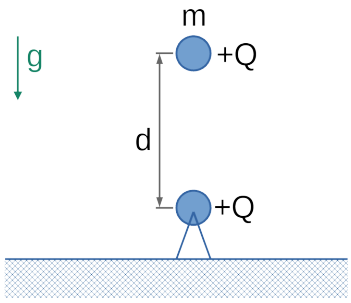
3. Considere una carga $+Q$ que está fija en el suelo. A una altura d por sobre ella yace otra carga $+Q$ de masa m. La carga superior está restringida a moverse solamente en dirección vertical, y se encuentra en reposo por equilibrio de fuerzas. Si $d = 3\text{m}$ y $m = 400\text{k}g$, el valor de Q es:
Nota: considere que $g = 10\,\text{m/s}^2$ y que $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \times 10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2$.



a) $1 \times 10^{-3}\text{C}$

b) $2 \times 10^{-3}\text{C}$

c) $3 \times 10^{-3}\text{C}$

d) $4 \times 10^{-3}\text{C}$

En equilibrio la fuerza eléctrica debe balancear el peso del cuerpo.

$$\frac{kQ^2}{d^2} = mg$$

Despejamos Q,

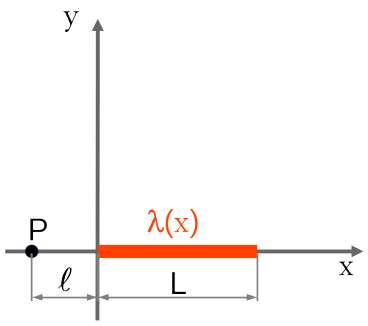
$$Q = d\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Con los datos $d = 3\text{m}$, $m = 400\text{k}g$, $g = 10\,\text{m/s}^2$ y $k = 9 \times 10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2$. Nos queda

$$Q = 3\sqrt{400 \times 109} \times 10^9\text{C} = 2 \times 10^{-3}\text{C}$$

■

4. Considere una barra de longitud L y densidad de carga lineal no uniforme dada por $\lambda(x) = \lambda_0\, x/L$, ubicada horizontalmente entre $x = 0$ y $x = L$, como muestra la figura. Si $\ell = L/6$, el valor del campo eléctrico en el punto $P = (-\ell, 0)$ es:
Nota: $\int \frac{u\,du}{(u+a)^2} = \ln(u+a) + \frac{a}{u+a} + \text{cte}$.



a) $-\frac{k\lambda_0}{L}\left(\ln 4 - \frac{3}{4}\right)\hat{x}$

b) $-\frac{k\lambda_0}{L}\left(\ln 5 - \frac{4}{5}\right)\hat{x}$

c) $-\frac{k\lambda_0}{L}\left(\ln 7 - \frac{6}{7}\right)\hat{x}$

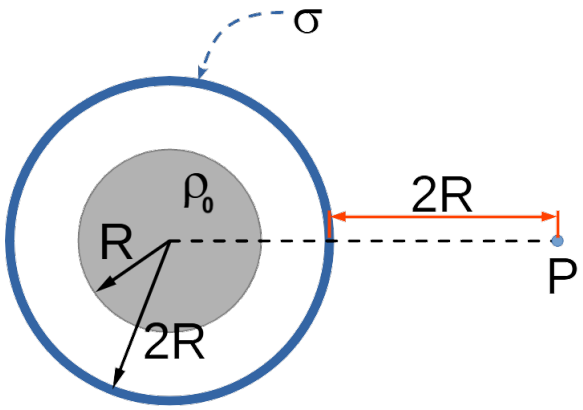
d) $-\frac{k\lambda_0}{L}\left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right)\hat{x}$

Por integracion, el campo electrico sera :

$$\vec{E} = k\int_L dq(r')\frac{(r-r')}{|r-r'|^3} = -k\frac{\lambda_0}{L}\left(\frac{L+\ell}{\ell} - \frac{L}{L+\ell}\right)\hat{x}$$

■

5. En la figura se aprecia una esfera maciza de radio R cuya densidad volumétrica de carga es ρ_0, encerrada por un cascarón esférico concéntrico a ella, de radio $2R$, con grosor de pared despreciable y densidad superficial de carga σ desconocida. Determine el valor de σ, de manera que el campo eléctrico neto en el punto P de la figura sea $(k\pi\rho_0 R/18)\hat{r}$.



a) $-\rho_0 R/12$

b) $-\rho_0 R/18$

c) $-\rho_0 R/30$

d) $-\rho_0 R/36$

Tomemos un cascarón esférico de radio $4R$ para usar la Ley de Gauss. Por simetría esférica $\vec{E} = E\hat{r}$. El flujo sobre la superficie es $4\pi(4R)^2$. La carga encerrada será:

$$q_{enc} = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_0 + 4\pi(2R)^2\sigma\,.$$

Usando la Ley de Gauss el campo nos queda

$$E = \frac{k}{(4R)^2}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho_0 + 4\pi(2R)^2\sigma\right)\,.$$

Pero el campo es conocido. Despejando la densidad de carga tenemos:

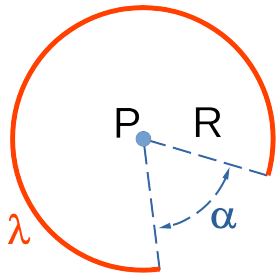
$$\sigma = \frac{E}{k\pi} - \frac{1}{12}R\rho_0\,.$$

Reemplazando E:

$$\sigma = \frac{(k\pi\rho_0 R/18)}{k\pi} - \frac{1}{12}R\rho_0 = -\rho_0 R/36\,.$$

■

6. Considere una barra de densidad de carga lineal λ, doblada siguiendo un arco de circulo de radio R formando un ángulo α entre sus extremos, como se observa en la figura. Si $\alpha = 3\pi/2$, ¿cuál es el valor del potencial eléctrico en el centro de dicho circulo? Suponga que el potencial eléctrico es cero en infinito.



a) $11\pi k\lambda/6$

b) $\pi k\lambda/2$

c) $7\pi k\lambda/4$

d) $3\pi k\lambda/2$

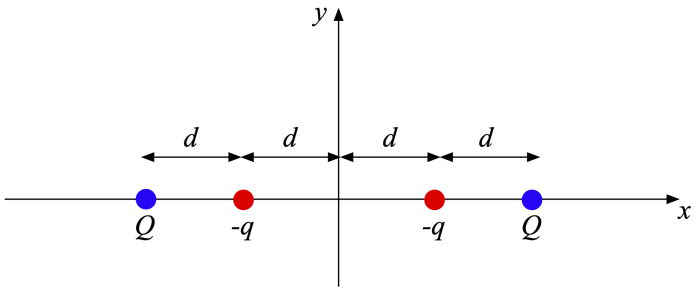
Suponiendo el potencia de referencia en infinito la forma de calcular el potencial en P corresponde a integrar la densidad de carga de la forma:

$$V(P) = k\int \frac{dQ(r')}{r'} = k\int_{\alpha/2}^{2\pi-\alpha/2} \frac{\lambda R d\theta}{R}$$

$$V(P) = k\lambda(2\pi) - \alpha)$$

■

7. Considere el sistema de cargas puntuales de la figura. Si $d = a$, ¿cuál es la energía electrostática (U) almacenada en el sistema? Suponga que la energía electrostática es nula cuando las cargas están separadas una distancia infinita entre ellas.



a) $U = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a} - \frac{qQ}{3\pi\varepsilon_0 a}$

b) $U = \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a} - \frac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 a}$

c) $U = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{2qQ}{3\pi\varepsilon_0 a}$

d) $U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{4qQ}{3\pi\varepsilon_0 a}$

Procedemos a calcular la energía potencial electrostática del sistema mostrado en la figura:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V(\vec{r}_i) \tag{1}$$

$$U = \frac{1}{2}Q\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3d} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4d}\right) \tag{2}$$

$$-\frac{1}{2}q\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 3d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2d} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) \tag{3}$$

$$-\frac{1}{2}q\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3d} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4d}\right) \tag{4}$$

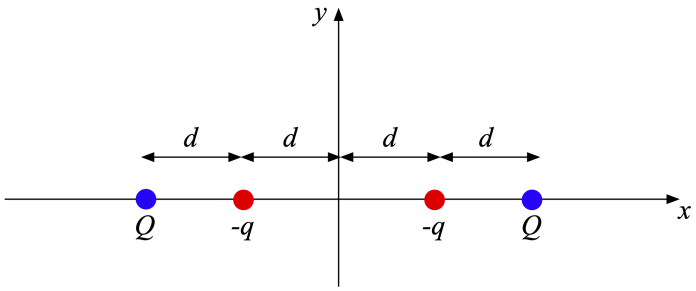
$$+\frac{1}{2}Q\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) \tag{5}$$

Reduciendo términos y reordenando la expresión obtenemos finalmente y considerando que $d = a$

$$U = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{2Qq}{3\pi\epsilon_0 a} \tag{6}$$

■

8. Considere el sistema de cargas puntuales de la figura. Suponga que las cargas $-q$ se mantienen fijas en su posición inicial. Si $d = a$, ¿cuál es el trabajo (W) realizado por la fuerza eléctrica para llevar las cargas Q hasta el infinito desde su posición inicial?



a) $W = \dfrac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 a}$

b) $W = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{2qQ}{3\pi\varepsilon_0 a}$

c) $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{4qQ}{3\pi\varepsilon_0 a}$

d) $W = \dfrac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{qQ}{3\pi\varepsilon_0 a}$

Sabemos del principio de trabajo y energía que $W = -\Delta U$ por lo tanto en este caso $-\Delta U = -U_{inicial} - U_{final}$. El U_{final} está dado por

$$U_{final} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2d} \tag{7}$$

y el $U_{inicial}$ está dado por

$$U = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d} - \frac{2Qq}{3\pi\epsilon_0 d} \tag{8}$$

Por lo tanto el trabajo realizado por una fuerza externa para llevar las cargas hacia el infinito desde su configuración inicial y considerando $d = a$ es:

$$W = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a} - \frac{2}{3}\frac{Qq}{\pi\epsilon_0 a} \tag{9}$$

■