Electricidad y Magnetismo - FIS1533

Interrogación 2

Martes 15 de Mayo de 2012

PROFESORES: María Cristina Depassier, Max Bañados y Sebastián A. Reyes

---

Instrucciones

-Tiene dos horas para resolver los siguientes problemas.

-Sea claro y ordenado.

-Escriba los resultados finales de cada problema con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.

-Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

Problema 1

Tres placas conductoras perfectas, idénticas, planas y de área A se disponen en forma paralela como se muestra en la figura. La distancia entre las placas 1 y 2 es d, mientras que la distancia entre 2 y 3 es $2d$. Una fem de magnitud V_0 se conecta entre las placas superior e inferior.

Supongamos primero que el espacio entre las placas se encuentra vacío:

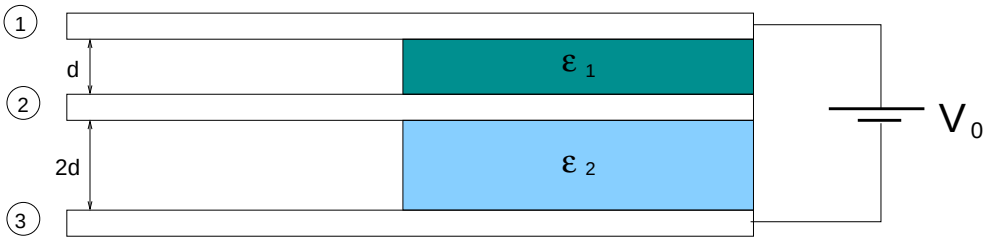
(a) Determine la capacidad equivalente C_{eq} entre los terminales 1 y 3. (1,5 ptos.)

(b) Encuentre la densidad de carga σ inducida en la parte inferior de 2 y la caída de potencial entre 2 y 3 (V_{23}). (1,5 ptos.)

Supongamos ahora que la mitad del espacio entre las placas se llena con un dieléctrico de permitividad ϵ_1 para 1-2 y ϵ_2 para 2-3 (ver figura):

(c) Determine la capacidad equivalente C'_{eq} entre los terminales 1 y 3. (1,5 ptos.)

(d) Encuentre la densidad de carga de polarización σ_P en la cara inferior del dieléctrico ubicado entre 2 y 3. (1,5 ptos.)



Problema 2

El núcleo conductor de radio a de un cable cilíndrico coaxial de largo L está rodeado por una capa de conductividad σ_1 (o g_1 en otra notación) de radio interior a y radio exterior b y por una segunda capa con conductividad σ_2 (g_2) de radio interior b que se extiende hasta el conductor exterior de radio c.

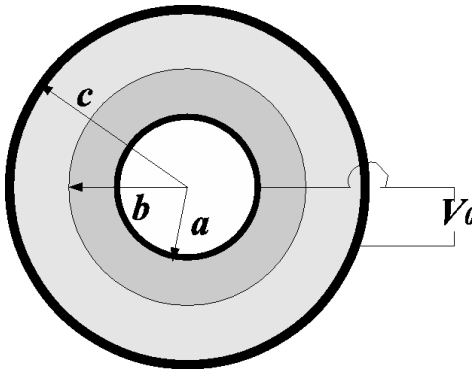
(a) Calcule la resistencia entre el núcleo y el conductor externo. (1,5 ptos.)

Se aplica una diferencia de potencial V_0 entre el conductor exterior y el interior. Una vez alcanzado el régimen estacionario,

(b) Calcule la densidad de corriente $\vec{j}$ en cada región. Para esto suponga que el conductor interior está a potencial más alto que el exterior. (2 ptos.)

(c) Calcule la corriente I que circula. (1,5 ptos)

(d) Calcule la carga libre que se acumuló en la interfaz entre los dos conductores. (1 pto.)



Problema 3

El circuito que se muestra en la figura se ha mantenido con el interruptor S abierto mucho tiempo.

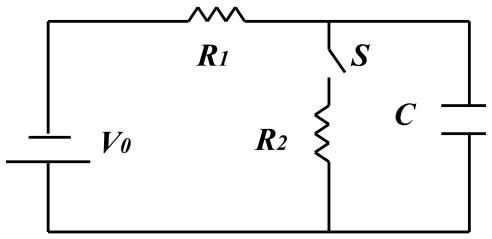
(a) Calcule la carga que tiene el condensador. ¿Qué corriente circula por R_1? (1,5 ptos)

En $t = 0$ se cierra el interruptor:

(b) Después de mucho tiempo ($t \to \infty$), ¿qué carga tendrá el condensador? (1,5 ptos)

(c) Después de mucho tiempo ($t \to \infty$), ¿qué corriente circulará por R_1? y por R_2? (1 pto.)

(d) Usando las Leyes de Kirchoff obtenga las ecuaciones necesarias para resolver completamente el circuito (para $t > 0$). Use estas ecuaciones para calcular la corriente en el condensador en función del tiempo $I_C(t)$. (2 ptos.)



Solución

Problema 1

(a) Primero, recordemos que la capacidad de un condensador de placas paralelas de área A y que se encuentran a una distancia d es

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

Cuando tenemos tres placas paralelas el sistema corresponde a dos condensadores conectados en serie. Es decir,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{\epsilon_0 A} + \frac{2d}{\epsilon_0 A} \quad \rightarrow \quad C_{eq} = \frac{\epsilon_0 A}{3d}.$$

(b) Sabemos que la carga inducida en la cara inferior de la placa 1 al conectar la fem será,

$$Q = C_{eq} V_0 = \frac{\epsilon_0 A V_0}{3d}.$$

Ahora, sabemos que la carga en la parte superior de la placa 2 debe ser entonces $-Q$. Por último, como la placa 2 es neutra la carga de su cara inferior de be ser Q. Finalmente la densidad de carga pedida es

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{\epsilon_0 V_0}{3d}.$$

(c) Al insertar los trozos de dieléctrico las capacidades entre 1 y 2 y entre 2 y 3 se componen de dos condensadores de dos condensadores de área $A/2$ conectados en paralelo. Tenemos,

$$C_1' = \frac{\epsilon_0 A/2}{d} + \frac{\epsilon_1 A/2}{d} = \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1)A}{2d}; \qquad C_2' = \frac{\epsilon_0 A/2}{2d} + \frac{\epsilon_2 A/2}{2d} = \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_2)A}{4d}.$$

Como a su vez estos dos condensadores están conectados en serie tenemos,

$$\frac{1}{C_{eq}'} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_2'} = \frac{2d}{(\epsilon_0 + \epsilon_1)A} + \frac{4d}{(\epsilon_0 + \epsilon_2)A} \quad \rightarrow \quad C_{eq}' = \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1)(\epsilon_0 + \epsilon_2)A}{2d(3\epsilon_0 + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

(d) Para encontrar la densidad de carga de polarización es necesario encontrar la polarización ya que

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n},$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie del dieléctrico. Para obtener $\vec{P}$ conviene calcular primero $\vec{E}$ y usar luego la relación

$$\vec{P} = \chi \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$$

donde χ es la susceptibilidad del dieléctrico. Entre las placas 2 y 3 sabemos que el campo eléctrico es uniforme y es el mismo en las zonas con o sin dieléctrico. La forma más simple de obtener la magnitud del campo eléctrico es calculando primero la caida de potencial V_2' entre las placas 2 y 3.

$$V_2' = \frac{Q'}{C_2'} = \frac{C_{eq}' V_0}{C_2'} = \frac{2(\epsilon_0 + \epsilon_1)V_0}{(3\epsilon_0 + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

Entonces,

$$\vec{E_2} = \frac{V_2'}{2d}\hat{n} = \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1)V_0}{d(3\epsilon_0 + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)}\hat{n} \quad \rightarrow \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)(\epsilon_0 + \epsilon_1)V_0}{d(3\epsilon_0 + 2\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

Problema 2

(a) Integrando pequeñas capas de espesor dr y área A podemos obtener la resistencia entre a y b:

$$R_1 = \int_a^b dR = \int_a^b \frac{dr}{\sigma_1 L 2\pi r} = \frac{\ln(b/a)}{\sigma_1 2\pi L}.$$

De la misma forma podemos obtener la resistencia entre b y c,

$$R_2 = \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2 2\pi L}.$$

La resistencia total corresponde entonces a estas dos resistencias conectadas en serie:

$$R_T = R_1 + R_2 = \frac{\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)}{\sigma_1 \sigma_2 2\pi L}.$$

(c) (Conviene resolver esta parte antes que la parte (b).) Usando la Ley de Ohm obtenemos direstamente que la corriente total que circula es:

$$I = \frac{V_0}{R_T} = \frac{V_0 \sigma_1 \sigma_2 2\pi L}{\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)}.$$

(b) La densidad de corriente apunta en la dirección radial y su magnitud corresponde a la corriente total I dividida por el área de un manto cilíndrico de radio r y largo L. Tenemos entonces,

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{2\pi L r}\hat{r} = \frac{V_0 \sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b))r}\hat{r}$$

(d) Por continuidad de la corriente sabemos que la densidad de corriente en un radio que se encuentra justo antes y justo después de la interfaz ($r = b$) deben ser idénticas. Es decir,

$$\sigma_1 \vec{E_1}(b) = \sigma_2 \vec{E_2}(b)$$

Esta ecuación nos dice que el campo eléctrico es discontínuo en $r = b$. Si calculamos el campo eléctrico usando la Ley de Gauss vemos que esta discontinuidad se debe una capa de carga con densidad σ. Es decir,

$$E_2(b) - E_1(b) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \vec{E_2}(b).$$

Pero sabemos que

$$\vec{E_2}(b) = \frac{|\vec{J}(b)|}{\sigma_2} = \frac{V_0 \sigma_1}{(\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b))b}.$$

Finalmente tenemos entonces,

$$\sigma = \frac{\epsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)V_0}{(\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b))b}.$$

Problema 3

a) Si el circuito ha estado abierto mucho tiempo circuló corriente por R_1 y por el condensador hasta que este se cargó completamente. Una vez cargado ya no circula mas corriente.

La respuesta a la pregunta es entonces

$$\boxed{Q = CV_0, \qquad I_c = 0}.$$

Si se cierra el interruptor, después de mucho tiempo circulará corriente I_f por R_1 y por R_2 y no circulará corriente por el condensador, el que habrá quedado cargado al potencial $I_f R_2$. Por lo tanto la respuesta a la letra c) es

c)

$$\boxed{I_f = \frac{V_0}{R_1 + R_2}}$$

y la respuesta a b) es

b)

$$\boxed{Q_f = CI_f R_2 = \frac{CR_2 V_0}{R_1 + R_2}}$$

d) Llamemos I a la corriente que pasa por la batería y por R_1, I_2 e I_c a la corriente que pasa por R_2 y por el condensador respectivamente. Inicialmente el condesador tiene carga CV_0.

Las ecuaciones del circuito son

$$V_0 - R_1 I - R_2 I2 = 0 \tag{1}$$

$$R_2 I_2 - \frac{Q}{C} = 0 \tag{2}$$

$$I_c = \frac{dQ}{dt} \tag{3}$$

$$I = I_2 + I_c \tag{4}$$

Combinado las ecuaciones (1-4) obtenemos una ecuación para $Q(t)$

$$\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)\frac{Q}{C} = \frac{V_0}{R_1}$$

cuya solución que satisface la condición inicial $Q(t=0) = CV_0$ es

$$\boxed{Q(t) = \frac{CV_0 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{CV_0 R_1}{R_1 + R_2}\exp[-(R_1 + R_2)t/(R_1 R_2 C)]}$$

Vemos que se verifica que cuando $t \to \infty$ la carga tiende a la respuesta de b).

La corriente por el condensador es

$$\boxed{I_c = \frac{dQ}{dt} = -\frac{V_0}{R_2}\exp[-(R_1 + R_2)t/(R_1 R_2 C)]}$$

donde el signo "muestra que va en el sentido opuesto a lo que suosimos al escribir las ecuaciones (1-4). Esta corriente tiende a cero cuando el tiempo se va a infinito, por lo que de (4) vemos que I_2 tiende a I y de (1) vemos que en ese caso se reobtiene la respuesta que dimos a c).