu C$$

Ahora, sea $Q_i$ la carga acumulada por el condensador $i$. Se tiene que $Q_1 = Q_3$, $Q_2 = Q_4$, ya que se encuentran en serie. Sea $V_i$ la diferencia de potencial entre los terminales del condensador $i$. Así

$$Q_1 = 1\mu V_1$$

$$Q_2 = 2\mu V_2$$

$$Q_3 = 3\mu V_3 = Q_1$$

$$Q_4 = 4\mu V_4 = Q_2$$

Además, los voltajes están relacionados según

$$12 = V_1 + V_3 = V_2 + V_4$$

Resolviendo este sistema, se tiene

$$Q_1 = V_1, Q_2 = 2V_2, Q_1 = 36 - 3V_1, Q_2 = 48 - 4V_2$$

Así,

$$V_1 = 36 - 3V_1, 2V_2 = 48 - 4V_2$$

De donde se obtiene finalmente

$$V_1 = 9V, V_2 = 8V, V_3 = 3V, V_4 = 4V$$

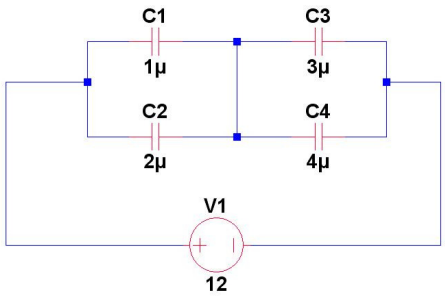
Por último

$$Q_1 = 9\mu C$$

,$Q_2 = 16\mu C$. $Q_3 = 9\mu C$, $Q_4 = 16\mu C$

Se comprueba que $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25\mu C = Q$

b) Ahora se tiene lo siguiente



Aquí, se tiene a los condensadores $C_1$ y $C_2$ en paralelo, lo mismo sucede con $C_3$ y $C_4$

$$C_{eq1} = C_1 + C_2 = 3\mu F$$

$$C_{eq2} = C_3 + C_4 = 7\mu F$$

Y estos dos se encuentran en serie, por lo que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}(\mu F)^{-}1 = \frac{10}{21}(\mu F)^{-}1$$

Así

$$C_{eq} = \frac{21}{10}\mu F$$

Y la carga suministrada por la fuente será

$$Q = \frac{21}{10}V = \frac{21 \cdot 12}{10} = \frac{126}{5} = 25,2\mu C$$

Además, se tiene $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$, ya que se encuentran en paralelo. Así

$$V_1 = \frac{1\mu}{Q_1} = V_2 = \frac{2\mu}{Q_2}$$

$$V_3 = \frac{3\mu}{Q_3} = V_4 = \frac{4\mu}{Q_4}$$

Con esto

$$2Q_1 = Q_2$$

$$4Q_3 = 3Q_4$$

También debe tenerse que

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 = 25,2\mu C$$

Así

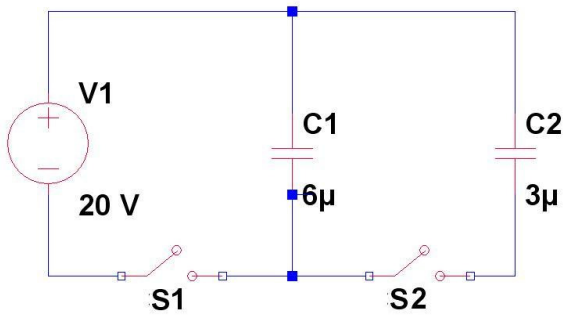
$$2Q_1 = Q_2 = 25,2 - Q_1 \rightarrow Q_1 = 8,4\mu C$$

$$Q_3 = 25,2 - Q_4 = 25,2 - \frac{4}{3}Q_3 \rightarrow Q_3 = 10,8\mu C$$

$$Q_4 = \frac{4}{3}Q_3 = 14,4\mu C$$

**Problema**

Considere el circuito de la figura




Primero se carga $C_1$ cerrando el interruptor $S_1$. Después este interruptor es abierto, y el condensador cargado se conecta al otro condensador descargado cerrando al interruptor $S_2$. Calcule la carga final en cada uno de los condensadores

**Solución**

Al cerrar el interruptor $S_1$, se conecta el condensador $C_1$ a los terminales de la fuente de voltaje, luego éste acumula una carga igual a

$$Q = CV = 6\mu 20 = 120\mu(C)$$

Ahora, se abre el interruptor $S_1$ y se cierra el interruptor $S_2$, es decir, se desconecta la fuente de voltaje y se conectan ambos condensadores en paralelo. Básicamente lo que ocurre aquí es una redistribución de la carga almacenada.

Sea $Q_1$ la carga final en el condensador 1 , y $Q_2$ la carga final en el condensador 2. Se sabe que la carga total debe conservarse, es decir

$$Q = Q_1 + Q_2 = 120\mu(C)$$

Y en cada condensador se tiene

$$Q_1 = 6\mu V_1$$
$$Q_2 = 3\mu V_2$$

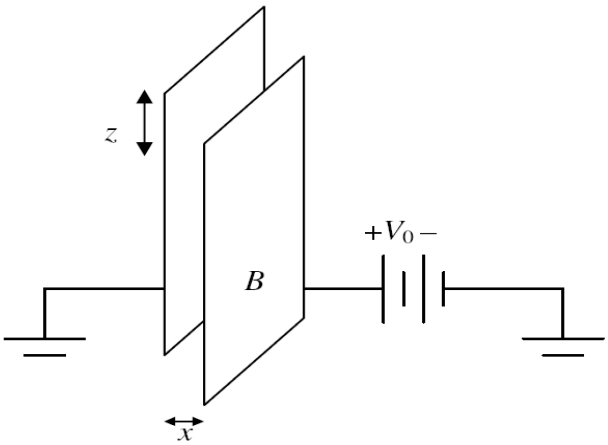
Como están en paralelo, $V_1 = V_2$, así

$$\frac{Q_1}{6\mu} = \frac{Q_2}{3\mu} \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = 2$$

De donde se obtiene, $Q_1 = 80\mu$ (C), y $Q_2 = 40\mu$

**Problema**

Dos placas conductoras cuadradas de lado $a$ se disponen con sus caras paralelas y muy próximas entre sí. La distancia entre las placas es $x$, como se indica en la figura. Calcule la fuerza sobre la placa $B$ en las direcciones $x$ y $z$ cuando la diferencia de potencial entre las placas es $V_o$




**Solución**

La energía almacenada en el condensador es

$$U = \frac{1}{2}CV_o^2$$

donde la capacidad está dada por

$$C(x,z) = \frac{\epsilon_o A}{x} = \frac{\epsilon_o a(a-z)}{x}$$

De esta forma

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U = \frac{dU}{dx}\hat{i} + \frac{dU}{dz}\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}V_o^2\left(\frac{\epsilon_0(a-z)a}{x^2}\hat{i} + \frac{\epsilon_o a}{x}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}V_o^2\frac{\epsilon_o(a-z)a}{x}\hat{i} - \frac{1}{2}V_o^2\frac{\epsilon_o a}{x}\hat{k}$$

# Capítulo 8

# Ecuaciones de Poisson y Laplace

Hemos concluído nuestra revisión de la electrostática demostrando que la teoría es completa. En efecto, hemos visto que la conducta de un campo electrostático queda totalmente descrita por dos ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales son consecuencia de la ley de Coulomb y el principio de superposición

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Ahora comenzaremos un estudio sobre la teoría del potencial. Esta nos brindará las herramientas matemáticas necesarias para resolver los problemas electrostáticos que se nos presentan en la práctica. Notar que la teoría electrostática ya está competa (es una teoría de estructura muy simple, en efecto): solamente nos falta ampliar nuestra capacidad de aplicarla

## 8.1. Ecuaciones de Poisson y Laplace

La segunda ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

es equivalente a

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

Combinada con la primera, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Esta es la ecuación de Poisson. En regiones libres de cargas tenemos

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = 0$$

la ecuación de Laplace.

**Interpretación del teorema fundamental**

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Esta es la ecuación de Poisson para una carga $q = 4\pi\epsilon_0$ puntual localizada en el punto $\vec{x}'$. (Ecuación singular de Poisson). Hemos establecido que

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

a partir de la ley de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3}$$

utilizando el siguiente argumento

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Ahora lo vamos a demostrar directamente

**Teorema**

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

es la solución de la ecuación de Poisson con condiciones de contorno adecuadas en el infinito, es decir

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ C.C.S(\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

**Demostración**

1) Sea

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Luego

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

2) Sea

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}')}{\vec{x}-\vec{x}'} = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0 \mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

con esto

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = -\frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

pero

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

$$= -\iiint_{R^3} d^3x' \left\{\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')\right\}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} + \iiint_{R^3} d^3x'\vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

$$= \iiint_{R^3} d^3x'\phi(\vec{x}')\vec{\nabla}'\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} - \iiint_{R^3} d^3x'\vec{\nabla}'\cdot\left[\phi(\vec{x}')\vec{\nabla}'\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\right] + \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

$$= \iiint_{R^3} d^3x'\phi(\vec{x}')\vec{\nabla}'^2\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} + \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\phi(\vec{x}') - \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

Ahora supondremos que las condiciones de borde son apropiadas (y que entonces las integrales de superficie son nulas)

$$-\frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = -4\pi\iiint_{R^3} d^3x'\phi(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}') = -4\pi\phi(\vec{x})$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

### 8.1.1. Acerca de las condiciones en el infinito

Veremos que

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty}\phi(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3}\phi(\vec{x}') = 0$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \mid = 0 \Rightarrow \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

la segunda de ellas ya se discutió en el teorema de completitud de Helmholtz. Lo que se hace es escoger como superficie de integración una esfera centrada en $\vec{x}$ y de radio $a = \mid \vec{x}-\vec{x}' \mid \to \infty$

$$\oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3}\phi(\vec{x}') = \lim_{a\to\infty}\oiint_{S(a)} d\Omega(\hat{n})\phi(\vec{x}+a\hat{n}) = \oint_0^{4\pi} d\Omega(\hat{n}) \lim_{a\to\infty}\phi(\vec{x}')$$

luego debe tenerse que

$$\lim_{|\vec{x}-\vec{x}'|\to\infty} \phi(\vec{x}') = 0 \Rightarrow \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \phi(\vec{x}) = 0$$

del mismo modo

$$\oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \lim_{a\to\infty} \oiint_{S(a)} d\Omega(\hat{n}) a\hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{x} + a\hat{n})$$

$$= \oint_0^{4\pi} d\Omega(\hat{n}) \lim_{a\to\infty} a\hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{x} + a\hat{n})$$

luego basta tener

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

y

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \leq \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid \cdot \mid \vec{E}(\vec{x}) \mid$$

### 8.1.2. Corolario: Condición de validez para $\rho(\vec{x})$

De la condición necesaria para el potencial

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \phi(\vec{x}) = 0$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$= \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} = \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{1}{\mid \vec{x} \mid} \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') = 0$$

si

$$-\infty < \iiint_{R^3} d^3x' \rho(\vec{x}') < \infty$$

Basta que la carga total de las fuentes sea **finita** (razonable!)

Luego, como corolario

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ \iiint_{R^3} d^3x' \mid \rho(\vec{x}') \mid < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Pero en la práctica, éste no es el problema de contorno típico de la electrostática

**Nota sobre el potencial en el infinito**

Es bien sabido que a la función potencial siempre es posible sumarle una constante arbitraria finita, ya que, obviamente, semejante adición no modifica en nada el campo electrostático que ese potencial determina. Sumarle una constante al potencial equivale a cambiar arbitrariamente su valor en el infinito. Sin embargo, pareciera concluirse de nuestro análisis previo que el valor del potencial en el infinito está perfectamente determinado por la naturaleza de las fuentes

cargadas. Esta situación, **aparentemente** paradojal, merece ser estudiada con cierto cuidado. Sea

$$\left.\begin{array}{c}\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ \iiint_{R^3} d^3x' \mid \rho(\vec{x}') \mid < \infty\end{array}\right\}$$

Luego

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \rho(\vec{x}) = 0$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \mid = 0$$

Transformemos este potencial

$$\phi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) + \psi_\infty$$

Se tiene ahora

a)

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x}) = \vec{\nabla}^2\left[\phi(\vec{x}) + \psi_\infty\right] = \vec{\nabla}^2\phi(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

b)

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \psi_\infty$$

c) $\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \psi(\vec{x}) = \lim_{|\vec{x}|\to\infty} (\phi(\vec{x}) + \psi_\infty) = \lim_{|\vec{x}|\to\infty} \phi(\vec{x}) + \psi_\infty$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \psi(\vec{x}) = \psi_\infty$$

d) $\psi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\left[\phi(\vec{x}) + \psi_\infty\right] = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \mid \vec{x} \mid\mid \vec{\nabla}\psi(\vec{x}) \mid = 0$$

Veamos ahora si todo ésto es consistente

$$\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\vec{\nabla}'^2\psi(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = -4\pi\iiint_{R^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$-4\pi\iiint_{R^3} d^3x'\psi(\vec{x}')\delta(\vec{x} - \vec{x}') + \oiint_{S(\infty)} d\Omega(\vec{x}', \vec{x})\psi(\vec{x}') + \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{\nabla}'\psi(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

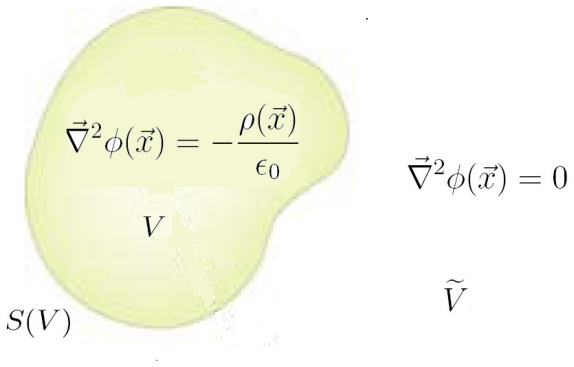
$$= -4\pi\psi(\vec{x}) + 4\pi\psi_\infty + 0$$

luego hay consistencia y no hay paradoja alguna!

## 8.2. Ecuación Integral de Poisson: Teoremas de Green

A) **Problemas simples de la electrostática**

Los problemas formalmente más simples de la electrostática consisten en calcular $\phi(\vec{x})$ para todos los puntos del espacio, habiéndose dado la distribución de las fuentes eléctricas $\rho(\vec{x})$ (por lo general, localizadas dentro de una región $V$), sin condiciones de contorno prescritas para $\phi(\vec{x})$ o $\vec{E}(\vec{x})$ en el infinito




la solución de estos problemas simples es, formalmente, inmediata

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

B) **Problemas de contorno**

Pero, por lo general, los problemas prácticos de la electrostática se refieren a regiones (finitas o infinitas) que solamente abarcan una porción del espacio, con o sin cargas en su interior, y con **condiciones de contorno** presecritas en las superficies que las limitan. (Por ejemplo, esta superficie de contorno puede representar un conductor a un potencial fijo). La solución formal de éstos problemas de contorno no es tan sencilla. Para manejar los problemas de contorno necesitaremos nuevas herramientas matemáticas que procedemos a construír

## 8.3. Teoremas de Green

A partir del teorema de la divergencia

$$\iiint_V d^3x' \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \oiint_{S(V)} d\vec{S}\cdot\vec{A}$$

y utilizamos un campo vectorial de la forma

$$\vec{A} = \phi\vec{\nabla}\psi$$

con $\phi$, $\psi$, dos campos escalares. Recordar que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{\nabla}\psi\right) = \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi + \phi\vec{\nabla}^2\psi$$

$$\iiint_V d^3x' \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi\vec{\nabla}^2\psi\right) = \oiint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{\nabla}\psi\phi$$

Se obtiene la **Primera Identidad de Green**

$$\iiint_V d^3x' \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi\vec{\nabla}^2\psi\right) = \oiint_{S(V)} dS\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

donde

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

es la derivada direccional de $\psi$ en la dirección normal a $S(V)$

Ahora, también es posible escoger $\vec{A} = \psi\vec{\nabla}\phi$, y obtenemos el siguiente par de identidades de Green

$$\iiint_V d^3x' \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi\vec{\nabla}^2\psi\right) = \oiint_{S(V)} dS\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

$$\iiint_V d^3x' \left(\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}^2\phi\right) = \oiint_{S(V)} dS\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

Restándolas, obtenemos el **Teorema de Green**

$$\iiint_V d^3x \left\{\phi\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\phi\right\} = \oiint_{S(V)} ds \left\{\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}$$

### 8.3.1. Ecuación Integral de Poisson

Usaremos el teorema de Green para transformar la ecuación de Poisson en una ecuación integral en la región de interés. Elijamos

$$\psi(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

Sea

$$\vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}') = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}'^2\psi(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Luego, integrando sobre la región de interés $V$

$$\iiint_V d^3x' \left\{\phi(\vec{x}')\vec{\nabla}'^2\psi(\vec{x}, \vec{x}') - \psi(\vec{x}, \vec{x}')\vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}')\right\} = -4\pi \iiint_V d^3x' \left\{\phi(\vec{x}')\delta(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 \mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}\right\}$$

$$= \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{\phi(\vec{x}')\frac{\partial\psi(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - \psi(\vec{x}, \vec{x}')\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'}\right\}$$

$$= \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{\phi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \frac{\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}\right\}$$

Se obtiene la ecuación integral de Poisson

$$\phi(\vec{x})\iiint_V d^3x'\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V d^3x'\frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)} dS(\vec{x}')\left\{\frac{\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} - \phi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}\right\}$$

Consideremos $\vec{x} \in V$

$$\vec{x} \in V \rightarrow \iiint_V d^3x'\delta(\vec{x}-\vec{x}') = 1$$

$$dS(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = dS(\vec{x}')\hat{n}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3}$$

$$dS(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = -d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid \vec{x}'-\vec{x} \mid^3}$$

$$dS(\vec{x}')\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'} = d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')$$

y entonces la ecuación interior es

$$\phi(\vec{x}) = \iiint_V d^3x'\frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} + \frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)}\frac{d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} + \frac{1}{4\pi}\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid \vec{x}'-\vec{x} \mid^3}\phi(\vec{x}')$$

**Primera Observación**

Si $V = R^3$, $S(V) \rightarrow S(\infty)$

$$\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid \vec{x}'-\vec{x} \mid^3}\phi(\vec{x}') \rightarrow \int_0^{4\pi} d\Omega(\hat{x})\lim_{|\vec{x}'|\rightarrow\infty}\phi(\vec{x}')$$

y también

$$\mid \oiint_{S(V)}\frac{d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} \mid \leq \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}')\frac{\mid \vec{\nabla}'\phi(\vec{x}') \mid}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

$$= \oiint_{S(V)}\frac{dS(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^2} \mid \vec{x}-\vec{x}' \mid\mid \vec{\nabla}'\phi(\vec{x}') \mid \rightarrow \int_0^{4\pi} d\Omega(\hat{x})\lim_{|\vec{x}'|\rightarrow\infty} \mid \vec{x}-\vec{x}' \mid\mid \vec{\nabla}'\phi(\vec{x}') \mid$$

Luego

$$\lim_{|\vec{x}'|\rightarrow\infty}\phi(\vec{x}') = 0 \Rightarrow \oiint_{S(\infty)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\mid \vec{x}'-\vec{x} \mid^3}\phi(\vec{x}') = 0$$

$$\lim_{|\vec{x}'|\rightarrow\infty} \mid \vec{x}' \mid\mid \vec{\nabla}'\phi(\vec{x}') \mid = 0 \Rightarrow \oiint_{S(\infty)}\frac{d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

y entonces

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{R^3} d^3x'\frac{\rho(\vec{x}')}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

esto impone sobre $\rho$ las condiciones de consistencia dadas que ya conocemos

$$\iiint_{R^3} d^3x' \mid \rho(\vec{x}') \mid < \infty$$

**Segunda observación**
Si la región de interés $V$ está libre de cargas

$$\vec{x} \in V : \rho(\vec{x}) = 0$$

entonces, se obtiene la **ecuación integral de Laplace**

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ \frac{\frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\}$$

## 8.4. Condiciones de Contorno: Unicidad de las soluciones

A) Los problemas de contorno en electrostática son de la forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in S(V) : \text{Condiciones de contorno para } \phi \text{ o para } \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

o bien

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} \in S(V) : \text{Condiciones de contorno para } \phi \text{ o para } \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Surge la cuestión sobre cuáles son las condiciones de contorno adecuadas para que dentro del volumen de interés $V$ la solución sea matemáticamente única, y físicamente razonable.
La experiencia física nos hace esperar que un problema único de potencial se obtiene:

a) Especificando el potencial $\phi(\vec{x})$ sobre una superficie cerrada $S(V)$ que limita la región de interés $V$ (problema de Dirichlet)

$$\vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x})$$

b) Especificando el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$ sobre el contorno cerrado $S(V)$ de la región de interés $V$ (problema Neumann)

$$\vec{x} \in S(V) : \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_N(\vec{x})$$

En efecto vamos a demostrar que tanto el problema de Dirichlet como el problema de Neumann dan origen a una solución única

### 8.4.1. Unicidad para problemas de contorno Dirichlet

El problema Poisson Dirichlet tiene la siguiente forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$
$$\vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x})$$

Sean $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ dos soluciones de este problema. Se define

$$\psi(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) - \phi_1(\vec{x})$$

Evidentemente $\psi(\vec{x})$ es solución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno Dirichlet Homogéneas

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0$$
$$\vec{x} \in S(V) : \psi(\vec{x}) = 0$$

Usemos la primera identidad de Green

$$\iiint_V d^3x \left\{ \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi + \psi \vec{\nabla}^2 \psi \right\} = \oiint_{S(V)} dS \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$
$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi = \iiint_V d^3x \mid \vec{\nabla}\psi \mid^2 = 0$$

Pero

$$\mid \vec{\nabla}\psi \mid \geq 0$$
$$\iiint_V d^3x \mid \vec{\nabla}\psi \mid^2 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\psi(\vec{x}) = \vec{0}, \vec{x} \in V$$

Luego $\psi(\vec{x})$ es constante para $\vec{x} \in V$ . Pero entonces, como

$$\psi(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in S(V)$$

se tiene

$$\psi(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

y por lo tanto

$$\psi(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) - \phi_1(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

Luego, para $\vec{x} \in V$

$$\phi_2(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x})$$

Obsérvese el importante resultado

$$\left.\begin{array}{c} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0 \\ \vec{x} \in S(V) : \psi(\vec{x}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in V$$

y también

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0 \\ \vec{x} \in S(\infty) : \psi(\vec{x}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(\vec{x}) = 0, \forall x$$

### 8.4.2. Unicidad para condiciones de contorno de Neumann

El problema Poisson-Neumann tiene la forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = -E_N(\vec{x})$$

El desarrollo es análogo al caso anterior. Sean

$$\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x})$$

dos soluciones del problema Poisson-Neuman en $V$. Definimos

$$\psi(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) - \phi_1(\vec{x})$$

Entonces $\psi(\vec{x})$ es solución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Neumann Homogéneas

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = 0$$

Ahora

$$\iiint_V d^3x \mid \vec{\nabla}\psi \mid^2 = \oiint_{S(V)} dS \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

luego

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{0}$$

y $\psi(\vec{x})$ es constante para $\vec{x} \in V$. Pero ahora

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \vec{x} \in S(V)$$

Por lo tanto

$$\psi(\vec{x}) = C, \vec{x} \in S(V)$$

luego

$$\phi_2(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) + C, \vec{x} \in V$$

Observemos que

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = 0 \\ \vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(\vec{x}) = C, \vec{x} \in V$$

La constante aditiva $C$ es arbitraria y carece de importancia física pues no altera al campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$

### 8.4.3. Condiciones de Contorno de Cauchy

Un problema Poisson-Cauchy tendría la siguiente forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in S(V) \left\{ \begin{array}{c} \phi(\vec{x}) = \phi_C(\vec{x}) \\ \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = -E_C(\vec{x}) \end{array} \right.$$

Pero este problema lo podemos desglosar

$$\left. \begin{array}{c} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S : \phi = \phi_C \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x}), \vec{x} \in V$$

Este problema de Poisson Dirichlet posee solución única!

$$\left. \begin{array}{c} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S : \frac{\partial \phi}{\partial n} = -E_C \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\vec{x}) = \phi_N(\vec{x}), \vec{x} \in V$$

Este problema de Poisson Neumann también posee solución única. Los datos de Cauchy son $\{\phi_C, E_C\}$ sobre $S$. (Ambas son funciones arbitrarias). Al resolver el problema Poisson Dirichlet obtenemos una solución $\phi_D$, haciendo caso omiso del dato $\vec{E}_C$, al resolver el problema Poisson Neumann obtenemos $\phi_N$, haciendo caso omiso de $\phi_C$. Es obvio que, en general, resultará

$$\vec{x} \in S(V) : \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_D(\vec{x})}{\partial n} \neq \frac{\partial \phi_N(\vec{x})}{\partial n} = -E_C(\vec{x}) \\ \phi_N(\vec{x}) \neq \phi_D(\vec{x}) = \phi_C(\vec{x}) \end{array} \right.$$

Luego **no hay consistencia**: no existe, en general, solución de la ecuación de Poisson con condiciones de contorno de Cauchy sobre una superficie cerrada

## 8.5. Funciones de Green: Solución formal a los problemas de contorno

El problema típico en electrostática es resolver un problema de contorno de la forma

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

con condiciones de borde de Dirichlet

$$\vec{x} \in S(V) : \phi = \phi_D$$

o de Neumann

$$\vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi}{\partial n} = -E_N$$

la solución de este problema es única.
Una carga puntual (positiva) $4\pi\epsilon_0$ ubicada en el punto $\vec{x}$ se representa por la densidad de carga singular

$$\rho(\vec{x}') = 4\pi\epsilon_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

y su potencial en el punto $\vec{x}'$ es

$$\psi(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid}$$

Obsérvese que el rol de $\vec{x}$ y $\vec{x}'$ puede invertirse. Este potencial unitario satisface la ecuación de Poisson singular

$$\vec{\nabla}'^2 \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

Vamos a generalizar esta idea

## 8.6. Funciones de Green $G(\vec{x},\vec{x}')$

En general, son aquellas funciones que satisfacen la ecuación de Poisson singular

$$\vec{\nabla}'^2 G(\vec{x}',\vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x},\vec{x}'), \vec{x}' \in V$$

Sea $L(\vec{x}',\vec{x})$ una solución de la ecuación de Laplace en el interior de una región $V$, $\vec{x}' \in V$

$$\vec{\nabla}'^2 L(\vec{x}',\vec{x}) = 0$$

entonces podemos considerar

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} + L(\vec{x},\vec{x}')$$

Esta es una función de Green dentro de la región $V$. Consideremos la estructura

$$\vec{x}' \in V$$
$$\vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}') = -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}'^2 G(\vec{x}',\vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$
$$G(\vec{x}',\vec{x}) = \frac{1}{\mid \vec{x}'-\vec{x} \mid} + L(\vec{x}',\vec{x})$$
$$\vec{\nabla}'^2 L(\vec{x},\vec{x}') = 0$$

Entonces, usando la segunda identidad de Green

$$\iiint_V d^3x' \left\{ G(\vec{x}',\vec{x})\vec{\nabla}'^2\phi(\vec{x}') - \phi(\vec{x}')\vec{\nabla}^{2\prime} G(\vec{x}',\vec{x}) \right\} = \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'} - \phi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x}',\vec{x})}{\partial n'} \right\}$$

para $\vec{x} \in V$, resulta

$$\iiint_V d^3x' \left\{ -\frac{1}{\epsilon_0} G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}') + 4\pi\phi(\vec{x}')\delta(\vec{x}'-\vec{x}) \right\} = -\frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V d^3x'\rho(\vec{x}')G(\vec{x}',\vec{x}) + 4\pi\phi(\vec{x})$$

$$= \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \left\{ G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'} - \phi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x}',\vec{x})}{\partial n'} \right\}$$

o sea, con $\vec{x} \in V$ en general se tiene

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}', \vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'} G(\vec{x}', \vec{x}) - \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'}$$

Apliquemos este resultado a los problemas de contorno de Dirichlet y de Neumann

### 8.6.1. Solución formal del problema Dirichlet

Hay que resolver

$$\begin{cases} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vec{x}) \end{cases}$$

Resolvamos entonces

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 G_D(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\ \vec{x}' \in S(V) : G_D(\vec{x}', \vec{x}) = 0 \end{cases}$$

o sea, resolvamos el problema

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 L_D(\vec{x}', \vec{x}) = 0 \\ \vec{x}' \in S(V) : L_D(\vec{x}', \vec{x}) = -\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \end{cases}$$

y hacemos

$$G_D(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid} + L_D(\vec{x}', \vec{x})$$

$G_D(\vec{x}', \vec{x})$ es la función de Green del problema Dirichlet. La solución formal es

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \phi_D(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'}$$

### 8.6.2. Solución formal del problema de Neumann

Hay que resolver

$$\begin{cases} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S(V) : \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = -E_N(\vec{x}) \end{cases}$$

Resultaría ventajoso resolver

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 G_N(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\ \vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial G_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = 0 \end{cases}$$

pero ésto es, en general, **imposible**. En efecto, el teorema de Gauss nos da

$$\iiint_V d^3x' \vec{\nabla}'^2 G_N(\vec{x}', \vec{x}) = \iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' G_N(\vec{x}', \vec{x})$$

$$= \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' G_N(\vec{x}', \vec{x}) = \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x}', \vec{x})$$

$$= -4\pi \iiint_V d^3x' \delta(\vec{x}' - \vec{x}) = -4\pi$$

luego

$$\oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi$$

ahora bien, puesto que

$$\oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') = S$$

con $S$ el área total de $S(V)$, la condición de contorno más simple es

$$\vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial G_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$$

Luego, debemos resolver

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 G_N(\vec{x}', \vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\ \vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial G_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \end{cases}$$

o sea, resolvemos

$$\vec{x} \in V \begin{cases} \vec{x}' \in V : \vec{\nabla}'^2 L_N(\vec{x}', \vec{x}) = 0 \\ \vec{x}' \in S(V) : \frac{\partial L_N(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} - \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \end{cases}$$

puesto que

$$G_N(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid} + L_N(\vec{x}', \vec{x})$$

la solución formal del problema de Neumann es

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}', \vec{x}) - \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') E_N(\vec{x}') G_N(\vec{x}', \vec{x}) + \langle \phi \rangle_S$$

donde $\langle \phi \rangle_S$ es el valor medio del potencial sobre toda la superficie $S(V)$

$$\langle \phi \rangle_S = \frac{1}{S} \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}) \phi(\vec{x})$$

La presencia de este término es un inconveniente. Pero no afecta $\vec{E}$ en $V$

**Problema**

El promedio temporal del potencial de un átomo de hidrógeno neutro es dado por

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

donde $q$ es la magnitud de la carga del electrón y $\alpha = a_0/2$, siendo $a_0$ el radio de Bohr. Encuentre la distribución de cargas (continua y discreta) correspondiente a este potencial e interprete físicamente su resultado

**Solución**

$$\vec{\nabla}^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En coordenadas esféricas, el operador laplaciano es

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\vec{\nabla}^2(\vartheta, \phi)$$

Sea

$$\psi(r) = \frac{1}{r}$$

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q e^{-\alpha r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

o sea

$$\phi(r) = \frac{f(r)}{r}$$

y utilizamos la identidad

$$\vec{\nabla}^2\psi f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi f = \vec{\nabla}\cdot\left(\psi\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\psi\right)$$

$$\vec{\nabla}^2\psi f = \psi\vec{\nabla}^2 f + f\vec{\nabla}^2\psi + 2\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}f$$

$$r = \mid \vec{x} \mid \begin{cases} \vec{\nabla}^2\psi = \vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{x}) \\ \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}^2 f(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r f(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r f' + f\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(r f'' + 2f'\right) = f'' + \frac{2}{r}f'$$

y

$$2\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}f = -\frac{2}{r^2}\hat{r}\cdot\vec{\nabla}f = -\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}f = -\frac{2}{r^2}f'$$

con todo esto

$$\vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{r}f'' + \frac{2}{r^2}f' - 4\pi f(r)\delta(\vec{x}) - \frac{2}{r^2}f'$$

$$= -4\pi f(0)\delta(\vec{x}) + \frac{1}{r}\frac{d^2 f(r)}{dr^2}$$

y

$$f(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$f' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q e^{-\alpha r} \left( \frac{\alpha}{2} - \alpha \left( 1 + \frac{\alpha r}{2} \right) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q e^{-\alpha r} \left( \frac{\alpha}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2 r}{2} \right)$$

$$f' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha q}{2} e^{-\alpha r} \left( 1 + \alpha r \right)$$

$$f'' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha q}{2} e^{-\alpha r} \left( \alpha - \alpha(1 + \alpha r) \right)$$

$$f'' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha q}{2} e^{-\alpha r} \left( \alpha - \alpha - \alpha^2 r) \right)$$

$$f'' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^3 q}{2} r e^{-\alpha r}$$

finalmente

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\alpha^3}{2} e^{-\alpha r}$$

Luego

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x}) - \frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}$$

La interpretación física es la siguiente

$$q\delta(\vec{x})$$

representa al protón en el origen. Mientras que

$$-\frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}$$

es la densidad (media-temporal) de la nube orbital electrónica

**Problema: Teorema del valor medio**

Demuestre que para un espacio sin cargas, el potencial electrostático en cualquier punto es igual al potencial promedio sobre cualquier esfera centrada en ese punto

**Solución**

Utilizaremos el teorema de Green

$$\iiint_V d^3x \left(\phi\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\phi\right) = \oiint_{\delta V} ds \left(\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\psi\phi - \psi\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)$$

En electrostática, el potencial escalar satisface

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

y se define la función de Green-Dirichlet

$$\vec{\nabla}^2 G_D(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \vec{x},\vec{x}' \in V$$
$$\vec{G}_D(\vec{x},\vec{x}') = 0, \vec{x}' \in \delta V$$

del teorema de Green

$$\iiint_V d^3x' \left(\phi'\vec{\nabla}'^2 G_D(\vec{x},\vec{x}') - G_D(\vec{x},\vec{x}')\vec{\nabla}'^2\phi'\right) = \oiint_{\delta V} ds' \left(\phi'\hat{n}'\cdot\vec{\nabla}' G_D(\vec{x},\vec{x}') - G_D(\vec{x},\vec{x}')\hat{n}'\cdot\vec{\nabla}'\phi'\right)$$

$$-\iiint_V d^3x' 4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')\phi' + \iiint_V d^3x' G_D(\vec{x},\vec{x}')\frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0} = \oiint_{\delta V} ds'\phi'\hat{n}'\cdot\vec{\nabla}' G_D(\vec{x},\vec{x}')$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\pi\epsilon_0}\iiint_V d^3x' G_D(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi}\oiint_{\delta V} dS(\vec{x}')\phi(\vec{x}')\hat{n}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}' G_D(\vec{x},\vec{x}')$$

ahora, si $V$ es una región libre de cargas

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\oiint_{\delta V} dS(\vec{x}')\phi(\vec{x}')\hat{n}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}' G_D(\vec{x},\vec{x}')$$

Escogemos ahora $V$ como una esfera de radio $a$ centrada en $\vec{x}$, de forma que la función de Green queda

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid} - \frac{1}{a}$$

de esta forma

$$\vec{\nabla}' G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\mid \vec{x}-\vec{x}' \mid^3}$$

Luego, para $\vec{x}' \in S(V)$

$$\hat{n}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = -\frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^2} = -\frac{1}{a^2}$$

Así

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi a^2} \oiint_{\delta V} dS(\vec{x}')\phi(\vec{x}') = \overline{\phi(\vec{x}, a)}$$

con $V : \epsilon(\vec{x}, a)$

**Observación**
La única condición sobre la esfera es que ella quede totalmente contenida en el vacío

**Problema**

Demuestre el siguiente corolario del teorema del valor medio. El campo electrostático en el vacío satisface idénticamente las siguientes relaciones

$$\oiint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = 0$$

$$\iiint_{V(S)} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} = 0$$

donde $S$ es la superficie de una esfera de radio arbitrario con centro en $\vec{x}$, y $V(S)$ es su volumen

**Solución**

En el espacio vacío de cargas

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

Utilizando el teorema de Green con

$$\psi(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid}$$

$$\iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \left\{ \frac{\vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}'^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\} = 4\pi \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \phi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 4\pi\phi(\vec{x})$$

$$= \oiint_{S(\vec{x})} dS(\vec{x}') \left\{ \frac{\frac{\partial \phi(\vec{x}')}{\partial n'}}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\}$$

luego

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{x})} \left[ d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right] \phi(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{x})} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid^3} \phi(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot E(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi a^2} \oiint_{S(\vec{x})} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oiint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot E(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

donde $a = \mid \vec{x} - \vec{x}' \mid$ es el radio de la esfera. (Independiente de $\vec{x}'$).

Por el teorema del valor medio

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi a^2} \oiint_{S(\vec{x})} dS(\vec{x}') \phi(\vec{x}')$$

Luego

$$\oiint_{S(\vec{x})} \frac{d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = 0$$

Además

$$\oiint_{S(\vec{x})} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \iiint_{V(S)} d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

$$= \iiint_{V(S)} d^3x' \left\{ \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{E}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} \right\}$$

$$= \iiint_{V(S)} d^3x' \left\{ \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0 \mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} + \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid^3} \right\}$$

$$= - \iiint_{V(S)} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{\mid \vec{x}' - \vec{x} \mid^3} = 0$$

**Problema**

Demuestre que el campo electrostático en el vacío satisface idénticamente la siguiente relación

$$\vec{\nabla} \cdot \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = 0$$

donde $V(\vec{x})$ es el volumen de una esfera de radio arbitrario y centro en $\vec{x}$

**Solución**

Sabemos que, en el vacío

$$\iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{\mid \vec{x}' - \vec{x}' \mid^3} = 0$$

$$0 = \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{E}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid} = \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

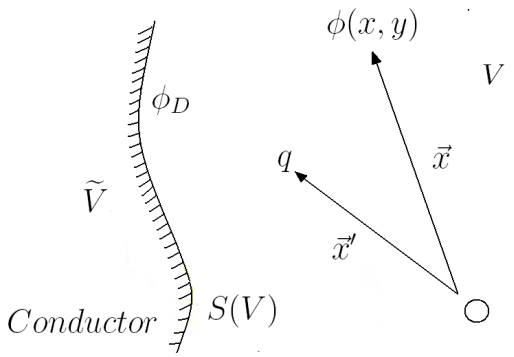
$$0 = \vec{\nabla} \cdot \iiint_{V(\vec{x})} d^3x' \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{\mid \vec{x} - \vec{x}' \mid}$$

# Capítulo 9

# Solución de la Ecuación de Poisson y Laplace

## 9.1. Método de las Imágenes

La solución formal de los problemas de contorno en electrostática se logra mediante el método de las **Funciones de Green**. En los problemas prácticos no siempre es fácil descubrir o calcular la función de Green correcta. Para ello se usan algunas técnicas especiales, como el método de las imágenes o la expansión en funciones ortogonales. El método de las imágenes se usa en problemas de una o más cargas puntuales en presencia de superficies de frontera, se trata de **conductores** conectados a tierra o mantenidos a un potencial fijo. Este método de las imágenes nos ayuda a encontrar la función de Green adecuada en los problemas de contorno Dirichlet con $\phi_D = cte$




Se trata de resolver el siguiente problema Dirichlet

$$\vec{x}' \in V : \begin{cases} \vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2\phi(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{q\delta(\vec{x}-\vec{x}')}{\epsilon_0} \\ \vec{x} \in S(V) : \phi(\vec{x},\vec{x}') = \phi_D \end{cases}$$

Bajo condiciones geométricas favorables (simetría) es posible infrerir que un número pequeño de cargas puntuales, de magnitud apropiada, y ubicadas adecuadamente en la región externa $\widetilde{V}$, pueden simular las condiciones de contorno requeridas, estas son las cargas **imágenes**
Sean
$V$: región interior
$\widetilde{V}$: región externa (conductor)
$q'_i = q'_i(q,\vec{x}') =$ carga imagen
$\vec{x}'_i = \vec{x}'_i(q,\vec{x}')=$ posición de la imagen

Además debe tenerse que

$$\vec{x}_i'(q, \vec{x}') \in \widetilde{V}$$

Las cargas imágenes deben ser externas a la región de interés $V$, de manera que su potencial sea una solución de la ecuación de Laplace en $V$. En efecto

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{q\delta(\vec{x} - \vec{x}')}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i'}{\mid \vec{x} - \vec{x}_i' \mid} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i' \vec{\nabla}^2 \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x}_i' \mid}$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i') = 0$$

Luego

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_i') = 0, \forall \vec{x} \in V$$

**Carga puntual $q$ ubicada frente a un conductor plano a potencial cero, y de extensión infinita**

## 9.2. Funciones Ortogonales y Expansiones

Una técnica muy poderosa de la física matemática es la representación de soluciones físicas mediante expansiones en términos de funciones ortogonales. En cada problema se elige un particular conjunto de funciones ort

ogonales adaptadas a la simetría del sistema. Revisemos las propiedades más generales de las funciones ortogonales y veamos su uso en la representación de funciones mediante series

Sea $\xi$ una variable real independiente, de rango

$$a \leq \xi \leq b$$

y $\{u_n(\xi)\}$ un conjunto infinito numerable de funciones complejas definidas en $(a, b)$, con $n = 1, 2, ...$ tales que

1. Todas ellas son de cuadrado integrable en $(a, b)$

$$\int_a^b d\xi \mid u_n(\xi) \mid^2 \leq \infty$$

donde

$$\mid u_n(\xi) \mid^2 = u_n^*(\xi) u_n(\xi)$$

2. Además satisfacen la condición de ortogonalidad en $(a, b)$

$$m \neq n \rightarrow \int_a^b d\xi u_m^*(\xi) u_n(\xi) = 0$$

**Normalización**

Sea

$$N_n = \int_a^b d\xi \mid u_n(\xi) \mid^2$$

$$0 < N_n < \infty$$

Definamos

$$\hat{u}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{N_n}} u_n(\xi)$$

Entonces el conjunto

$$\{\hat{u}_n(\xi), n = 1, 2, ..\}$$

es un conjunto de **funciones ortonormales** en $(a, b)$. La condición de ortonormalidad es

$$\int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi)\hat{u}_n(\xi) = \delta_{mn}$$

**Expansión**

Sea $f(\xi)$ una función arbitraria, en general compleja, de cuadrado integrable en $(a, b)$

$$\int_a^b d\xi \mid f(\xi) \mid^2 < \infty$$

Supongamos que, dado el número natural $N$, la serie finita

$$f_N(\xi) = \sum_{n=1}^{N} a_n \hat{u}_n(\xi)$$

sea una representación aproximada de la función $f(\xi)$ en $(a, b)$. Si modificamos los coeficientes $a_n$, $n = 1, 2, ...N$, modificamos la bondad de la aproximación. Surge entonces el problema de ajustar los coeficientes de tal manera que la aproximación sea óptima. Luego requerimos que el **error cuadrático medio** $M_N$ sea mínimo

$$M_N = \int_a^b d\xi \mid f(\xi) - f_N(\xi) \mid^2$$

Se tiene

$$M_N = \int_a^b d\xi \mid f(\xi) - \sum_{n=1}^{N} a_n \hat{u}_n(\xi) \mid^2$$

$$M_N = \int_a^b d\xi \left[ f^*(\xi) - \sum_{n=1}^{N} a_n^* \hat{u}_n^*(\xi) \right] \left[ f(\xi) - \sum_{m=1}^{N} a_m \hat{u}_m^*(\xi) \right]$$

$$M_N = \int_a^b d\xi \mid f(\xi) \mid^2 - \sum_{m=1}^{N} a_m \int_a^b d\xi f^*(\xi)\hat{u}_m(\xi) - \sum_{n=1}^{N} a_n^* \int_a^b d\xi f(\xi)\hat{u}_n^*(\xi) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n^* a_m \int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi)\hat{u}_m(\xi)$$

Utilizando la ortonormalidad

$$M_N = \int_a^b d\xi \mid f(\xi) \mid^2 - \sum_{m=1}^{N} a_m \int_a^b d\xi f^*(\xi)\hat{u}_m(\xi) - \sum_{n=1}^{N} a_n^* \int_a^b d\xi f(\xi)\hat{u}_n(\xi) + \sum_{n=1}^{N} a_n^* a_n$$

Entonces, la condición para el mínimo es

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_k^*} = -\int_a^b d\xi \hat{u}_k^*(\xi) f(\xi) + a_k = 0$$

$$\frac{\partial M_N}{\partial a_k} = -\int_a^b d\xi \hat{u}_k(\xi) f^*(\xi) + a_k^* = 0$$

Luego, los **mejores coeficientes** de la representación aproximada son

$$a_n = \int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi) f(\xi)$$

se llaman los **coeficientes de Fourier** de la expansión

**Completitud**

El conjunto de funciones ortonormales $\{\hat{u}_n(\xi)\}$ es completo en $(a, b)$ si, para cualquier función $f(\xi)$ de cuadrado integrable en $(a, b)$, existe un número natural $N_0[f]$ tal que, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, se tiene

$$N > N_0[f] \rightarrow M_N[f] < \epsilon$$

o sea que

$$\lim_{N\to\infty} M_N[f] = 0, \forall f$$

siendo $M_N$ el error cuadrático medio mínimo

**Convergencia en la media**

Si el conjunto de funciones ortonormales $\{\hat{u}_n(\xi)\}$ es completo en $(a, b)$ entonces se puede demostrar que la representación en serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi) = S[f]$$

con

$$a_n = \int_a^b d\xi \hat{u}_n^*(\xi) f(\xi)$$

$$S[f] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\xi) \int_a^b d\xi' \hat{u}_n^*(\xi') f(\xi')$$

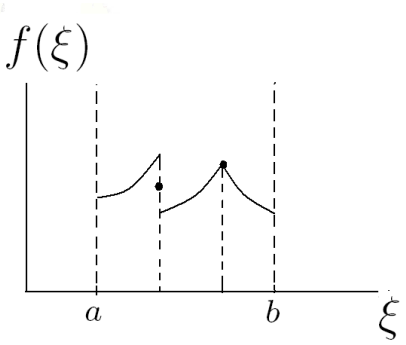
converge en la media a $f(\xi)$ en $(a, b)$. Vale decir que siendo $f(\xi)$ una función acotada y continua a trazos en $(a, b)$ (por lo tanto de cuadrado integrabe) se tiene

1. En todo punto de continuidad

$$S[f] = f(\xi)$$

2. En un punto de discontinuidad ordinaria

$$S[f] = \frac{f(\xi+0) + f(\xi-0)}{2}$$




Para todos los conjuntos de fnciones ortonormales que suelen usarse en física se ha demostrado su completitud

**Relación de completitud**

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi)$$

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n(\xi) \int_a^b d\xi' \hat{u}_n^*(\xi') f(\xi')$$

$$f(\xi) = \int_a^b d\xi' f(\xi') \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi') \hat{u}_n(\xi)$$

por otro lado

$$f(\xi) = \int_a^b d\xi' f(\xi') \delta(\xi' - \xi), \forall f$$

Luego, la suma total de los términos bilineales $\hat{u}_n^*(\xi)\hat{u}_n(\xi)$ debe darnos una representación de la delta de Dirac

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi') \hat{u}_n(\xi) = \delta(\xi' - \xi)$$

También vemos que, necesariamente

$$\sum_{n=1}^{N} \hat{u}_n^*(\xi') \hat{u}_n(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \hat{u}_n^*(\xi) \hat{u}_n(\xi')$$

es real, y que

$$\sum_{n=1}^{N} \hat{u}_n^*(a) \hat{u}_n(b) = 0, a \neq b$$

Luego, un conjunto de funciones ortonormales completo queda caracterizado por

$$\int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi) \hat{u}_n(\xi) = \delta_{mn}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi)\hat{u}_n(\xi') = \delta(\xi - \xi')$$

**Identidad de Parseval**

Sea

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi)$$

Consideremos

$$\int_a^b d\xi \mid f(\xi) \mid^2 = \int_a^b d\xi \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \hat{u}_m^*(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m^* a_n \int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi)\hat{u}_n(\xi)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m^* a_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_m^* a_n$$

Luego

$$\int_a^b d\xi \mid f(\xi) \mid^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid^2$$

**Teorema de Multiplicación**

Sean

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{u}_n(\xi)$$

$$g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{u}_n(\xi)$$

$$\int_a^b d\xi f^*(\xi) g(\xi) = \int_a^b d\xi \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \hat{u}_m^*(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{u}_n(\xi)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m^* b_n \int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi)\hat{u}_n(\xi)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m^* b_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n$$

Con esto

$$(f, g) = \int_a^b d\xi f^*(\xi) g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n$$

**Caso bidimensional**

Sea

$$f = f(\xi, \eta)$$

$$a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d$$

Elegimos dos conjuntos completos ortonormales

$$\{\hat{u}_n(\xi)\} \to \begin{cases} \int_a^b d\xi \hat{u}_m^*(\xi)\hat{u}_n(\xi) = \delta_{mn} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^*(\xi)\hat{u}_n(\xi') = \delta(\xi - \xi') \end{cases}$$

$$\{\hat{v}_n(\eta)\} \to \begin{cases} \int_c^d d\eta \hat{v}_m^*(\eta)\hat{v}_n(\eta) = \delta_{mn} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n^*(\eta)\hat{v}_n(\eta') = \delta(\eta - \eta') \end{cases}$$

entonces el conjunto (producto tensorial)

$$\{\hat{u}_m(\xi)\hat{v}_n(\eta)\} = \{\hat{w}_{m,n}(\xi,\eta)\}$$

satisface

$$\int_a^b \int_c^d d\xi d\eta \hat{u}_k^*(\xi)\hat{v}_l^*(\eta)\hat{u}_m(\xi)\hat{v}_n(\eta) = \delta_{km}\delta_{ln}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_m^*(\xi)\hat{v}_n^*(\eta)\hat{u}_m(\xi')\hat{v}_n(\eta') = \delta(\xi - \xi')\delta(\eta - \eta')$$

Luego cualquier función $f(\xi,\eta)$ de cuadrado integrable en $(a,b)\times(c,d)$ se puede representar como

$$f(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\hat{u}_m(\xi)\hat{v}_n(\eta)$$

$$a_{mn} = \int_a^b \int_c^d d\xi d\eta \hat{u}_m^*(\xi)\hat{v}_n^*(\eta) f(\xi,\eta)$$

## 9.3. Series de Fourier

### 9.3.1. Condiciones de Dirichlet

Sea la función $f(x)$ que satisface las siguientes condiciones (de Dirichlet)
(1) $f(x)$ está definida en $a < x < a + T$
(2) $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas a trazos (seccionalmente continuas) en $a < x < a + T$
(3) $f(x)$ es periódica con período $T$ en $-\infty < x < \infty$

$$f(x) = f(x + T)$$

**Observación**: la función $f(x)$ se puede definir a partir de una función acotada $F(x)$ definida en $-\infty < x < \infty$ siendo $F(x)$ y $F'(x)$ continuas a trazos en $a < x < a + T$. En efecto

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } a < x < a + T \\ f(x + T) & \text{si} - \infty < x < \infty \end{cases}$$

**Teorema de la serie de Fourier**
Si $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en $a < x < T$ entonces

(1) En todo punto de continuidad

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$$

(2) En un punto de discontinuidad ordinaria

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$$

donde

$$A_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} dx \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) f(x)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} dx \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) f(x)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, ....$ Las condiciones de Dirichlet son suficientes (pero no necesarias) para la convergencia en la media de la serie de Fourier. Sin perder generalidad, si $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en $-T/2 < x < T/2$ se tiene

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) f(x)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) f(x)$$

**Relaciones de ortogonalidad**

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = \frac{T}{2}\delta_{mn}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = \frac{T}{2}\delta_{mn}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dx \cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} dx \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = 0$$

## 9.4. Ecuación de Laplace en Coordenadas Rectangulares

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x,y,z) = 0$$

utilizamos el método de separación de variables

$$\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Se tiene entonces

$$\frac{1}{\phi}\vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

luego

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \alpha^2 + \beta^2 = -\gamma^2$$

Resulta

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0$$
$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0$$
$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \gamma^2 Z = 0$$

con

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

Consideremos

$$X(x) = e^{\pm i\alpha x}$$
$$Y(y) = e^{\pm i\beta y}$$
$$Z(z) = e^{\pm i\gamma z}$$

pero

$$\gamma^2 = -\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = i^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

$$\gamma = \pm i\sqrt{\alpha 2 + \beta^2}$$

$$\phi_{\alpha\beta}(x,y,z) = e^{\pm i\alpha x \pm i\beta y \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}$$

es un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace es lineal y homogénea, luego, por superposición

$$\phi(x,y,z) = \sum_\alpha \sum_\beta A^+_{\alpha\beta} e^{i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} + \sum_\alpha \sum_\beta A^-_{\alpha\beta} e^{i(\alpha x+\beta y)-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}$$

es también una solución de la ecuación de Laplace. Las constantes $\alpha$, $\beta$, $A^+_{\alpha\beta}$, $A^-_{\alpha\beta}$ están a nuestra disposición. Ellas se determinan mediante las condiciones de contorno

### 9.4.1. Problema en 2 dimensiones

En ciertos problemas, la simetría permite establecer que el potencial es sólo función de dos variables, digamos $x$ e $y$. En este caso se debe resolver

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = 0$$

La lógica es la misma, utilizando el método de separación de variables

$$\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)$$

Se tiene entonces

$$\frac{1}{\phi}\vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

luego

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2$$

Resulta

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \alpha^2 Y = 0$$

Las soluciones son de la forma

$$X(x) = e^{\pm i\alpha x}$$

$$Y(y) = e^{\pm \alpha y}$$

La solución general de la ecuación de Laplace está dada por la familia de funciones

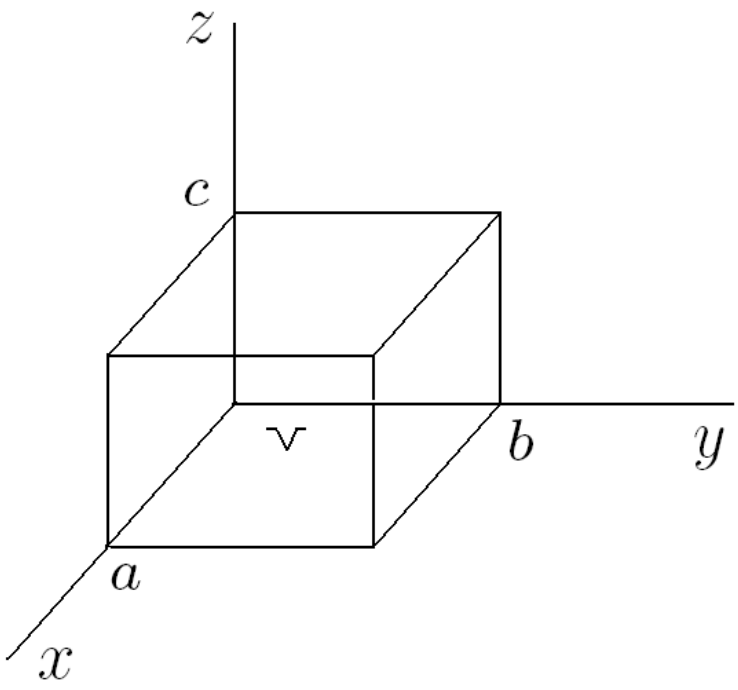
$$X(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x)$$

$$Y(y) = C_\alpha e^{\alpha y} + D_\alpha e^{-\alpha y}$$

con $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$ constantes reales.

**Problema**

Potencial en una Caja




Resolver

$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} \in S(V) : \begin{cases} \phi(0,y,z) = 0 \\ \phi(a,y,z) = 0 \\ \phi(x,0,z) = 0 \\ \phi(x,b,z) = 0 \\ \phi(x,y,0) = 0 \\ \phi(x,y,c) = \phi_D(x,y) \end{cases}$$

**Solución**

$$\phi(x,y,z) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left( A^{+}_{\alpha\beta} e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} + A^{-}_{\alpha\beta} e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} \right) e^{i(\alpha x + \beta y)}$$

Esto se puede reescribir como

$$\phi(x,y,z) = \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{\beta} \left( A^{+}_{\alpha\beta} e^{i\alpha x} + A^{+}_{-\alpha\beta} e^{-i\alpha x} \right) e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} e^{i\beta y} + \left( A^{-}_{\alpha\beta} e^{i\alpha} + A^{-}_{-\alpha\beta} e^{-i\alpha} \right) e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} e^{i\beta y}$$

Se tiene

$$\phi(0,y,z) = 0 \rightarrow A^{\pm}_{\alpha\beta} + A^{\pm}_{-\alpha\beta} = 0$$

Luego

$$\phi(x,y,z) = \sum_{\alpha \geq 0} \sum_{\beta} \left( A^{+}_{\alpha\beta} \left( e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x} \right) \right) e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} e^{i\beta y} + \left( A^{-}_{\alpha\beta} \left( e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x} \right) \right) e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} e^{i\beta y}$$

Además

$$\phi(a,y,z)=0\rightarrow e^{i\alpha a}-e^{-i\alpha a}=2i\sin\alpha a=0$$

Esto limita los valores posibles que puede tomar $\alpha$

$$a\alpha=m\pi\rightarrow m=0,\pm1,\pm2,...$$

$$\alpha=\frac{m\pi}{a}\rightarrow m=0,\pm1,\pm2,...$$

Así

$$\phi(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\beta}2i\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{i\beta y}\left(A_{m\beta}^{+}e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}+A_{m\beta}^{-}e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}\right)$$

y se puede escribir como

$$\phi(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\beta\geq0}2i\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\left(\left(A_{m\beta}^{+}e^{i\beta y}+A_{m-\beta}^{+}e^{-i\beta y}\right)e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}+\left(A_{m\beta}^{-}e^{i\beta y}+A_{m-\beta}^{-}e^{-i\beta y}\right)e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}\right)$$

Se cumple además

$$\phi(x,0,z)=0\rightarrow A_{\alpha\beta}^{\pm}+A_{\alpha-\beta}^{\pm}=0$$

$$\phi(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\beta\geq0}2i\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\left(A_{m\beta}^{+}2i\sin(\beta y)e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}+A_{m\beta}^{-}2i\sin(\beta y)e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}\right)$$

y

$$\phi(x,b,z)=0\rightarrow2i\sin\beta b=0$$

Esto limita los valores posibles que puede tomar $\beta$

$$b\beta=n\pi\rightarrow n=0,\pm1,\pm2,...$$

$$\beta=\frac{n\pi}{b}\rightarrow n=0,\pm1,\pm2,...$$

En resumen, $\alpha$ y $\beta$ satisfacen

$$\alpha=\frac{m\pi}{a},\beta=\frac{n\pi}{b}$$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{a}\right)^2}=\gamma_{mn}$$

$$m,n=0,\pm1,\pm2,...$$

y la solución general queda

$$\phi(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(2i)^2\left(A_{mn}^{+}e^{\gamma_{mn}z}+A_{mn}^{-}e^{-\gamma_{mn}z}\right)\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

El potencial también debe ser nulo en $z=0$

$$(2i)^2 \left(A^+_{mn} + A^-_{mn}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) = 0$$

$$A^+_{mn} + A^-_{mn} = 0$$

Sea

$$\frac{1}{2} A_{mn} = (2i)^2 A^+_{mn} = -(2i)^2 A^-_{mn}$$

luego

$$(2i)^2 \left(A^+_{mn} e^{\gamma_{mn} z} + A^-_{mn} e^{-\gamma_{mn} z}\right) = \frac{1}{2} A_{mn} \left(e^{\gamma_{mn} z} - e^{-\gamma_{mn} z}\right)$$

$$= A_{mn} \sinh \gamma_{mn} z$$

Con todo esto, la solución toma la forma

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) \sinh \gamma_{mn} z$$

Por último, la condición en $z = c$ entrega

$$\phi(x, y, c) = \phi_D(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{mn} \sinh \gamma_{mn}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) c$$

Esta es una **doble serie de Fourier**

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n \xi}{L}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L d\xi \sin\left(\frac{\pi n \xi}{L}\right) f(\xi)$$

Luego la solución del problema es

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) \sinh \gamma_{mn} z$$

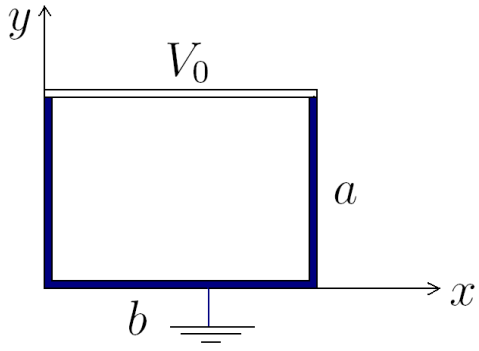
con

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh \gamma_{mn} c} \int_0^a dx \int_0^b dy \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \phi_D(x, y)$$

$$\gamma_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

**Problema**

Determinar el potencial en la región que comprende el interior de una caja rectangular de longitud infinita, cuya sección transversal se aprecia en la figura




**Solución**

Dado que la longitud de la caja es muy larga, el potencial tendrá la misma forma para cualquier sección transversal. Se debe resolver entonces la ecuación de Laplace

$$\vec{\nabla}^2\phi(x,y)=0$$

con las condiciones de borde

$$\vec{x}\in S(V):\begin{cases}\phi(0,y)=0\\ \phi(b,y)=0\\ \phi(x,0)=0\\ \phi(x,a)=V_0\end{cases}$$

La solución general de la ecuación de Laplace es

$$\phi(x,y)=X(x)Y(y)$$

donde $X(x)$ e $Y(y)$ pertenecen a las familias de funciones

$$X(x)=A_\alpha\cos(\alpha x)+B_\alpha\sin(\alpha x)$$

$$Y(y)=C_\alpha e^{\alpha y}+D_\alpha e^{-\alpha y}$$

Para cualquier $\alpha$ real, $\phi(x,y)$ es solución de la ecuación de Laplace. Sin embargo, las condiciones de borde limitarán los valores posibles de $\alpha$. En efecto, debe cumplirse que

$$\phi(0,y)=0\rightarrow X(0)=0$$

de forma que

$$A_\alpha=0$$

es decir

$$X(x)=B_\alpha\sin(\alpha x)$$

Además, debe tenerse

$$\phi(b,y)=0\rightarrow B_\alpha\sin(\alpha b)=0$$

es decir

$$\alpha b=n\pi, n=0,1,2,...$$

luego

$$\alpha = \frac{n\pi}{b}, n = 0, 1, 2, ...$$

Es decir, la familia de funciones que satisfacen la ecuación de Laplace y cumplen con $\phi(0, y) = \phi(b, y) = 0$ está dada por

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2, ...$$

$$Y(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{b}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}y}, n = 0, 1, 2, ...$$

La solución general toma la forma

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}y}\right)$$

además se tiene $\phi(x, 0) = 0$

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)(A_n + B_n) = 0$$

Luego

$$A_n = -B_n$$

y entonces

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) A_n \left(e^{\frac{n\pi}{b}y} - e^{-\frac{n\pi}{b}y}\right)$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) 2A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Donde $C_n = 2A_n$. Por último, la condición de borde $\phi(x, a) = V_0$ entrega

$$\phi(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = V_0$$

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)$$

¿Cómo podemos encontrar los $C_n$?. La clave está en notar que esta es una expansión en series de Fourier. Si $F : [-b, b] \to \mathbb{R}$ es una función de cuadrado integrable en [-b,b], admite una expansión en series

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \sum_{n=1} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

con

$$B_n = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} dx F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2...$$

$$A_n = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} dx F(x)\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2...$$

En particular, si $F$ es una función impar sobre $[-b, b]$, $A_n = 0\ \forall n$, y entonces

$$F(x) = \sum_{n=1} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

con

$$B_n = \frac{2}{b}\int_{0}^{b} dx F(x)\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), n = 0, 1, 2...$$

Interpretemos ahora el resultado que hemos obtenido

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

Es justamente la expansión en serie de Fourier de $V_0$. Entonces

$$B_n = \frac{2}{b}\int_{0}^{b} dx V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) = \frac{2V_0}{b}\int_{0}^{b} dx \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

$$B_n = -\frac{2V_0}{b}\frac{b}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\Big|_0^b = 2\frac{V_0}{n\pi}\left(1 - \cos\left(n\pi\right)\right)$$

Notar que $B_n = 0$ para $n$ impar, mientras que $B_n = 4\frac{V_0}{n\pi}$ para $n$ impar. Además,

$$B_n = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \rightarrow C_n = \frac{B_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}$$

Luego

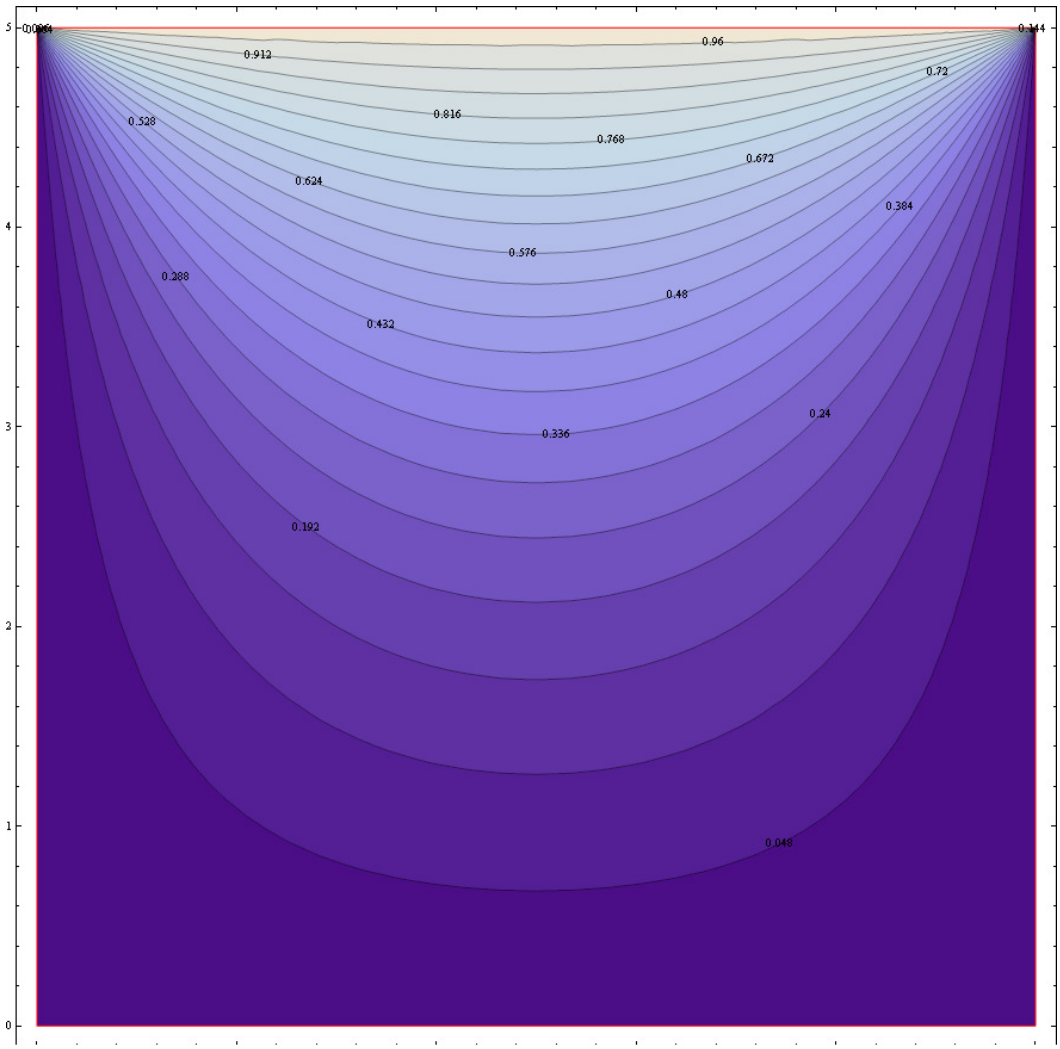
$$C_n = 0, \text{n par}$$

$$C_n = \frac{4V_0}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}, \text{n impar}$$

y la solución para el potencial queda

$$\phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{b}\right)\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi y}{b}\right)$$

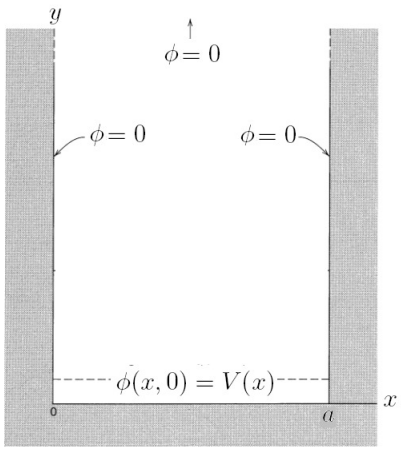
La siguiente figura es un gráfico de las curvas de nivel para $a = b = 5$ y $V_0 = 1$ [V]



**Problema**

Encuentre el potencial para la región $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$, con las condiciones de borde de Dirichlet

$$\vec{x} \in S(V): \begin{cases} \phi(0,y) = 0 \\ \phi(a,y) = 0 \\ \lim_{y\to\infty} \phi(x,y) = 0 \\ \phi(x,0) = V(x) \end{cases}$$




**Solución**

El potencial en $V$ satisface la ecuación de Laplace

$$\vec{\nabla}^2 \phi(x,y) = 0$$

cuya solución está dada por

$$\phi(x,y) = X(x)Y(y)$$

donde

$$X(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x)$$

$$Y(y) = B_\alpha e^{\alpha y} + C_\alpha e^{-\alpha y}$$

La condición de borde $\phi(0,y) = 0$ implica

$$X(0) = A_\alpha = 0 \rightarrow X(x) = B_\alpha \sin(\alpha x)$$

Además, debe tenerse

$$\phi(a,y) = 0 \rightarrow X(a) = 0$$

$$\sin(\alpha a) = 0$$

Entonces

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, ...$$

Entonces la solución toma la forma

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)$$

La condición en el infinito es

$$\lim_{y\to\infty}\phi(x,y)=0$$

de forma que $A_n=0,\forall n=0,1,2,...$

$$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

Por último, la condición $\phi(x,0)=V(x)$ es

$$\phi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)=V(x)$$

Ahora, consideremos $F(x),-a\leq x\leq x$. Si $F(x)$ es cuadrado integrable en $[-a,a]$, entonces existe su serie de Fourier

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$$

donde

$$A_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}dxF(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right),n=0,1,2,...$$

$$C_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}dxF(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),n=0,1,2,...$$

Si $F(x)$ es impar, entonces $A_n=0\ \forall n$, de forma que

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$$

con

$$C_n=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}dxF(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),n=1,2,...$$

Con esto,

$$\phi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)=V(x)$$

corresponde a la expansión en serie de Fourier de $V(x),-a<x<a$, con $V(-x)=-V(x)$ (por supuesto que físicamente sólo interesa $V(x)$ para $0\leq x\leq a$). Así, la solución del problema es

$$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

con

$$B_n=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}dxV(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),n=1,2,...$$

Supongamos que $\phi(x,0)=V(x)=V_0$ (constante). Luego

$$B_n=\frac{2V_0}{a}\int_{0}^{a}dx\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)=-\frac{2V_0}{a}\frac{a}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\Big|_0^a,n=1,2,3...$$

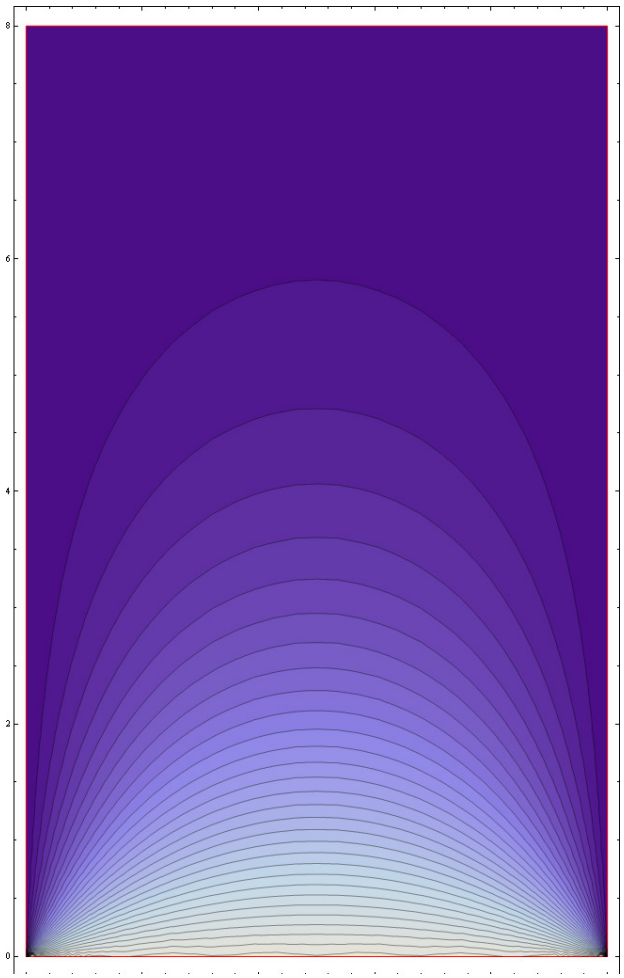
$$B_n = \frac{2V_0}{n\pi}\left(1-\cos\left(n\pi\right)\right), n = 1, 2, 3...$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \quad \text{par} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{si} \quad n \quad \text{impar} \end{cases}$$

Finalmente

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{a}x\right) e^{-\frac{(2n-1)\pi}{a}y}$$

El gráfico muestra la solución para $V_0 = 0{,}1$, $a = 5$, y tomando 50 términos en la serie



## 9.5. Ecuación de Laplace en coordenadas Cilíndricas

### 9.5.1. Problema bidimensional

Supongamos un problema de Laplace plano, en donde la geometría del problema permite que sea más favorable utilizar coordenadas polares

$$\vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

Utilizando el método de separación de variables, es decir

$$\phi(r,\varphi) = R(r)\Psi(\varphi)$$

De forma que

$$\vec{\nabla}^2\phi = \Psi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + R(r)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0$$

Multiplicando por $\frac{r^2}{\phi}$ (si $\phi$ nunca es cero)

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2\Psi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0$$

o, equivalentemente

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\Psi(\varphi)}\frac{\partial^2\Psi(\phi)}{\partial\varphi^2}$$

La única forma de que esto último sea posible es que ambas expresiones sean una constante

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{\Psi(\varphi)}\frac{\partial^2\Psi(\phi)}{\partial\varphi^2} = \alpha^2$$

de forma que

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = \alpha^2$$

$$\frac{1}{\Psi(\varphi)}\frac{d^2\Psi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\alpha^2$$

1. Primer caso, $\alpha \neq 0$
La solución para $\Psi$ es inmediata

$$\Psi(\varphi) = e^{\pm i\alpha\varphi}$$

y para $R(r)$, con $\alpha \neq 0$

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = \frac{r}{R(r)}\left(\frac{dR(r)}{dr} + r\frac{d^2R(r)}{dr^2}\right) = \alpha^2$$

$$r\frac{dR(r)}{dr} + r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} = R(r)\alpha^2$$

Esta ecuación pertenece al tipo Cauchy, la solución es de la forma

$$R(r) = r^a$$

En efecto, es solución si

$$rar^{a-1} + r^2 a(a-1)r^{a-2} = r^a \alpha^2$$
$$ar^a + a(a-1)r^a = r^a \alpha^2$$

$$a + a(a-1) = \alpha^2 \rightarrow a^2 = \alpha^2$$

Entonces

$$a = \pm\alpha$$

y la solución para $R(r)$, con $\alpha \neq 0$ es

$$R(r) = A_\alpha r^\alpha + B_\alpha r^{-\alpha}$$

2. Segundo caso, $\alpha = 0$

Aquí,

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR(r)}{dr} \right) = 0$$

luego

$$\left( r \frac{dR(r)}{dr} \right) = 0 \rightarrow R(r) = a_0 + b_0 \ln r$$

y

$$\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{d^2\Psi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

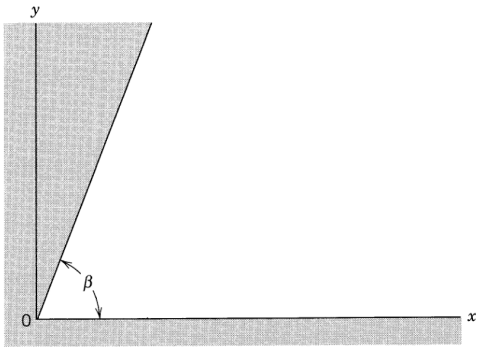
$$\Psi(\varphi) = A_0 + B_0 \varphi$$

Finalmente, la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas polares es la familia de soluciones

$$\phi(r, \varphi) = (a_0 + b_0 \ln r)(A_0 + B_0\varphi) + \left(A_\alpha r^\alpha + B_\alpha r^{-\alpha}\right)(C_\alpha \sin(\alpha\varphi) + D_\alpha \cos(\alpha\varphi))$$

**Problema**

Determine el potencial electrostático al interior de la región limitada por un conductor de extensión infinita cuya forma se muestra en la figura. El conductor se encuentra a potencial $V$



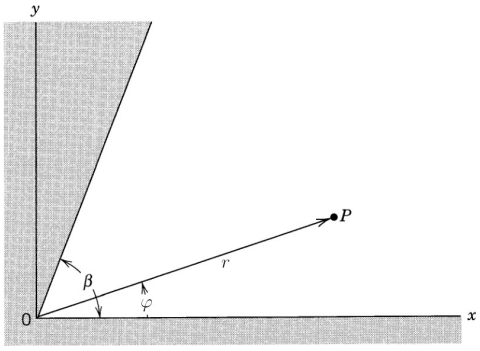

**Solución**

Dada la geometría, es natural utilizar coordenadas polares para resolver este problema. Si en la región $\Omega : 0 \leq \varphi \leq \beta$ no hay carga, entonces el potencial satisface

$$\vec{\nabla}^2\phi = 0, \text{en}\Omega$$

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares está dada por

$$\phi(r,\varphi) = (a_0 + b_0 \ln r)(A_0 + B_0\varphi) + \left(A_\alpha r^\alpha + B_\alpha r^{-\alpha}\right)(\sin(C_\alpha \alpha\varphi) + D_\alpha \cos(\alpha\varphi))$$




El potencial debe ser finito en el origen $r = 0$, de forma que $B_\alpha = 0, \forall\alpha$, igualmente $b_0 = 0$. La solución que nos interesa toma la forma

$$\phi(r,\varphi) = (A_0 + B_0\varphi) + A_\alpha r^\alpha (C_\alpha \sin(\alpha\varphi) + D_\alpha \cos(\alpha\varphi))$$

La condición de borde $\phi(r,0) = V$ implica

$$\phi(r,0) = A_0 + A_\alpha r^\alpha D_\alpha = V$$

Lo cual se cumple para todo $r$ si $A_0 = V$, $D_\alpha = 0$. Así

$$\phi(r,\varphi) = (V + B_0\varphi) + A_\alpha r^\alpha \sin(\alpha\varphi)$$

Además, la condición de borde en $= \beta$ entrega

$$\phi(r,\beta) = (V + B_0\beta) + A_\alpha r^\alpha \sin(\alpha\beta) = V$$

$$B_0\beta + A_\alpha r^\alpha \sin(\alpha\beta) = 0$$

lo cual se cumple para todo $r$ si

$$B_0 = 0$$

$$\sin(\alpha\beta) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{\beta}, n = 0, 1, 2, ...$$

Finalmente, la solución queda

$$\phi(r, \varphi) = V + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\varphi\right)$$

## 9.6. Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas

$$\vec{\nabla}^2\phi(r,\vartheta,\varphi)=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

Notar que

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

y

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\phi\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

luego

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$$

Así, la ecuación de Laplace queda de la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

supongamos

$$\phi(r,\vartheta,\varphi)=\frac{R(r)}{r}\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

resulta

$$\frac{\Theta\Phi}{r}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{R\Phi}{r^3\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)+\frac{R\Theta}{r^3\sin^2\vartheta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$$

$$\frac{r^2\sin^2\vartheta}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{\sin\vartheta}{\Theta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=m^2$$

La ecuación para $\Phi$ es inmediata

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0$$

cuya solución es

$$\Phi(\varphi)=e^{\pm im\varphi}$$

Es evidente que esta función debe ser periódica

$$\Phi(\varphi\pm2\pi)=\Phi(\varphi)$$

es decir

$$e^{\pm im(\varphi+2\pi)}=e^{\pm i2\pi m}e^{\pm im\varphi}=e^{\pm im\varphi}$$

$$e^{\pm i2\pi m} = \cos(2\pi m) \pm i\sin(2\pi m) = 1$$

luego $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Con esto

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} = -\frac{1}{\Theta \sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \frac{m^2}{\Phi\sin^2\vartheta} = l(l+1)$$

Luego

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0$$

Esta ecuación pertenece al tipo Cauchy

$$x^2y''(x) + \alpha xy'(x) + \beta y(x) = 0$$

cuya solución es de la forma

$$y(x) = x^a \rightarrow y'(x) = ax^{a-1} \rightarrow y''(x) = a(a-1)x^{a-2}$$

luego

$$a(a-1)x^a + \alpha a x^a + \beta x^a = 0$$

$$a^2 + (\alpha - 1)a + \beta = 0$$

$$a = \begin{cases} a_1 = \frac{(1-\alpha)+\sqrt{(1-\alpha}^2 - 4\beta}{2} \\ a_2 = \frac{(1-\alpha)-\sqrt{(1-\alpha}^2 - 4\beta}{2} \end{cases}$$

Por superposición , tenemos que la solución general es

$$y(x) = Ax^{a_1} + Bx^{a_2}$$

En nuestro caso

$$R(r) = r^a$$

$$a^2 - a - l(l+1) = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l + 4l^2}}{2}$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{(2l+1)^2}}{2} = \frac{1 \pm (2l+1)}{2} = \begin{cases} l+1 \\ -l \end{cases}$$

Luego

$$R_l(r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}$$

Nos queda únicamente la ecuación para $\Theta$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0$$

Sea $\mu = \cos\vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \pi \rightarrow -1 \leq \mu \leq 1$

$$P(\mu) = \Theta(\vartheta)$$

$$\frac{d\Theta}{d\vartheta} = \frac{d\mu}{d\vartheta}\frac{dP}{d\mu} = -\sin\vartheta\frac{dP}{d\mu}$$

$$\frac{d}{d\mu} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}$$

Luego la ecuación es

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)P = 0$$

Esta es la ecuación generalizada de Legendre, sus soluciones se llaman **funciones asociadas de Legendre**. Estudiaremos primero la ecuación ordinaria de Legendre

$$m = 0$$

Esto equivale a resolver el problema de Laplace para casos en que existe simetría azimutal (es decir, donde el potencial no depende de la variable $\varphi$). En este caso

$$\frac{d}{d\mu}\left(1-\mu^2\right)\frac{dP}{d\mu} + l(l+1)P(\mu) = 0$$

Las soluciones deben ser monovalentes, finitas, y continuas en $-1 \leq \mu \leq 1$. Estos son los **polinomios de Legendre**

## 9.7. Problemas de Contorno con Simetría Azimutal

Para problemas con simetría esférica y simetría azimutal (es decir, el potencial no depende de $\varphi$)

$$\phi = \phi(r,\vartheta) = \frac{R(r)}{r}\Theta(\vartheta)$$

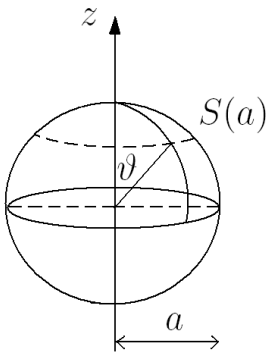
La solución general a la ecuación de Laplace queda en términos de potencias de $r$ y polinomios de Legendre

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\vartheta)$$

$$A_l, B_l$$

se determinan usando las condiciones de contorno

**Problema :Potencial en una esfera**




El problema a resolver es

$$\vec{x} \in S(a) : \phi(\vec{x}) = \phi_D(\vartheta)$$
$$\vec{x} \in V : \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

a) Problema interno ($r \leq a$)

Se requiere que $\phi(\mid \vec{x} \mid = 0)$ sea finito, de forma que $B_l = 0$ $(l = 0, 1, 2, ...)$

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta)$$

La condición de contorno es

$$\phi(a, \vartheta) = \phi_D(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\vartheta)$$

es una serie de Legendre. Luego

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta P_l(\cos\vartheta)\phi_D(\vartheta)$$

b) Problema externo ($r \geq a$)

Se debe tener

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \phi(\vec{x}) = 0$$

con lo que

$$A_l = 0, l = 0, 1, 2, ...$$

luego

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\vartheta)$$

el potencial debe ser continuo en el contorno, por lo que

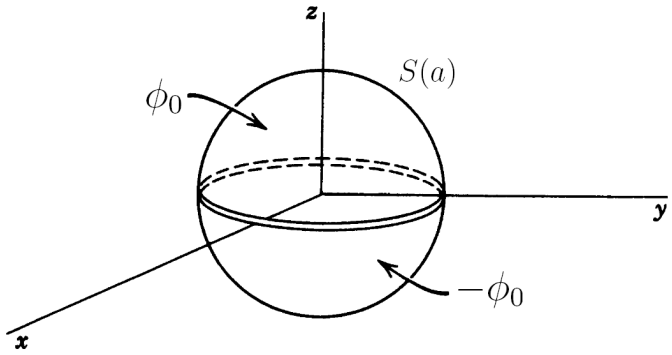
$$\phi(a,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos\vartheta) = \phi_D(\vartheta)$$

de donde

$$B_l = \frac{2l+1}{2} a^{l+1} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta P_l(\cos\vartheta)\phi_D(\vartheta)$$

**Problema**

Se tiene una esfera conductora cuyos hemisferios se encuentran a distinto potencial




$$\phi_D(\vartheta) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \\ -\phi_0 & \text{si } \pi/2 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

Encontrar el potencial electrostático en el interior de la esfera, y la densidad superficial de cargas

**Solución**

Se trata de un problema con simetría azimutal donde el potencial satisface la ecuación de Laplace excepto en el contorno $r = a$. Para el problema interno, el potencial es de la forma

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l \cos(\vartheta)$$

(se ha exigido que debe ser finito en $r = 0$). Además se cumple

$$\phi(a, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l \cos(\vartheta) = \phi_D$$

de donde se obtiene

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta P_l(\cos\vartheta)\phi_D(\vartheta)$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \left( \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta P_l(\cos\vartheta)\phi_0 - \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta P_l(\cos\vartheta)\phi_0 \right)$$

$$A_l = \phi_0 \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta P_l(\cos\vartheta) - \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta P_l(\cos\vartheta) \right\}$$

$$A_l = -\phi_0 \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_1^{0} d\mu P_l(\mu) - \int_0^{-1} d\mu P_l(\mu) \right\}$$

$$A_l = \phi_0 \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_0^{1} d\mu P_l(\mu) - \int_{-1}^{0} d\mu P_l(\mu) \right\}$$

Si $l$ es par, $P_l(\mu) = P_l(-\mu)$, mientras que si $l$ es impar, $P_l(\mu) = -P_l(-\mu)$. Luego, $A_l = 0$ para $l$ par, y

$$A_l = (2l+1)\frac{\phi_0}{a^l} \int_0^{1} d\mu P_l(\mu)$$

para $l$ impar. Además, se tiene que para $l = 2n-1$, $n = 1, 2, 3...$

$$\int_0^1 d\mu P_{2n-1}(\mu) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}$$

Luego

$$\phi_{r,\vartheta} = \phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n-1)(2n-3)!!}{a^{2n-1}2^n n!} r^{2n-1} P_{2n-1}(\cos\vartheta)$$

Con esto es posible encontrar la densidad superficial de cargas, puesto que

$$\sigma(\vartheta) = \epsilon_0 \vec{E}(a,\vartheta)\cdot\hat{r} = -\epsilon_0 \vec{\nabla}\phi(r,\vartheta)\Big|_{r=a}\cdot\hat{r}$$

$$\sigma(\vartheta) = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi(r,\vartheta)}{\partial r}\Big|_{r=a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n-1)(2n-1)!!}{a^{2n-1}2^n n!} r^{2n-2} P_{2n-1}(\cos\vartheta)$$

luego

$$\sigma(\vartheta) = \epsilon_0 \frac{\phi_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}(4n-1)(2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n-1}(\cos\vartheta)$$

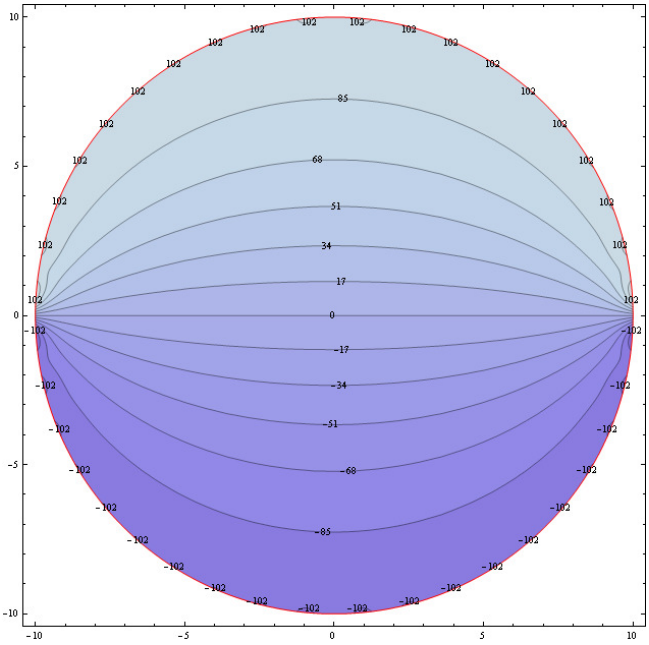



Fig. 9.1: Equipotenciales para $\phi_0 = 100$ [V] y usando 10 términos en la expansión

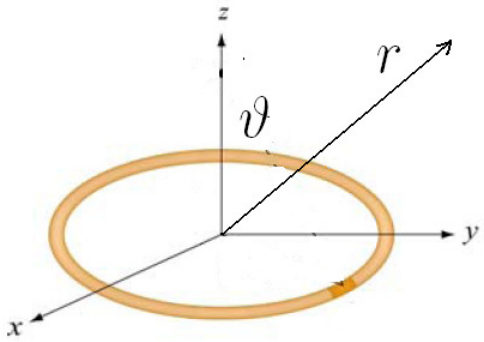
**Problema**

Encuentre el potencial en todo el espacio de un anillo de radio $R$ cargado con carga $Q$ uniforme

**Solución**

El potencial en todo el espacio (excepto sobre el anillo) cumple

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = 0$$




Ya fue resuelto anteriormente el valor del potencial sobre el eje $z$

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Es claro que el problema posee una simetría azimutal (el potencial no depende del ángulo polar $\varphi$). Con esto

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\vartheta)$$

Se deben imponer las condiciones de contorno adecuadas. Como conocemos el potencial sobre el eje $z$, es decir para $\vartheta = 0$

$$\phi(r,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

$$\phi(r,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r^2+R^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(1) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)$$

pues $P_l(1) = 1$ para todo $l = 0, 1, 2, ...$

$$\phi(r,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r^2+R^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)$$

Separamos en dos casos

1) $r > R$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r\left(1+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(1+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

Como $R/r < 1$, la expansión en serie de potencias de $(1+(R/r)^2)^{-1/2}$ converge, y está dada por

$$\left(1+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{-1/2} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l}{dx} f(x)\Big|_{x=0} \frac{x^l}{l!}$$

con

$$f(x) = (1+x)^{-1/2}$$

se tiene

$$f(x)\Big|_{x=0} = 1$$

$$f'(x)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x)\Big|_{x=0} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f'''(x)\Big|_{x=0} = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$f^4(x)\Big|_{x=0} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)$$

En general

$$f^l(x)\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^l(2l-1)!!}{2^l}$$

de forma que

$$\left(1+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{(l-1)!!}{2^l l!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2l}$$

Entonces

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r\left(1+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(l-1)!!}{2^l l!}\frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(l-1)!!}{2^l l!}\frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

Por supuesto que debe tenerse

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty}\phi(\vec{x}) = 0$$

por lo que

$$A_l = 0, \forall l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(l-1)!!}{2^l l!}\frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

de aquí se obtiene que $B_l = 0$ para $l$ impar, luego

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_{2l} r^{-(2l+1)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l-1)!!}{2^l l!} \frac{R^{2l}}{r^{2l+1}}$$

$$B_{2l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{(2l-1)!!}{l!} R^{2l}$$

y entonces el potencial queda, para $r > R$

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{(2l-1)!!}{l!} R^{2l} r^{-(2l+1)} P_{2l}(\cos\vartheta)$$

2) caso en que $r < R$
Aquí el potencial será de la forma

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\vartheta)$$

Se requiere que el potencial sea finito, luego $D_l = 0$ para todo $l = 0, 1, 2...$ la condición de contorno en el eje $z$, $z > 0$ entrega

$$\phi(r,0) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R\left(1 + (r/R)^2\right)^{-1/2}}$$

Como $r/R < 1$, está garantizada la convergencia de la serie de potencias de

$$\left(1 + (r/R)^2\right)^{-1/2}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{r^{2l}}{R^{2l}}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{r^{2l}}{R^{2l+1}}$$

de aquí es inmediato que $C_l = 0$ para $l$ impar

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_{2l} r^{2l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{r^{2l}}{R^{2l+1}}$$

$$C_{2l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l! R^{2l+1}}$$

Finalmente, el potencial está dado por

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l! R^{2l+1}} r^l P_{2l}(\cos\vartheta), r < R$$

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{(2l-1)!!}{l!} R^{2l} r^{-(2l+1)} P_{2l}(\cos\vartheta), r > R$$

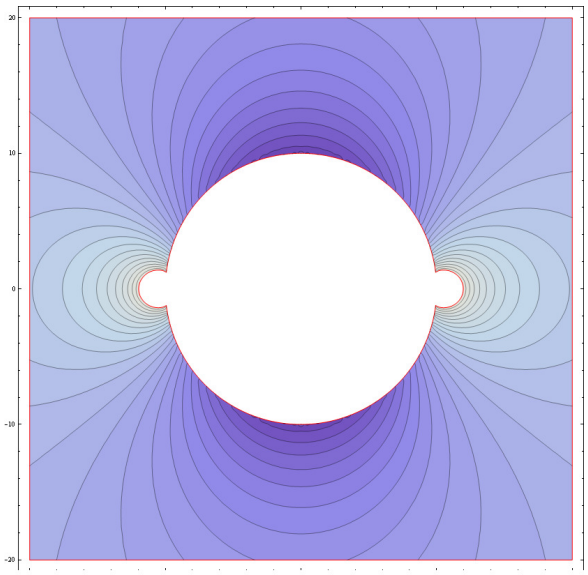


Fig. 9.2: La figura muestra la solución para $r > R$, tomando 40 términos

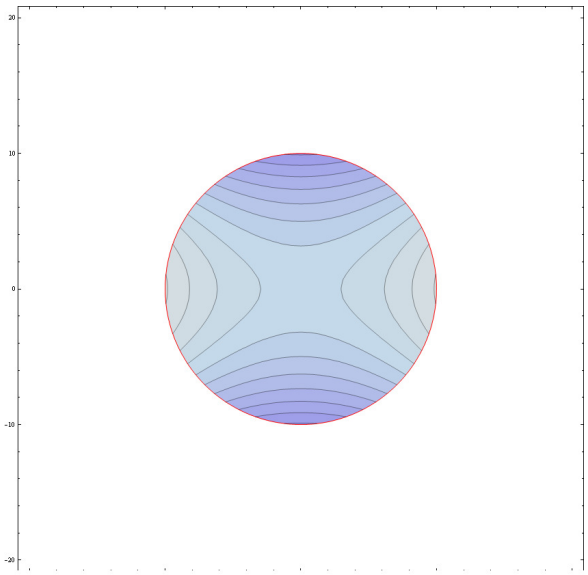


Fig. 9.3: La figura muestra la solución para $r < R$