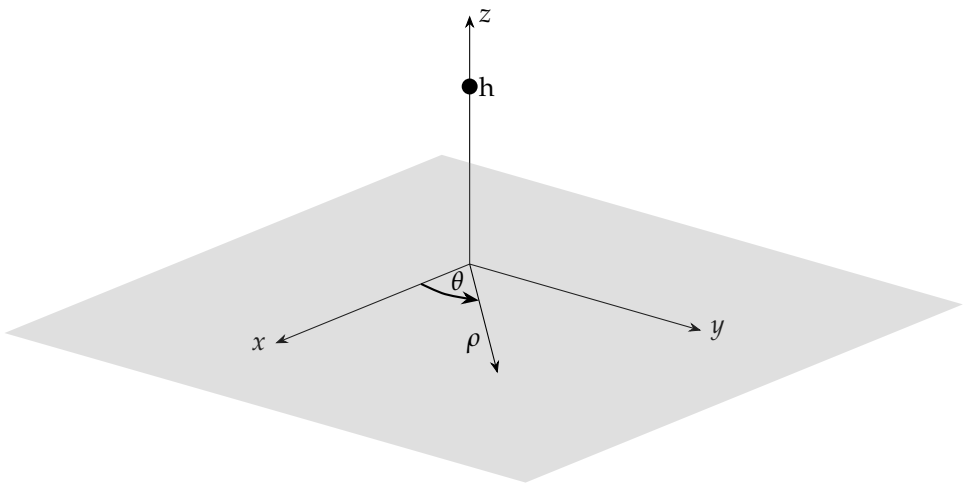
Interrogación 1

Fecha: 23 de septiembre del 2025

1. Consideremos un plano infinito cargado ubicado en $z = 0$. Además, una carga puntual q se coloca en el punto $(0, 0, h)$, es decir, a una altura h sobre el origen. La densidad superficial de carga en el plano está dada por

$$\sigma(\rho) \;=\; \frac{-q\,h}{2\pi\,(\rho^2 + h^2)^{3/2}}\,,$$

donde ρ representa la distancia radial al origen en coordenadas polares.



a) (3 pts.) Calcule el campo eléctrico debido únicamente al plano cargado en un punto $(0, 0, z)$ con $z > 0$.

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x)^{3/2}(b^2 + x)^{3/2}} = \frac{2}{ab(a + b)^2}\,.$$

b) (1 pto.) Determine la fuerza que ejerce el plano cargado sobre la carga puntual q.

c) (2 pts.) Suponga que la carga puntual q tiene una masa m y se encuentra inicialmente en reposo a una altura h sobre un plano cargado horizontal. Si se deja que la carga puntual se mueva libremente bajo la acción del campo eléctrico, determine la velocidad con la que alcanza el plano, despreciando la gravedad.

Solución:

a) El campo eléctrico estará dado por

$$\vec{E} = k \int \frac{\sigma}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3} \left(\vec{r} - \vec{r'}\right) \mathrm{d}A \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde

$$\vec{r} = z\hat{z} \qquad \text{y} \qquad \vec{r'} = \rho\hat{\rho}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Entonces

$$\left|\vec{r} - \vec{r'}\right| = |z\hat{z} - \rho\hat{\rho}| = \left(z^2 + \rho^2\right)^{1/2}.$$

Además,

$$\mathrm{d}A = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

Sustituyendo estas definiciones en la fórmula del campo eléctrico se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= k\left(\frac{-qh}{2\pi}\right)\int \frac{(z\hat{z}-\rho\hat{\rho})}{(z^2+\rho^2)^{3/2}(\rho^2+h^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}A \\ &= k\left(\frac{-qh}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{(z\hat{z}-\rho\hat{\rho})}{(z^2+\rho^2)^{3/2}(\rho^2+h^2)^{3/2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$ (0.5 pts.)

Notamos que

$$\int \hat{\rho}\,\mathrm{d}\theta = 0$$ (0.5 pts.)

Esta expresión es equivalente a decir que la integral sobre la variable θ debe dar cero debido a la simetría del problema.

Usando la integral recomendada en el enunciado junto con el cambio de variable $x = \rho^2$

$$\vec{E}(z) = -qhk\int_0^{\infty}\frac{z\hat{z}}{(z^2+\rho^2)^{3/2}(\rho^2+h^2)^{3/2}}\rho\,\mathrm{d}\rho = -qk\frac{1}{(z+h)^2}\hat{z}$$ (0.5 pts.)

■

b) Usamos que $\vec{F} = q\vec{E}$ y obtenemos

$$\vec{F} = q\vec{E}(h) = -\frac{q^2k}{4}\frac{1}{h^2}\hat{z}$$ (1.0 pts.)

■

c) El trabajo de llevar la carga desde $z = h$ a $z = 0$ estará dado por

$$W_{h\to 0} = \int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$ (0.5 pts.)

donde

$$\vec{F}(z) = q\vec{E}(z) = -q^2k\frac{1}{(z+h)^2}\hat{z} \qquad \text{y} \qquad d\vec{l} = dz\hat{z}$$ (0.5 pts.)

$$W_{h\to 0} = \int_h^0(-1)q^2k\frac{1}{(z+h)^2}\,\mathrm{d}z = q^2k\int_0^h\frac{1}{(z+h)^2}\,\mathrm{d}z = q^2k\frac{1}{(z+h)}\Big|_0^h = \frac{q^2k}{2h}.$$ (0.5 pts.)

Esto es por definición $W_{h\to 0} = -q\,(V(0)-V(h))$. Utilizamos conservación de la energía (o $W_{\text{neto}} = \Delta K$),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_f^2 + qV(0) &= \frac{1}{2}mv_i^2 + qV(h) \\ \implies v_f^2 &= \frac{q^2k}{mh} \\ \implies |\vec{v}_f| &= q\sqrt{\frac{k}{mh}} = \frac{q}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon_0 mh}}\end{aligned}$$ (0.5 pts.)

con $\vec{v}_f = -\,|\vec{v}_f|\,\hat{z}$.

■

2. Se tiene un sistema formado por dos cascarones esféricos perfectamente conductores. El interno de radios a_1 y a_2 y el externo de radios b_1 y b_2 . Los conductores son concéntricos y se encuentran inicialmente aislados y descargados. En el centro del agujero interior se encuentra una carga puntual q.

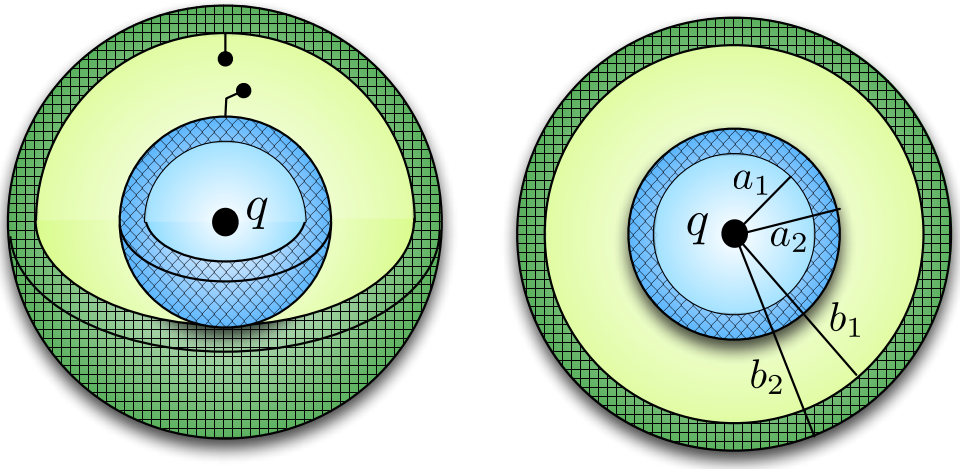
   a) (1 pto.) Determine las densidades de carga eléctrica inducidas en los conductores.

   b) (1 pto.) Determine el campo eléctrico en todos los puntos del espacio. Luego, bosqueje el gráfico de la magnitud del campo eléctrico en función de la distancia radial r.

   c) (2 pts.) Determine el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio. Luego, bosqueje el gráfico de la magnitud del potencial eléctrico en función de la distancia radial r.

   d) (1 pto.) Se conectan los dos conductores a través de un cable conductor. Una vez que se restablece el equilibrio, determine la nueva distribución de carga en cada uno de los conductores y el campo eléctrico en todo el espacio.

   e) (1 pto.) ¿Cuánto varía la energía almacenada entre a_2 y b_1 los conductores como consecuencia de la conexión?



Solución:

a) Debido a que en el interior de los conductores el campo eléctrico debe ser nulo y que éstos se encuentran descargados, se puede calcular la carga en cada una de las superficies de tal manera que la carga encerrada sea cero:

- en $r = a_1$ se distribuye una carga total $-q$, el área de esa superficie es $S_1 = 4\pi a_1^2$, por lo que la densidad de carga superficial es $\sigma_{a_1} = \frac{-q}{4\pi a_1^2}$. (0.25 pts.)
- en $r = a_2$ se distribuye una carga total q, el área de esa superficie es $S_2 = 4\pi a_1^2$, por lo que la densidad de carga superficial es $\sigma_{a_2} = \frac{q}{4\pi a_2^2}$. (0.25 pts.)
- en $r = b_1$ se distribuye una carga total $-q$, el área de esa superficie es $S_3 = 4\pi a_1^2$, por lo que la densidad de carga superficial es $\sigma_{b_1} = \frac{-q}{4\pi b_1^2}$. (0.25 pts.)
- en $r = b_2$ se distribuye una carga total q, el área de esa superficie es $S_4 = 4\pi b_2^2$, por lo que la densidad de carga superficial es $\sigma_{b_2} = \frac{q}{4\pi b_2^2}$. (0.25 pts.)

■

b) Para determinar el campo eléctrico en todo el espacio, consideremos la Ley de Gauss.

- Para $r < a_1$ el campo eléctrico corresponde al de una carga puntual q:

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \text{(0.15 pts.)}$$

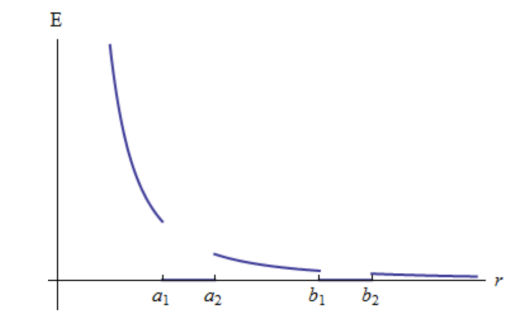
- Para $a_1 < r < a_2$ el campo eléctrico es nulo (interior de un conductor), es decir $\vec{E}_2 = 0$. (0.15 pts.)
- Para $a_2 < r < b_1$, el campo eléctrico corresponde al de una carga puntual q:

$$\vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \text{(0.15 pts.)}$$

- Para $b_1 < r < b_2$ el campo eléctrico es nulo (interior de un conductor), es decir $\vec{E}_4 = 0$. (0.15 pts.)
- Para $r > b_2$ el campo eléctrico corresponde al de una carga puntual q:

$$\vec{E}_5 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \text{(0.15 pts.)}$$

Luego, la gráfica del Campo eléctrico en función de r se ve de la siguiente manera: (0.25 pts.)



■

c) Para determinar el potencial, consideraremos los campos eléctricos calculados previamente y que $V(\infty) = 0$, luego:

- Para $r > b_2$:

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_5 \cdot d\vec{r}$$
$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{(0.35 pts.)}$$

- Para $b_1 < r < b_2$:

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{b_2} \vec{E}_5 \cdot d\vec{r} - \int_{b_2}^{r} \vec{E}_4 \cdot d\vec{r}$$
$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{b_2} \frac{dr}{r^2}$$
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b_2} \quad \text{(0.35 pts.)}$$

- Para $a_2 < r < b_1$:

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{b_2} \vec{E}_5 \cdot d\vec{r} - \int_{b_2}^{b_1} \vec{E}_4 \cdot d\vec{r} - \int_{b_1}^{r} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}$$
$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{b_2} \frac{dr}{r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{b_1}^{r} \frac{dr}{r^2}$$
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{r}\right) \quad \text{(0.35 pts.)}$$

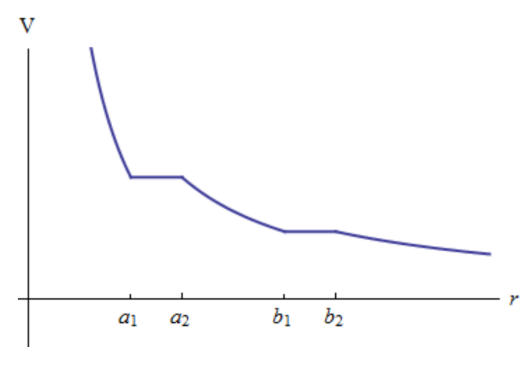
- Para $a_1 < r < a_2$:

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{b_2} \vec{E}_5 \cdot d\vec{r} - \int_{b_2}^{b_1} \vec{E}_4 \cdot d\vec{r} - \int_{b_1}^{a_2} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} - \int_{a_2}^{r} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$
$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{b_2} \frac{dr}{r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{b_1}^{a_2} \frac{dr}{r^2}$$
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{a_2}\right) \quad \text{(0.35 pts.)}$$

- Para $r < a_1$:

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{b_2} \vec{E}_5 \cdot d\vec{r} - \int_{b_2}^{b_1} \vec{E}_4 \cdot d\vec{r} - \int_{b_1}^{a_2} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} - \int_{a_2}^{a_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} - \int_{a_1}^{2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}$$
$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{b_2} \frac{dr}{r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{b_1}^{b_2} \frac{dr}{r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{a_1}^{r} \frac{dr}{r^2}$$
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{r}\right) \quad \text{(0.35 pts.)}$$

Luego, la gráfica del Potencial eléctrico en función de r se ve de la siguiente manera: (0.25 pts.)



■

Solución:

d) Cuando se conectan las dos superficies esféricas se transforman en el mismo conductor. Se produce entonces un flujo de carga. Con esto, la diferencia de potencial entre ambas superficies esféricas debe ser nula. Entonces, el campo eléctrico al interior del conductor (ahora de radio interior a_1 y radio exterior b_2) debe ser nulo. Por lo que en $r = a_2$ y $r = b_1$ no hay cargas (0.25 pts.). Las densidades de cargas en las superficies S_1 (radio a_1) y S_4 (radio b_2) serán:

- en $r = a_1$ se distribuye una carga total $-q$, el área de esa superficie es $S_1 = 4\pi a_1^2$ por lo que la densidad de carga superficial es $\sigma_{a_1} = \frac{-q}{4\pi a_1^2}$. (0.25 pts.)
- en $r = b_2$ se distribuye una carga total q, el área de esa superficie es $S_4 = 4\pi b_2^2$ por lo que la densidad de carga superficial es $\sigma_{b_2} = \frac{q}{4\pi b_2^2}$. (0.25 pts.)

Ahora, el campo eléctrico es tal que para $a_1 < r < b_2$ es nulo, y para $r < a_1$ y $r > b_2$ es

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

■

Solución:

e) La diferencia de energía antes y después de la conexión se puede calcular considerando que la única diferencia es que después de la conexión, en la zona $a_2 < r < b_1$ no existe campo, mientras que antes sí lo había. De esta forma, usando la expresión

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} E^2 d\mathcal{V} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{r_1}^{r_2} 4\pi r^2 E^2 dr\,. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Luego, tenemos

$$U_f - U_i = \left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_{a_2}^{b_1} r^2E^2dr\right)_f - \left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_{a_2}^{b_1} r^2E^2dr\right)_i = -\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_{a_2}^{b_1} r^2E_3^2dr\right)_i = -\frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_{a_2}^{b_1}\frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2r^2}dr$$

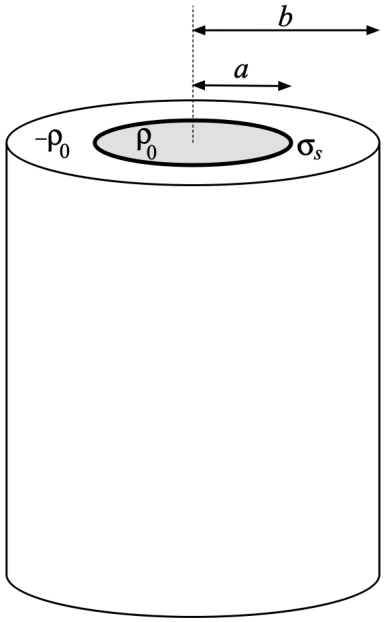
(0.4 pts.)

Entonces,

$$U_f - U_i = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_1}\right) < 0 \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

La variación de energía es negativa, ya que el campo realizó trabajo para mover las cargas. ■

3. Se considera un cilindro no conductor de radio a y longitud infinita, con densidad volumétrica de carga constante y conocida ρ_0. Este cilindro está rodeado por un cascarón cilíndrico no conductor de radio interno a, radio externo b y longitud infinita, con densidad volumétrica de carga $-\rho_0$. Entre ambas distribuciones se inserta, a $r = a$, un cascarón cilíndrico conductor de espesor despreciable y longitud infinita, que separa las cargas del cilindro y del cascarón externo. Suponga que el cascarón conductor posee una distribución de carga superficial homogénea σ_S, que es desconocida.



a) (2 pts.) Calcule el valor que debe tener la densidad superficial σ_S para que el campo eléctrico sea nulo en el exterior del cilindro.

b) (2 pts.) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

c) (2 pts.) Calcule la diferencia de potencial eléctrico entre $r = 0$ y $r = b$.

Solución:

a) Por simetría el campo eléctrico puede escribirse como:

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

Dada esta simetría, podemos usar Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico. Fuera del cilindro ($r > b$) consideremos una superficie gaussiana en forma de cilindro con radio r y altura h:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} (E(r)\hat{r}) \cdot (r d\phi dz \hat{r}) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi h r E(r) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Entonces, si queremos que el campo eléctrico sea nulo en el exterior necesitamos que la carga total encerrada sea 0. (0.5 pts.)

■

La carga total del sistema estará dada por:

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_0 r \, dr \, d\phi \, dz + \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma_s r \, d\phi \, dz + \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (-\rho_0) r \, dr \, d\phi \, dz$$

$$Q_{\text{enc}} = \rho_0 \pi a^2 h + \sigma_s 2\pi a h + (-\rho_0)\pi(b^2 - a^2)h \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

Imponiendo $Q_{\text{enc}} = 0$:

$$\sigma_s = \frac{\rho_0(b^2 - 2a^2)}{2a} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

b) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

- $r < a$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi h r E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho_0 r \, dr \, d\phi \, dz$$

$$2\pi h r E(r) = \frac{\rho_0 \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \hat{r} \qquad \text{(0.7 pts.)}$$

- $a < r < b$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi h r E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_0 r \, dr \, d\phi \, dz + \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma_s a \, d\phi \, dz + \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^r (-\rho_0) r \, dr \, d\phi \, dz \right\}$$

$$2\pi h r E(r) = \frac{\rho_0 \pi a^2 h}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_s 2\pi a h}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 \pi (r^2 - a^2) h}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{\rho_0(2a^2 - r^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma_s a}{\varepsilon_0 r} \right) \hat{r}$$

Si reemplazamos el valor de σ_s encontrado en i):

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0(b^2 - r^2)}{2\varepsilon_0 r} \hat{r} \qquad \text{(0.7 pts.)}$$

- $r > b$

El campo eléctrico es nulo fuera del cilindro, pues se escogió la densidad de carga superficial σ_s para que así ocurra. (0.6 pts.)

■

c) La diferencia de potencial está dada por

$$V(0) - V(b) = -\int_b^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

$$V(0) - V(b) == \int_0^b E(r)dr = \int_0^a \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} dr + \int_a^b \frac{\rho_0 \left(b^2 - r^2\right)}{2\varepsilon_0 r} dr \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Calculemos las integrales:

$$\int_0^a \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} dr = \frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}$$
$$\int_a^b \frac{\rho_0 \left(b^2 - r^2\right)}{2\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left[b^2 \ln \frac{b}{a} - \frac{b^2 - a^2}{2} \right] \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sumando,

$$V(0) - V(b) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left(2a^2 - b^2\right) + \frac{\rho_0 b^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■