Parte III

El campo en medios materiales

Capítulo 10

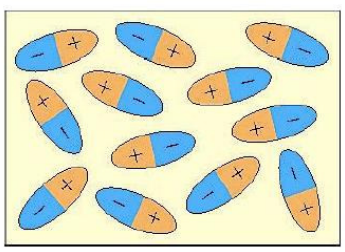
Dieléctricos

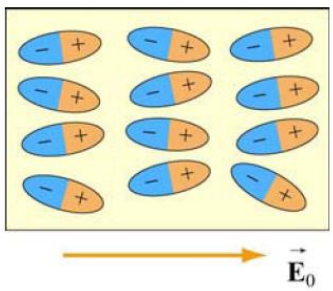
10.1. El campo en medios Dieléctricos

Aquí comenzamos a discutir otra de las propiedades interesantes de la materia bajo la influencia de un campo eléctrico. Anteriormente consideramos el comportamiento de los conductores, en donde hay cargas libres para moverse en respuesta a un campo eléctrico de forma de cancelar el campo en el interior del conductor. Ahora discutiremos qué sucede con los aislantes, materiales que no conducen electricidad. Uno podría creer primeramente que no debería haber efecto alguno, sin embargo, usando un condensador de placas paralelas, **Faraday** descubrió que ésto no es así. Sus experimentos mostraron que la capacidad aumenta en un factor κ que depende únicamente de la naturaleza del material asilante. Éstos materiales también son llamados dieléctricos, el factor κ es una propiedad del dieléctrico (y se llama constante dieléctrica). La constante dieléctrica del vacío es, por supuesto, 1. A continuación se derivará el comportamiento de un dieléctrico en un campo externo y se aplicará al cálculo de capacidades con dieléctricos.

Todos los medios materiales se componen de moléculas, las que a su vez se componen de entes cargados (núcleos atómicos y electrones), y las moléculas de los dieléctricos son, de hecho, afectadas por la prescencia de un campo eléctrico externo. El campo eléctrico produce una fuerza que se ejerce sobre cada partícula cargada, empujando las partículas positivas en la dirección del campo, y las negativas en sentido opuesto, de modo que las partes positivas y negativas de cada molécula se desplazan de sus posiciones de equilibrio, sin embargo estas cargas moleculares no están libres para moverse muy lejos o ser extraídas del material (lo que sí ocurre en conductores).

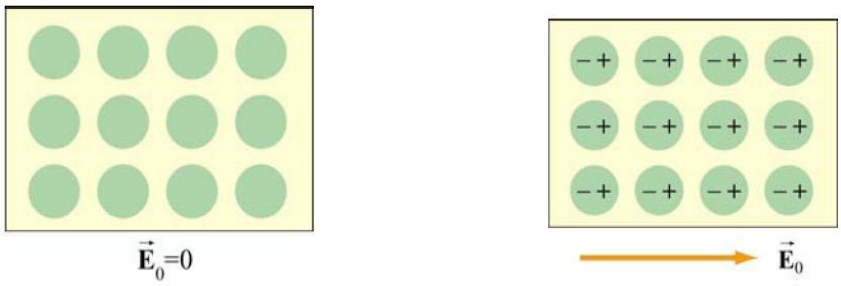
El efecto total, desde el punto de vista macroscópico, se visualiza como un desplazamiento de toda la carga positiva en el dieléctrico en relación a la carga negativa (Se produce una colección de dipolos!). A esto se le llama **polarización**. Existen 2 tipos de dieléctricos, unos son los dieléctricos polares, que tienen momentos dipolares permanentes. Un ejemplo de este tipo de dieléctrico es el agua.





La orientación de las moléculas polares ante la ausencia de un campo es totalmente aleatoria. Cuando un campo $\vec{E}_0$ es aplicado, un torque causa que las moléculas se alinien en la dirección de $\vec{E}_0$. (ver último problema de ayudantía 9)

El otro tipo de dieléctrico son los no polares, que no poseen momentos dipolares permanentes, pero que de igual forma se polarizan ante un campo eléctrico externo. Las moleculas polarizadas son como dipolos y se alinean en la dirección del campo.



La figura ilustra la orientacion de las moléculas no polares con y sin campo externo $\vec{E}_0$. En ambos tipos de dieléctricos, ante la prescencia de un campo eléctrico externo, se produce una polarización. Un dieléctrico polarizado, aun cuando sea eléctricamente neutro en promedio, produce un campo eléctrico en los puntos exteriores e interiores al dieléctrico.

10.1.1. Polarización

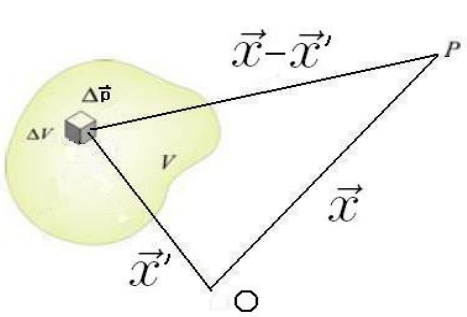
Vimos que si un medio se polariza, se efectúa una separación de cargas positivas y negativas, y un elemento de volumen se caracterizará entonces por un momento dipolar eléctrico, $\Delta\vec{p}$. Se define $\vec{P}$, el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta v}$$

Estrictamente, $\vec{P}$ debe definirse como el límite de esta cantidad a medida que Δv se hace muy pequeño desde el punto de vista macroscópico. De esta forma, $\vec{P}$ se convierte en una función puntual $\vec{P}(x, y, z)$, llamada Polarización del medio (Es, de hecho, un campo vectorial). Sus dimensiones son carga por unidad de área.

10.1.2. Campo de un Medio Dieléctrico

Consideremos un pedazo finito de dieléctrico polarizado, es decir, que se caracterize en cada punto $\vec{x}'$ por su polarización $\vec{P}(\vec{x}')$. La polarización da origen a un campo eléctrico. Para encontrarlo, encontremos primero el potencial en un punto P.



Cada elemento de volumen d^3x' se comporta como un dipolo microscópico, y entonces se caracteriza por un momento dipolar $\Delta\vec{p}(\vec{x}') = \vec{P}(\vec{x}')d^3x'$, y como la distancia entre $\vec{x}$ y d^3x' es grande comparada con las dimensiones de d^3x', el potencial en $\vec{x}$ será

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{\Delta\vec{p}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = \frac{P(\vec{x}')\cdot(\vec{x}-\vec{x}')d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

(Recordar el potencial de un dipolo!). El potencial en el punto $\vec{x}$ se obtiene sumando las contribuciones de todas las partes del dieléctrico, luego

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{d^3x'\vec{P}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Esta integral puede evaluarse directamente si se conoce la forma funcional de $\vec{P}(\vec{x}')$. En la práctica eso no se hace, resulta ventajoso desarrollar aún más esta expresión. Usando la ya conocida identidad

$$\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

El potencial queda

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V d^3x'\vec{P}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

El siguiente paso consiste en utilizar la siguiente identidad

$$\vec{\nabla}'\cdot(f\vec{F}) = f\vec{\nabla}'\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}'f$$

Donde f es cualquier función escalar y $\vec{F}$ un campo vectorial. Con esto, si utilizamos $f = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ y $\vec{F} = \vec{P}(\vec{x}')$

$$\vec{P}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{x}')$$

Con esto

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V d^3x'\vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V d^3x'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{x}')$$

La primera integral puede transformarse en una integral sobre una superficie cerrada mediante el teorema de la divergencia, obteniendo

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

O, equivalentemente

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S dS(\vec{x}') \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot \hat{n}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Las cantidades $\vec{P}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x})$ y $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x})$ son dos funciones escalares obtenidas a partir de la polarización $\vec{P}(\vec{x})$. Es conveniente asignar a estas cantidades símbolos especiales, y como tienen dimensiones de carga por unidad de área y carga por unidad de volumen, respectivamente, escribiremos

$$\sigma(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x})$$

$$\rho(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x})$$

Y llamaremos a σ y ρ **densidades de carga de polarización**. La densidad superficial de carga de polarización está dada por la componente de polarización normal a la superficie, y la densidad volumétrica de carga de polarización es una medida de la no uniformidad de la polarización dentro del material.

En resumen, el potencial debido al material dieléctrico es, finalmente

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S dS(\vec{x}') \frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

De esta expresión es evidente que proviene de una distribución de carga. En otras palabras, el material dieléctrico se ha sustituido por una distribución adecuada de carga de polarización. El campo eléctrico se obtiene usando el hecho $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S dS(\vec{x}') \frac{\sigma(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Notemos que la carga de polarización total de un cuerpo dieléctrico es

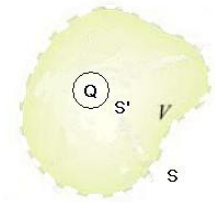
$$Q_p = \iiint_V d^3x' (-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')) + \oiint_{S(V)} dS(\vec{x}') \vec{P}(\vec{x}') \cdot \hat{n}(\vec{x}')$$

Utilizando el teorema de la divergencia, es evidente que $Q_p = 0$, (como debe ser!) Esto concuerda con que un dieléctrico, como un todo, es eléctricamente neutro.

10.2. Ley de Gauss en un Dieléctrico, Desplazamiento Eléctrico

Es sabido que una de las leyes fundamentales de la electrostática es la ley de Gauss. Esta ley dice que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada por la superficie. Al aplicar la ley de Gauss a una región que contiene cargas

libres dentro de un dieléctrico, hay que tener cuidado en incluír todas las cargas dentro de la superficie gaussiana, tanto la **carga de polarización** como la carga libre



Consideremos una superficie S cerrada imaginaria colocada dentro de un medio dieléctrico. Consideremos cierta cantidad de carga libre Q, contenida en el volumen limitado por S'. La ley de Gauss entrega

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{S'} dS(\vec{x}')\sigma(\vec{x}') + \frac{1}{\epsilon_0} \iiint d^3x' \rho(\vec{x}')$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{S'} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') - \frac{1}{\epsilon_0} \iiint d^3x' \vec{\nabla}' \vec{P}(\vec{x}')$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{S'} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') - \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{S+S'} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

Así

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{S} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

Equivalentemente

$$\epsilon_0 \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = Q - \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}')$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \left(\epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}') + \vec{P}(\vec{x}')\right) = Q$$

Se define el **Desplazamiento eléctrico** como

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x})$$

La ley de Gauss, en términos de $\vec{D}$ queda

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = Q = \iiint_{S(V)} d^3x' \rho_{libre}(\vec{x}')$$

Esta es la **Ley de Gauss generalizada a un dieléctrico**, notar que Q representa únicamente la carga libre, es decir, toda la información sobre la polarización del medio se encuentra contenida en $\vec{D}(\vec{x}')$. Notar que si no hay dieléctrico (espacio vacío), se tiene $\vec{P}(\vec{x}) = 0$, $\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x})$ y

$$\epsilon_0 \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = Q$$

que es la ley de Gauss usual para el vacío.

10.3. Forma diferencial de la Ley de Gauss General

A partir de la ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \iiint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Aquí, $\rho(\vec{x}')$ representa la densidad volumétrica de carga libre. Utilizando el teorema de la divergencia

$$\iiint_{V(S)} d^3x' \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \iint_{V(S)} d^3x' \rho(\vec{x}')$$

De donde se obtiene la forma diferencial de la ley de Gauss general

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \rho(\vec{x}')$$

Esta es la primera ecuación de Maxwell reescrita para un medio material. Notar que la definición del vector $\vec{D}$ tiene la ventaja de conservar como fuentes únicamente las cargas **libres**. El efecto de las cargas de polarización están contenidas en $\vec{D}$.

10.4. Susceptibilidad Eléctrica y constante Dieléctrica

Para la mayoría de los materiales, $\vec{P}(\vec{x})$ se anula cuando $\vec{E}(\vec{x})$ se anula. Como éste es el comportamiento más común, nos limitaremos a los materiales de este tipo. Además, si el material es isotrópico, la polarización deberá tener el mismo sentido que el campo eléctrico que la provoca. Esto se resume en

$$\vec{P}(\vec{x}) = \chi(E)\vec{E}(\vec{x})$$

Donde la cantidad escalar $\chi(E)$ se llama **susceptibilidad** eléctrica del material. Así, una expresión para $\vec{D}(\vec{x})$ en medios isotrópicos sería

$$\vec{D}(\vec{x}) = (\epsilon_0 + \chi(E))\vec{E}(\vec{x}) = \epsilon(E)\vec{E}(\vec{x})$$

Donde $\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E)$ es la **permitividad del material**. Experimentalmente χ y ϵ son independientes del campo eléctrico para campos no muy intensos. En otras palabras, χ y ϵ pasan a ser constantes características del material. Materiales de este tipo se llaman **dieléctricos lineales**, y se tiene

$$\vec{P}(\vec{x}) = \chi\vec{E}(\vec{x})$$

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon\vec{E}(\vec{x})$$

Es más conveniente trabajar con una cantidad adimensional, κ, definida por

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

Esta constante se llama **constante dieléctrica**, de manera que

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon\vec{E}(\vec{x}) = \epsilon_0\kappa\vec{E}(\vec{x})$$

Notar que κ es siempre mayor que 1, excepto en el vacío, donde $\kappa = 1$. La primera ecuación de Maxwell en este tipo de medios queda

$$\vec{\nabla} \cdot E(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon} = \frac{\rho(\vec{x})}{\kappa\epsilon_0}$$

Eso significa que en un medio dieléctrico, **el campo eléctrico es debilitado por un factor** κ.

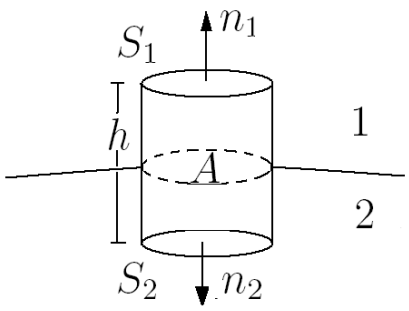
10.5. Condiciones de borde en la frontera

Las condiciones que deben satisfacer el campo eléctrico en una zona interfacial que separa dos madios dieléctricos se deducen a partir de las leyes diferenciales

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

En cualquier zona interfacial entre dos medios se puede construír una superficie cilíndrica como se muestra en la figura



Integrando la ley de Gauss general sobre el volumen limitado por el cilindro se obtiene

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

$$\oiint_{V(S)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \iint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

si $h \to 0$, entonces

$$(D_{1n} - D_{2n})\, A = \sigma A$$

donde A es la superficie de las tapas, y σ es la densidad superficial de carga en la frontera que divide a los dos medios. Así, la componente normal del campo $\vec{D}(\vec{x})$ es discontinua al atravesar una superficie cargada

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

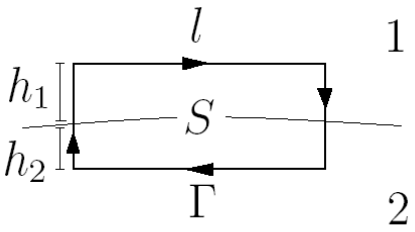
o, equivalentemente para medios lineales

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

Ahora veremos que la componente tangencial del campo eléctrico es continua. A partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Integremos esta ecuación sobre una superficie plana rectangular como la de la figura



El contorno de S es el camino Γ indicado en la figura. Utilizando el teorema de Stokes

$$\iint_S d\vec{S}(\hat{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x})\right) = \oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

En el caso en que $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$

$$lE_{1t} - lE_{2t} = 0$$

De aquí se deduce que la componente **tangencial** de $\vec{E}(\vec{x})$ debe ser continua al atravesar una interfaz entre dos medios

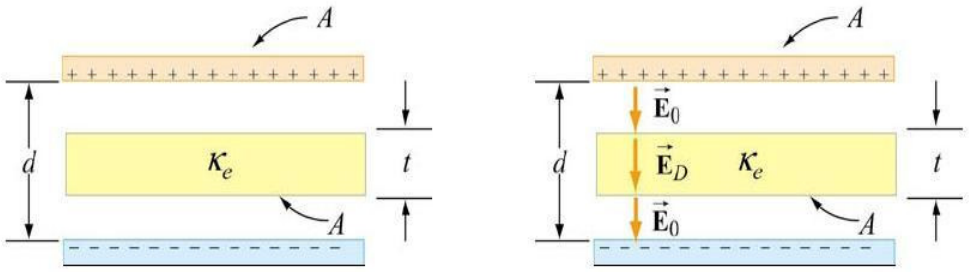
$$lE_{1t} = lE_{2t}$$

En resumen, al atravesar una interfaz entre dos medios (1 y 2), los campos $\vec{E}(\vec{x})$ y $\vec{D}(\vec{x})$ satisfacen

$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

10.5.1. Condensadores con Dieléctricos

Un material no conductor, ancho t, área A y constante dieléctrica κ se inserta en el espacio entre placas de un condensador con distancia d entre placas, carga Q y área A. No es necesario que el dieléctrico esté en la mitad del espacio entre placas



Para encontrar la capacitancia, calculemos primero la diferencia de potencial entre placas. Ya se vió que en auscencia de dieléctrico, el campo eléctrico entre las placas está dado por $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$, y entonces $E_D = \frac{E_0}{k}$. El potencial se puede encontrar integrando el campo eléctrico sobre una curva vertical desde la placa superior a la inferior

$$\Delta\phi = -\int_{+}^{-} dxE = -phi_0 + phi_D = -E_0(d-t) - E_D t = -\frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) - \frac{Q}{A\epsilon_0\kappa}t$$

$$\Delta\phi = -\frac{Q}{A\epsilon_0}(d - t(1 - \frac{1}{\kappa}))$$

Con esto se obtiene

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d - t(1 - \frac{1}{\kappa})}$$

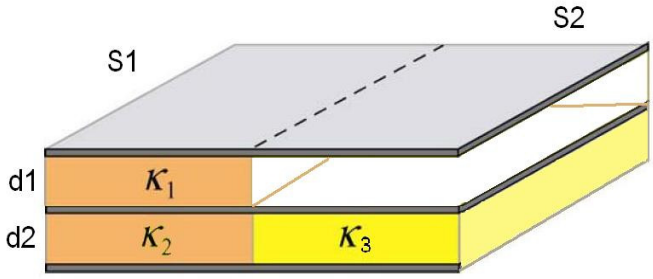
Notemos algunos límites, por ejemplo cuando $t \to 0$, es decir, cuando el ancho del dieléctrico tiende a cero, se obtiene $C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = C_0$, que es la capacidad esperada para cuando no hay dieléctrico.
Cuando $\kappa = 1$, nuevamente se obtiene $C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = C_0$, ya que al ser $\kappa = 1$, el dieléctrico es simplemente vacío.
En el límite cuando $t \to d$, el espacio está totalmente lleno de dieléctrico, y se tiene

$$C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} = \kappa C_0$$

Es decir, un condensador lleno de dieléctrico aumenta su capacidad en el factor κ!

Problema

Calcular la capacidad del condensador de la figura



Solución

El problema se puede tratar como 2 condensadores en paralelo, uno formado por los dieléctricos de constante κ_1 y κ_2, y el otro formado por dieléctrico de constante κ_3 y vacío.
El primer condensador (C_1), se puede ver como 2 condensadores en serie, llenos de los dieléctricos 1 y 2, así

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_1''}$$

Con

$$C_1' = \frac{\kappa_1 \epsilon_0 S_1}{d_1}$$

$$C_1'' = \frac{\kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_2}$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{d_1}{\kappa_1 \epsilon_0 S_1} + \frac{d_2}{\kappa_2 \epsilon_0 S_1}$$

De donde se obtiene

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1}$$

Para el condensador C_2, se procede de manera similar, esto es

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_2''}$$

Donde

$$C_2' = \frac{\epsilon_0 S_2}{d_1}$$

$$C_2'' = \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_2}$$

Donde se obtiene

$$C_2 = \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_1 \kappa_3 + d_2}$$

Finalmente, como C_1 y C_2 están en paralelo, la capacidad total será

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \epsilon_0 S_1}{d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1} + \frac{\kappa_3 \epsilon_0 S_2}{d_1 \kappa_3 + d_2}$$

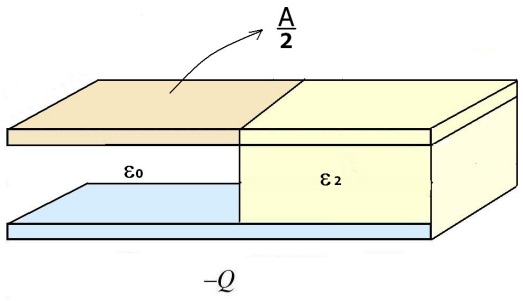
Problema

Se tiene un condensador plano de área A en el vacío, y se carga con una batería. El condensador obtiene una carga Q. Luego, se desconecta de la batería y se llena la mitad del espacio entre placas con un dieléctrico de permitividad ϵ_2. Calcular

a) la nueva diferencia de potencial entre las placas

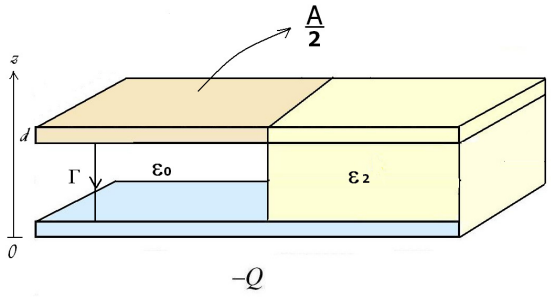
b) las densidades superficiales de carga en cada placa

c) las densidades de carga de polarización del dieléctrico



Solución

Sea el origen en un punto sobre la placa inferior. Se define el eje z como vertical y positivo hacia arriba. Si escogemos un camino de integración Γ como una línea recta vertical desde la placa superior hasta la inferior



podemos obtener la diferencia de potencial entre las placas como

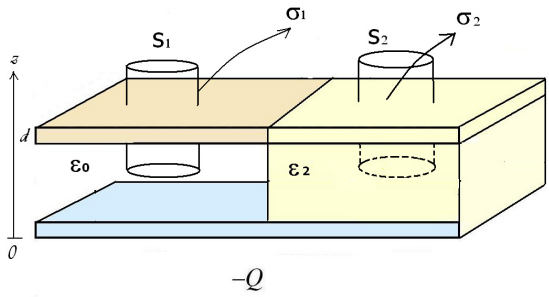
$$\phi_d - \phi_o = V = \int_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_d^0 d\vec{x}\vec{E}(\vec{x})$$

Despreciando efectos de borde, el campo debe ser uniforme en la región interior, y además apunta según $-\hat{k}$. Ojo con la parametrización! se tiene $l = d - t$, con $t = 0...d$. De esta forma $dl = -dt$ y $d\vec{l} = dt\hat{k}$,luego

$$V = \int_d^0 d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = -E \int_d^0 dt = Ed$$

Luego $E = \frac{V}{d}$

La curva Γ fue escogida de manera arbitraria,y se podría haber escogido en la mitad donde se encuentra el dieléctrico, sin embargo la diferencia de potencial entre las placas debe ser la misma para ambos caminos de integración. Lo que esto significa es que el campo eléctrico debe ser igual tanto en el vacío como en la región con dieléctrico. La única forma de que esto sea posible es que se distribuyan densidades de carga superficial en los conductores, digamos σ_1 y σ_2 no necesariamente iguales entre sí.



ahora, sabemos que en la región 1

$$D_1 = \epsilon_1 E = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

y para la región 2

$$D_2 = \epsilon_2 E = \epsilon \frac{V}{d}$$

Además, utilizando la ley de Gauss con las superficies S_1 y S_2 de la figura:

$$\oiint_S d\vec{S} \cdot \vec{D}_1 = D_1 S = \sigma_1 S$$

luego

$$D_1 = \sigma_1 = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

Equivalente, para la región 2 se obtiene de forma análoga

$$D_2 = \sigma_2 = \epsilon \frac{V}{d}$$

Además, como la carga Q en la placa superior sólo se distribuye, la ley de continuidad establece

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{A}{2} = Q = (\epsilon + \epsilon_0)\frac{V}{d}\frac{A}{2} = Q$$

de aquí obtenemos la diferencia de potencial entre las placas del condensador

$$V = \frac{2Qd}{A(\epsilon + \epsilon_0)}$$

Notar que si $\epsilon = \epsilon_0$ (y entonces el material dieléctrico es el vacío) el potencial es simplemente el potencial inicial

$$V = \frac{Qd}{A\epsilon_0} = \frac{Q}{C} = V_o$$

b) Las densidades de carga superficial están dadas por

$$\sigma_1 = \epsilon_0 \frac{V}{d} = \frac{\epsilon_0 2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)}$$

$$\sigma_2 = \epsilon \frac{V}{d} = \frac{\epsilon 2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)}$$

Notar que

$$\sigma_1 \frac{A}{2} + \sigma_2 \frac{A}{2} = Q$$

c) Calculemos ahora las densidades de polarización. Necesitamos encontrar σ_P y ρ_P en el material dieléctrico. Tenemos que

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\chi \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Ahora, en todos los puntos en el dieléctrico no hay densidad de carga libre, luego, de la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho = 0$$

y como $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

Esto es válido en todos los puntos interiores al dieléctrico. Con esto

$$\rho_P = 0$$

Ahora, para obtener la densidad de carga superficial, se tiene

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie del dieléctrico.

Recordar que

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P$$

Luego

$$(\epsilon - \epsilon_0) E = P$$

Ahora, en la superficie superior del dieléctrico se tiene $\hat{n} = \hat{k}$ y

$$\vec{E} = -\frac{2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)} \hat{k}$$

Luego

$$\sigma_P = -\frac{2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)} (\epsilon - \epsilon_0)$$

Y la densidad en la placa inferior será, simplemente

$$-\sigma_P = \frac{2Q}{A(\epsilon + \epsilon_0)} (\epsilon - \epsilon_0)$$

se verifica que la carga total de polarización es cero

Problema

Una esfera de radio R con carga libre q está sumergida en un medio dieléctrico homogéneo de constante κ y de extensión teóricamente infinita. Calcular

a) Los vectores campo eléctrico y polarización a distancia r de la carga puntual

b) La densidad de carga de polarización

Solución

a) Debido a que $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$ son todos paralelos entre sí en cada punto, y por la simetría esférica, la naturaleza radial del campo no cambia por la prescencia del medio dieléctrico. Además, estos vectores pueden depender sólo de la distancia al centro de la esfera y no de alguna coordenada angular.

Usando la ley de gauss general, con una superficie esférica de radio r $(r > R)$ concéntrica a la esfera de carga q

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = q$$

$$\oiint_S dSD(r) = q \rightarrow D(r) \oiint_S dS(\vec{x}') = q$$

Con lo que

$$4\pi r^2 D(r) = q$$

$$\vec{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

El campo eléctrico y la polarización pueden evaluarse con bastante facilidad al conocer $\vec{D}$

$$\vec{D}(r) = \kappa\epsilon_0\vec{E}(r) \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

además

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x})$$

$$\vec{P}(r) = (\epsilon - \epsilon_0)\,\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} - \epsilon_0\frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\hat{r} =$$

$$\vec{P}(r) = \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa r^2}\hat{r}$$

b) Claramente el dieléctrico ha debilitado la magnitud del campo eléctrico (en comparación al espacio vacío). El campo eléctrico es originado por toda la carga, la de polarización y la carga libre. La carga libre es sólo la carga de la esfera q. Sin embargo, la carga de polarización se forma de dos contribuciones, una densidad volumétrica $\rho_P(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x})$ y una densidad superficial $\sigma_P(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x})\cdot\hat{n}(\vec{x})$ sobre la superficie del dieléctrico en contacto con la carga puntual.

Es claro que en todos los puntos del dieléctrico

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = 0$$

y entonces

$$\rho_P(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x}) = 0$$

Usando que

$$\vec{P}(r) = \frac{q(\kappa - 1)}{4\pi\kappa r^2}\hat{r}$$

La densidad superficial será

$$\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P}(R) \cdot -\hat{r} = -\frac{(\kappa - 1)q}{4\pi\kappa R^2}$$

y la carga superficial es

$$Q_S = \oiint_S dS(\vec{x}')\sigma(\vec{x}') = -4\pi R^2 \frac{(\kappa - 1)q}{4\pi\kappa R^2}$$

$$Q_S = -\frac{(\kappa - 1)q}{\kappa}$$

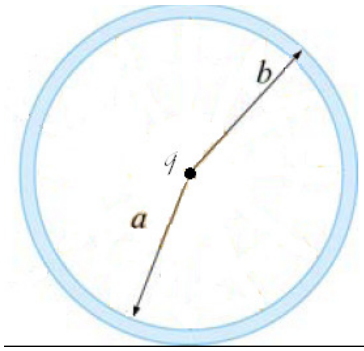
Notar que la carga total será

$$Q = Q_{libre} + Q_S = q - \frac{(\kappa - 1)q}{\kappa} = \frac{q}{\kappa}$$

Otra forma de ver como campo eléctrico es menor en un factor κ, la carga se ve debilitada por este factor de lo que sería si no hubiera un medio dieléctrico.

Problema

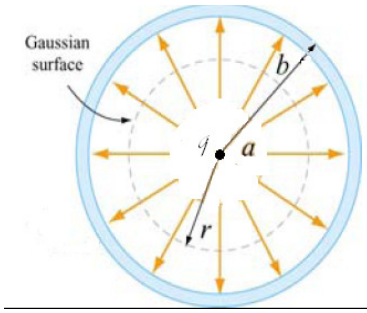
Considere una cáscara esférica dieléctrica de radio interior a, radio exterior b y permitividad ϵ. Se coloca una carga puntual q en su centro. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio y las densidades de carga de polarización



Solución

Tomando una superficie gaussiana esférica arbitraria de radio $r > 0$ concentríca con la carga libre q, se tiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = 4\pi r^2 D(r) = q_{in} = q$$



Con esto

$$\vec{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

para todo $r > 0$. Ahora, podemos obtener el campo eléctrico como sigue. En la región $r < a$, se tiene

$$\vec{E}_I(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o r^2}\hat{r}$$

para $a < r < b$

$$\vec{E}_{II}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r}$$

y para $r > b$

$$\vec{E}_{III}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o r^2}\hat{r}$$

Notar que el campo se debilita en la región interior del cascarón dieléctrico. Ahora,

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot (\epsilon - \epsilon_o)\, \vec{E}_r = 0$$

Ahora, sea σ_{in} la densidad superficial de polarización en la cáscara interior y σ_{ext} la densidad superficial de polarización en la cáscara exterior

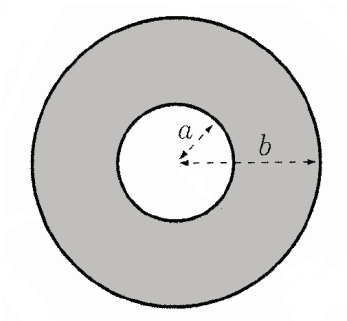
$$\sigma_{in} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}_{II}(a) \cdot (-\hat{r}) = -\frac{q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon a^2}$$

$$\sigma_{ext} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}_{II}(b) \cdot (\hat{r}) = \frac{q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon b^2}$$

se verifica que la carga total de polarización es cero

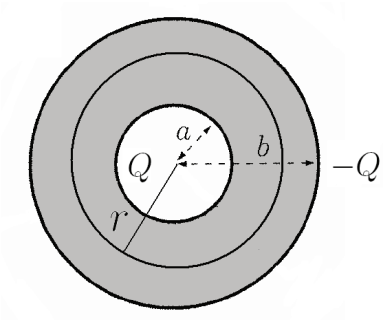
Problema

Se tiene un condensador esférico de radio interno a y externo b, el cual está lleno de un dieléctrico que tiene una constante dieléctrica κ.¿Cuál es la capacitancia de este condensador? Si el condensador está cargado con una carga Q, encuentre la energía almacenada en él



Solución

Supongamos que el condensador tiene almacenada una carga Q, es decir, la pared $r = a$ está cargada con carga Q, mientras que la pared $r = b$ se encuentra cargada con carga $-Q$. Se puede determinar la capacitancia al determinar la diferencia de potencial entre estas superficies. Utilizando la ley de Gauss general, con una superficie esférica de radio r, con $a \leq r \leq b$



$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

dada la simetría radial, $\vec{D}(\vec{x}) = D(r)\hat{r}$ y entonces

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi D(r) r^2 = Q$$

de esta forma

$$\vec{D}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, a \leq r \leq b$$

Si el dieléctrico es lineal, homogéneo e isotrópico, entonces

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{x})$$

donde κ es la constante dieléctrica del material. Luego

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \kappa r^2}\hat{r}, a \leq r \leq b$$

Ahora, la diferencia de potencial entre los extremos del condensador es

$$\Delta V = \phi(a) - \phi(b) = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando un camino radial de la forma $\vec{x} = r\hat{r}$, $\leq ar \leq b$, entonces $d\vec{x} = dr\hat{r}$

$$\Delta V = \int_a^b \frac{drQ}{4\pi\epsilon_0\kappa r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\kappa}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Finalmente

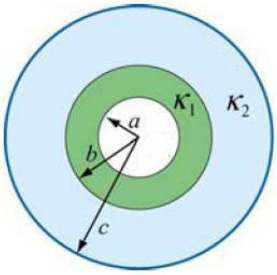
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0\kappa(b-a)}{ab}$$

Es decir, es κ veces la capacidad de un condensador esférico en vacío

$$C = \kappa C_0 > C_0$$

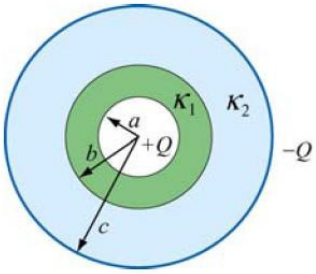
Problema

Considere una espera conductora de radio interior a y radio exterior c. El espacio entre las 2 superficies es llenado con 2 dieléctricos distintos, de manera que la constante dieléctrica es κ_1 entre a y b, y κ_2 entre b y c. Determine la capacitancia del sistema



Solución

Para encontrar la capacitancia, podemos suponer que el condensador se encuentra cargado con una carga Q, en este estado, habrá una cierta diferencia de potencial entre $r = a$ y $r = c$. La relación entre esta diferencial de potencial y la carga almacenada nos permitirá encontrar la capacidad



Para encontrar $\Delta V = \phi(a) - \phi(c)$ necesitamos determinar el campo eléctrico en la región $\Omega : a \leq r \leq c$. Para ello, utilizamos la ley de Gauss general, para una superficie esférica de radio r contenida en Ω

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi r^2 D(r)$$

esto último dada la clara simetría esférica del problema. Por la ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

De aquí es posible obtener el campo de desplazamiento eléctrico en Ω

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, a \leq r \leq c$$

Suponiendo que los dieléctricos involucrados son lineales, homogéneos e isotrópicos, se tendrá

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{x})$$

donde κ es la constante dieléctrica.

Así, para la región I ($a \leq r \leq b$)

$$\epsilon_0 \kappa_1 \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, a \leq r \leq b$$

Despejando

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \kappa_1 r^2}\hat{r}, a \leq r \leq b$$

Análogamente, para la región II ($b \leq r \leq c$)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \kappa_2 r^2}\hat{r}, b \leq r \leq c$$

Con esto

$$\Delta V = \phi(a) - \phi(c) = \int_a^c d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

tomando un camino radial de la forma $\vec{x} = r\hat{r}$ (para algun valor del ángulo ϑ), entonces $d\vec{x} = dr\hat{r}$

$$\Delta V = \int_a^b \frac{drQ}{4\pi\epsilon_0 \kappa_1 r^2} + \int_b^c \frac{drQ}{4\pi\epsilon_0 \kappa_2 r^2}$$

Luego

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{\kappa_1(b-a)} + \frac{\kappa_2 bc}{c-b} \right)$$

Otra forma de resolver el sistema es notando que el condensador equivale a dos condensadores esféricos en serie. Recordando que la capacidad equivalente para un condensador esférico de radio interior r_1 y radio exterior r_2, lleno de un dieléctrico lineal de constante κ está dado por

$$C = 4\pi\epsilon_0 k \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)$$

Con lo que la capacidad equivalente del sistema está dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{(b-a)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_1 ab} + \frac{(c-b)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_2 bc} = \frac{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}{4\pi\epsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 abc}$$

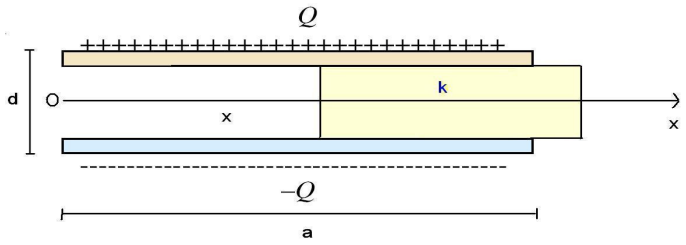
Así

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 k_1 k_2 abc}{k_2 c(b-a) + k_1 a(c-b)}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente

Problema

Se tiene un condensador plano con placas cuadradas de largo a, distancia d entre placas, y una carga total Q. Calcular la fuerza que se ejerce sobre un material dieléctrico cuando se encuentra a una distancia x del punto O

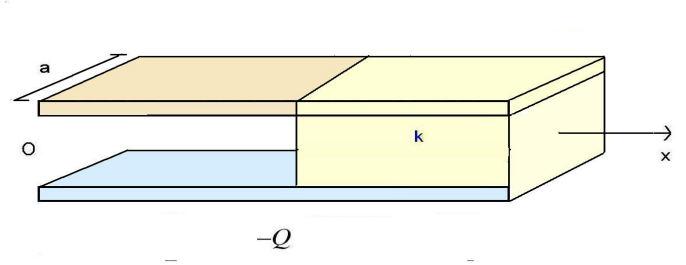


Solución

La energía potencial asociada a esta configuración es

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

Notar que es función de x, puesto que la capacitad total del condensador es función de x. El sistema se puede ver como dos condensadores en paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 a x}{d} + \frac{\kappa\epsilon_0 a(a-x)}{d}$$

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 a(x + \kappa(a-x))}{d}$$

Con esto, la energía potencial eléctrica almacenada es

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{dQ^2}{\epsilon_0 a(x + \kappa(a-x))}$$

Y la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico será

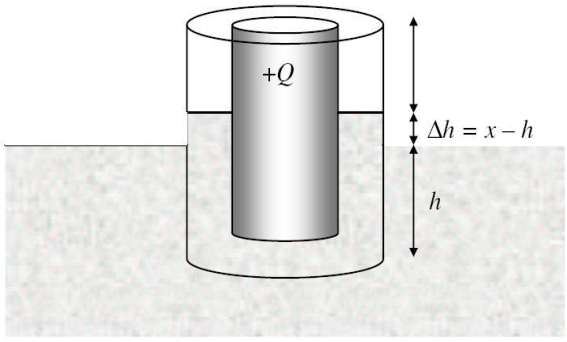
$$F_x\hat{i} = -\frac{dU}{dx}\hat{i}$$

$$\vec{F}_x = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a}\frac{(1-k)}{(x + k(a-x)^2)}\hat{i}$$

Notar que $(1-k) < 0$, es decir, la fuerza apunta según - . Esto significa que la placa dieléctrica es atraída hacia el interior del condensador.

Problema

Un condensador cilíndrico de altura l y cuyos conductores tienen radios a y b $(b > a)$, está cargado con una carga Q, es decir, una armadura tiene carga $+Q$ y la otra $-Q$. Entre ellas existe vacío. La armadura es un cilíndro metálico macizo.
Este dispositivo se sumerge en un líquido dieléctrico de densidad constante ρ y permitividad ϵ, a una profundidad h.
Determinar la altura x que sube el nivel del líquido que queda dentro del condensador, en relación al líquido externo (basta llegar a la ecuación correspondiente).



Solución

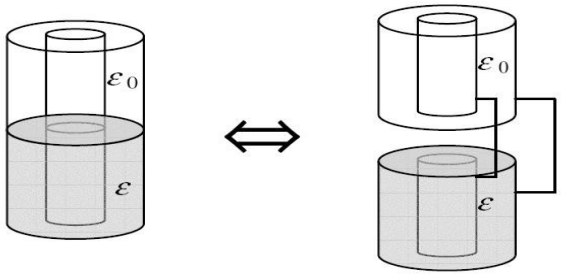
La diferencia de nivel Δh estará dada por el equilibrio entre la fuerza eléctrica sobre el líquido y su peso. Como la carga es constante, entonces

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

La fuerza electrostática es

$$F_x\hat{i} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}$$

Con $C(x)$ la capacidad del condensador cuando el agua está a una altura x.
De esta forma,el problema se traduce en determinar la capacidad del condensador en función de la altura x.



La figura muestra que el condensador puede considerarse como dos condensadores conectados en paralelo, uno de altura $l - x$ y otro de altura x. La capacidad total será la suma de las capacidades C_1, C_2.
Podemos hacer esta suposición (equivalente con 2 condensadores en paralelo) si despreciamos los efectos de borde y la deformación del campo eléctrico cerca de la superficie del líquido.

Para calcular la capacidad del condensador de altura x, supongamos que hay una carga q_2 distribuida en el conductor interno. Así, utilizando un cilindro como superficie de gauss de radio r, concéntrico al conductor interno y contenido en la región con dieléctrico, se tiene

$$\oiint d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = q_2$$

Si $\vec{D}(r) = D(r)\hat{r}$, se tiene

$$\vec{D}(r) = \frac{q_2}{2\pi r x}\hat{r}$$

De donde

$$\vec{E}(r) = \frac{q_2}{2\pi r x \epsilon}\hat{r}$$

Ahora podemos obtener el potencial entre los conductores como

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q_2}{2\pi\epsilon x} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Con lo que la capacidad para este condensador será

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon x}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Análogamente se obtiene la capacidad para el condensador superior, que estará dada por

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0(l-x)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La capacidad total del sistema será la suma de ambas

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left(\epsilon x + \epsilon_0(l-x)\right)$$

Y la energía eléctrica será

$$U(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2\ln(b/a)}{x(\epsilon-\epsilon_0)+\epsilon_0 l}$$

Derivando se obtiene la fuerza que tiende a subir el agua

$$F_x\hat{i} = -\frac{dU}{dx}\hat{i} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2\ln(b/a)(\epsilon-\epsilon_o)}{(x(\epsilon-\epsilon_0)+\epsilon_0 l)^2}\hat{i}$$

Y el peso del líquido que es elevado una altura Δh es

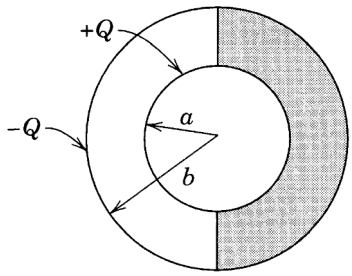
$$W = (x-h)\pi(b^2-a^2)\rho$$

Finalmente la ecuación para determinar x es

$$(x-h)\pi(b^2-a^2)\rho = \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2\ln(b/a)(\epsilon_0-\epsilon)}{(x(\epsilon-\epsilon_0)+\epsilon_0 l)^2}$$

Problema

Dos esferas concéntricas conductoras de radio interior a y exterior b, respectivamente, poseen cargas $\pm Q$ (como se muestra en la figura). La mitad del espacio entre ellas se llena con un dieléctrico (de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0)



a) Encuentre el campo eléctrico entre las esferas
b) Calcule la densidad de carga libre superficial en la esfera interior
c) Calcule la densidad de carga de polarización inducida en la superficie del dieléctrico en $r = a$

Solución

a) Sea S una esfera de radio r concéntrica a ambas esferas conductoras, con $a < r < b$. De la ley de Gauss general

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

De la simetria del problema, se deduce una dependencia y dirección radial para el campo de desplazamiento eléctrico (y también para el campo eléctrico)

$$\vec{D}(\vec{x}) = D(r)\hat{r}$$

Sean además S_1 y S_2 los hemisferios dados por

$$S_1 = \{\vec{x} \in S / 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

$$S_2 = \{\vec{x} \in S / \pi \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Notar que $S_1 \bigcup S_2 = S$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \iint_{S_1} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) + \iint_{S_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q$$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \iint_{S_1} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \epsilon_0 \kappa \vec{E}(\vec{x}) + \iint_{S_2} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) = 2\pi r E(r) \epsilon_0 \left(1 + \kappa\right)$$

donde κ es la constante dieléctrica de la región asociada al hemisferio S_1, es decir

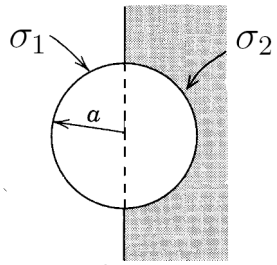
$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Así

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \epsilon/\epsilon_0)} \hat{r}, a \leq r \leq b$$

b) Para encontrar la densidad de carga libre en la esfera $r = a$, utilizamos que

$$\vec{D}(\vec{x}) = \frac{\sigma(\vec{x})}{\epsilon(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in S_a : \{r = a\}$$



Así

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E(a) = \frac{Q\epsilon_0}{2\pi a^2 (\epsilon + \epsilon_0)}$$

$$\sigma_2 = \epsilon E(a) = \frac{Q\epsilon}{2\pi a^2 (\epsilon + \epsilon_0)}$$

c) Para encontrar la densidad de carga inducida en la superficie de dieléctrico con $r = a$, utilizamos la relación

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x})$$

Así, el vector polarización está dado por

$$\vec{P}(\vec{x}) = (\epsilon - \epsilon_0)\, \vec{E}(\vec{x})$$

La densidad de carga inducida de polarización en la superficie del dieléctrico con $r = a$ es

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}\Big|_{\vec{x} \in S_a}$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie S_a que limita al dieléctrico, es decir $\hat{n} = -\hat{r}$

$$\sigma_P = -(\epsilon - \epsilon_0)\, E(r)\Big|_{r=a}$$

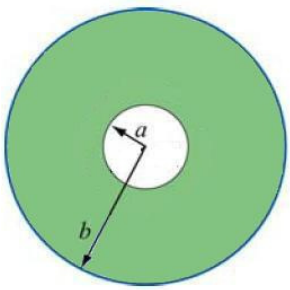
$$\sigma_P = \left(\frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon}\right) \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Problema

Un cascarón esférico macizo (radio interno a y externo b) está hecho de un material tal que la polarización en su interior está dada por $\vec{P}(r) = \frac{k}{r}\hat{r}$, donde k es una constante arbitraria y r la distancia al centro. Note que no hay carga libre en este problema. Encuentre de dos maneras distintas el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Una forma natural de resolver este problema consiste en encontrar las densidades de carga de polarización, es decir , ρ_{pol} y σ_{pol}



La divergencia en coordenadas esféricas para una función radial de la forma $\vec{f} = f(r)\hat{r}$ es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f(r)\right)$$

En este caso

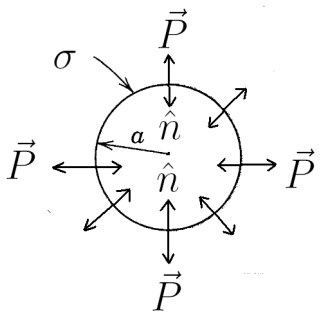
$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{k}{r}\right)$$

$$\rho_P = -\frac{k}{r^2}, r \in (a, b)$$

Falta obtener además las densidades superficiales de polarización en $r = a$ y $r = b$. Para ello utilizamos que

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

donde $\hat{n}$ apunta hacia el exterior de la región de dieléctrico. Para la superficie $r = a$ se tiene



en este caso, $\hat{n} = -\hat{r}$, y entonces

$$\sigma_P\Big|_{r=a} = \frac{k}{a}\hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{k}{a}$$

En $r = b$, la normal exterior a la región de dieléctrico coincide con $\hat{n} = \hat{r}$, de forma que

$$\sigma_P\Big|_{r=b} = \frac{k}{b}\hat{r}\cdot\hat{r} = \frac{k}{b}$$

Dividimos el espacio en dos regiones, dadas por $\{I : a < r < b\}$, $\{II : b < r\}$. Tomando una superficie esférica S de radio r tal que $r > b$, e integrando el flujo del campo eléctrico a través de ella, se tendrá por ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E(r)$$

donde se ha utilizado la clara simetría radial del problema. La carga encerrada por S está dada por

$$Q_{in} = \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 + \iiint_{V(S)} d^3x\rho_P(\vec{x})$$

La integral de la densidad volumétrica de carga de polarización es como sigue

$$\iiint_{V(S)} d^3x\rho_P(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\vartheta\sin\vartheta\int_a^b drr^2\left(\frac{-k}{r^2}\right) = -4\pi k\,(b-a)$$

Entonces

$$Q_{in} = -\frac{k}{a}4\pi a^2 + \frac{k}{b}4\pi b^2 - 4\pi b\,(b-a) = 0$$

(Resultado totalmente conocido a estas alturas, pues un dieléctrico es eléctricamente neutro). De esta forma, el campo eléctrico en la región II es nulo

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall\vec{x}\in II$$

Para la región I, nuevamente utilizando la ley de Gauss con una superficie esférica de radio r, ahora con $a < r < b$

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

donde ahora la carga encerrada por S es

$$Q_{in} = \sigma_a 4\pi a^2 + \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\vartheta\sin\vartheta\int_a^b drr^2\left(\frac{-k}{r^2}\right)$$

$$Q_{in} = -4\pi ka + 4\pi k\,(a-r) = -4\pi kr$$

Luego

$$4\pi r^2 E(r) = -\frac{4\pi kr}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{r}, a < r < b$$

Es claro, por ley de Gauss, que $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$ si $r < a$

Otra forma de resolver este problema, es utilizando la ley de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico. Utilizando una superficie S (cualquiera) contenida en la región II, se tiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = Q_{libre}$$

donde Q_{libre} representa la carga libre encerrada por S. En este caso, $Q_{libre} = 0$ y entonces, por continuidad

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall x \in II$$

Además, en la región II (vacío), la polarización es nula, $\vec{P}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall x \in II$. Utilizando además

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x}) = \vec{0} \rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall x \in II$$

Para la región I, se obtiene nuevamente que el campo $\vec{D}$ es nulo

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall S \in I$$

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in I$$

entonces

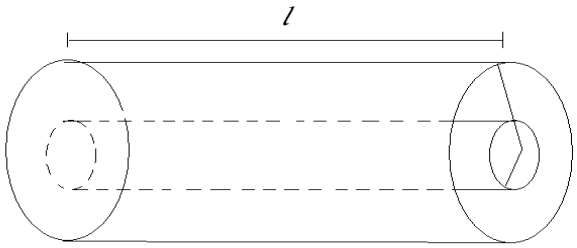
$$\epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}(\vec{x}) = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{r}$$

y, por supuesto, $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$ para $r < a$ por la misma razón ($\vec{D}(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}) = \vec{0}$ en $r < a$)

Problema

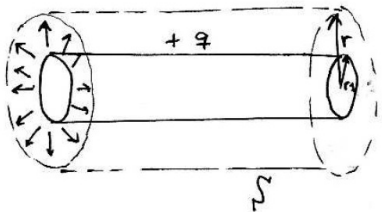
Un cilindro conductor hueco sin espesor, de radio r_1, y largo l, lleva una carga q uniformemente distribuída. Alrededor de él, otro cilindro conductor hueco sin espesor, coaxial con el anterior, de radio r_2 y mismo largo l, tal como indicado en la figura, lleva una carga -q, también uniformemente distribuída. Se llena la región entre los dos cilindros con un material cuya constante dieléctrica es función de la distancia al eje de los cilindros, $\kappa = \kappa(r)$. Considere l mucho mayor que r_1 y r_2



a) Encuentre una expresión para $\kappa(r)$ que lleva un campo electrostático radial independiente de la distancia al eje
b) Calcule la capacidad del condensador cilíndrico correspondiente
c) Calcule la densidad superficial de cargas de polarización en la superficie del material dieléctrico a $r = r_1$ y $r = r_2$, para el $\kappa(r)$ calculado en el ítem a)
d) Considerando que, en coordenadas cilíndricas , $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)$, calcular la densidad volumétrica de cargas de polarización en el dieléctrico
e) Calcular la cantidad total de cargas de polarización, incluyéndose cargas en la superficie y en el volumen del dieléctrico
f) Calcule la energía potencial electrostática almacenada en el condensador
g) Suponiendo que uno puede sacar el material dieléctrico de entre r_1 y r_2 deslizándolo fácilmente sin roce, a lo largo del eje del sistema, calcule el trabajo necesario para remover el dieléctrico de entre las placas del condesador

Solución

Para obtener el campo electrostático en el interior, utilizamos la ley de Gauss general, con una superficie cilíndrica de radio r, con $r_1 < r < r_2$ y largo l



Por simetría, es evidente que $\vec{D}$ es de la forma $\vec{D} = D(r)\hat{r}$, con esto

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = \oiint_S dS(\vec{x}')\hat{r} \cdot D(r)\hat{r} = q$$

$$D(r)2\pi rlD = q$$

Así

$$\vec{D} = \frac{q}{2\pi rl}\hat{r}$$

además $\vec{D}$ se relaciona con $\vec{E}$ según

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon\vec{E}(\vec{x}) = \kappa(r)\epsilon_0\vec{E}(\vec{x})$$

luego

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi lr\kappa(r)\epsilon_0}\hat{r}$$

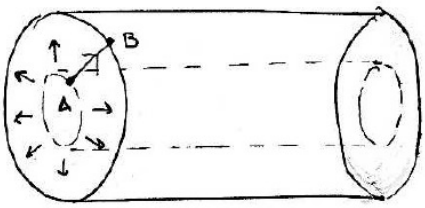
para que $\vec{E}$ no dependa de r, $\kappa(r)$ debe ser de la forma

$$\kappa(r) = \frac{\alpha}{r}$$

Así

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi l\alpha\epsilon_0}\hat{r}$$

b) Calculemos la diferencia de potencial entre las cáscaras cilíndricas



$$\int_A^B d\vec{x}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = \phi(A) - \phi(B) = \Delta V$$

$$\int_{r_1}^{r_2} dr\hat{r}\cdot\frac{q}{2\pi l\alpha\epsilon_0}\hat{r} = \frac{q}{2\pi l\alpha\epsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{q(r_2-r_1)}{2\pi l\alpha\epsilon_0}$$

y la capacidad de este condensador es

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi l\alpha\epsilon_0}{r_2 - r_1}$$

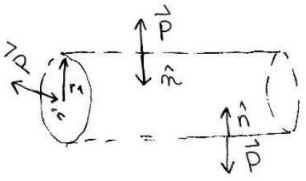
c) La densidad superficial de cargas de polarización está dada por

$$\sigma_P(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x})\cdot\hat{n}(\vec{x}), \vec{x}\in S$$

y

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0\,\vec{E} = \left(\frac{\alpha}{r} - 1\right)\epsilon_0\vec{E}$$

sobre la superficie interior



$$\hat{n} = -\hat{r}$$

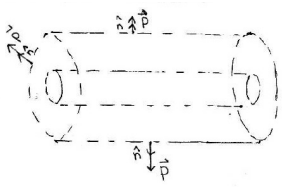
$$\vec{P} = \left(\frac{\alpha}{r_1} - 1\right)\epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P}(\vec{x}) = \left(\frac{\alpha}{r_1} - 1\right)\frac{q}{2\pi l\alpha}\hat{r}$$

y entonces

$$\sigma_1 = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=r_1}^{=} - \left(\frac{\alpha}{r_1} - 1\right)\frac{q}{2\pi l\alpha}$$

para la superficie exterior



$$\hat{n} = \hat{r}$$

$$\vec{P} = \left(\frac{\alpha}{r_2} - 1\right)\epsilon_0 \vec{E}$$

luego

$$\sigma_2 = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=r_2} = \left(\frac{\alpha}{r_2} - 1\right)\frac{q}{2\pi l\alpha}$$

d) La densidad volumétrica de carga de polarización es

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

como

$$\vec{P} = P(r)\hat{r}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rP(r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\left(\frac{\alpha}{r} - 1\right)\epsilon_0\vec{E}\right)$$

$$\rho_P = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\alpha - r}{r}\right)\epsilon_0\frac{q}{2\pi l\alpha\epsilon_0}\right]$$

$$\rho_P = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(\alpha - r)\,q}{2\pi l\alpha}\right] = -\frac{1}{r}\left(\frac{-q}{2\pi l\alpha}\right)$$

$$\rho_P = \frac{q}{r2\pi l\alpha}$$

e) La carga total de polarización es

$$Q_p = \iiint_V d^3x'\rho_P(\vec{x}') + \oiint_{S_1} dS(\vec{x}')\sigma_1(\vec{x}') + \oiint_{S_2} dS(\vec{x}')\sigma_2(\vec{x}')$$

$$\oiint_{S_1} dS(\vec{x}')\sigma_1(\vec{x}') = -\left(\frac{\alpha}{r_1}-1\right)\frac{q}{2\pi l\alpha}\oiint_{S_1} dS(\vec{x}') = -\left(\frac{\alpha}{r_1}-1\right)\frac{q2\pi r_1 l}{2\pi l\alpha}$$

$$\oiint_{S_1} dS(\vec{x}')\sigma_1(\vec{x}') = -\left(\alpha - r_1\right)\frac{q}{\alpha}$$

del mismo modo

$$\oiint_{S_2} dS(\vec{x}')\sigma_2(\vec{x}') = \sigma_2\oiint_{S_1} dS(\vec{x}') = \left(\alpha - r_2\right)\frac{q}{\alpha}$$

por último, recordando que el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es $d^3x' = rdrd\varphi dz$

$$\iiint_V d^3x'\rho_P(\vec{x}') = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^l dz\int_{r_1}^{r_2} drr\frac{q}{2\pi l\alpha r} = \frac{2\pi lq}{2\pi l\alpha}\int_{r_1}^{r_2} dr$$

$$\iiint_V d^3x'\rho_P(\vec{x}') = \frac{q}{\alpha}\left(r_2 - r_1\right)$$

Así

$$Q_P = \frac{q}{\alpha}\left(r_2 - r_1\right) - \left(\alpha - r_1\right)\frac{q}{\alpha} + \left(\alpha - r_2\right)\frac{q}{\alpha} = 0$$

Esto siempre se cumple, pues un dieléctrico siempre es eléctricamente neutro, en efecto

$$Q_P = \iiint_V d^3x' - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x}') + \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}')\cdot\vec{P}(\vec{x}') = 0$$

f) La energía almacenada por el condensador es

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

donde

$$C = \frac{2\pi l\alpha\epsilon_0}{\left(r_2 - r_1\right)}$$

así

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2\left(r_2 - r_1\right)}{2\pi l\alpha\epsilon_0}$$

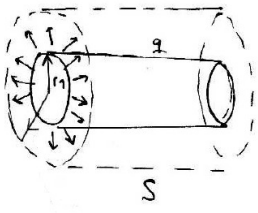
g) Tenemos que la energía inicial es

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{q^2\left(r_2 - r_1\right)}{2\pi l\alpha\epsilon_0}$$

y la final

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_f}$$

donde C_f es la capacidad final (en vacío).



Por ley de Gauss

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = \frac{q}{\epsilon_0} = E 2\pi r l$$

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi r l \epsilon_0} \hat{r}$$

y

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} d\vec{x} \cdot \vec{E} = \frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Así

$$C_f = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

y la energía final

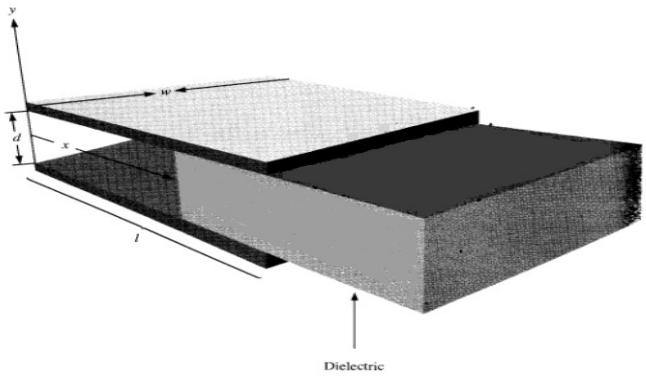
$$U_f = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_f} = \frac{1}{2}\frac{q^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi l \epsilon_0}$$

Finalmente, el trabajo necesario para remover el dieléctrico es

$$W = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi l \epsilon_0}\left\{\frac{r_1 - r_1}{\alpha} - \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right\}$$

Problema

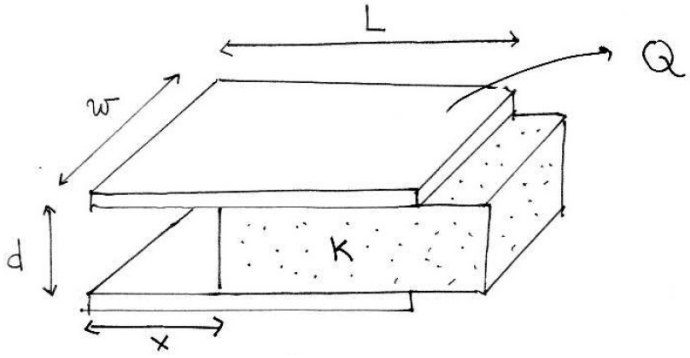
Un condensador de placas paralelas de separación d entre las placas mucho menor que su largo L y ancho w tiene la región entre las placas llenada por un material de constante dieléctrica κ, el que puede deslizar libremente a lo largo de la dirección dada por L, como indicado en la figura. Inicialmente, el dieléctrico llena completamente la región entre las placas, y el condensador está cargado con una carga total Q. Se pide determinar hasta qué distancia x uno tiene que sacar el dieléctrico para que la energía almacenada en él aumente por un factor 2 con respecto a su valor original, si la carga almacenada en el condensador se mantiene constante en el proceso



Solución

Antes de mover el dieléctrico, la capacidad es

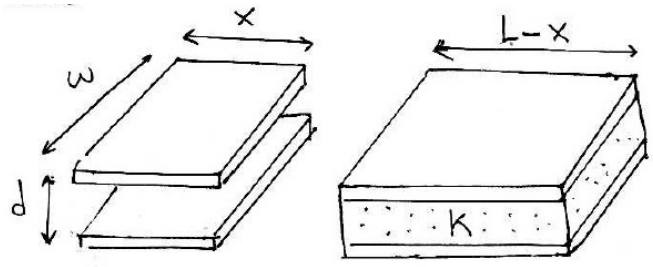
$$C_i = \frac{\kappa \epsilon_0 w L}{d}$$



y la energía inicial es

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_i} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\kappa \epsilon_0 w L}$$

Supongamos que ahora se mueve el dieléctrico hasta una distancia x. Ahora el condensador se puede pensar como dos condensadores en paralelo



la capacidad equivalente es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 w}{d}\left(x + \kappa(L - x)\right)$$

y la energía final queda

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{eq}x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\epsilon_0 w\left(x + \kappa(L - x)\right)}$$

se pide que

$$U(x) = 2U_i = \frac{Q^2 d}{\kappa\epsilon_0 w L}$$

Así, x debe cumplir

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\epsilon_0 w\left(x + \kappa(L - x)\right)} = \frac{Q^2 d}{\kappa\epsilon_0 w L}$$

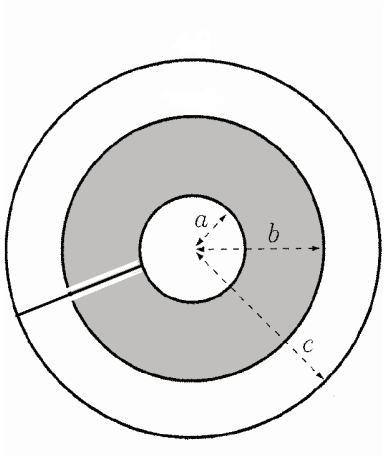
$$2\left(x + \kappa(L - x)\right) = \kappa L$$

$$2x - 2\kappa x + 2\kappa L = \kappa L \rightarrow 2x\left(1 - \kappa\right) = -\kappa L$$

$$x = \frac{\kappa L}{2\left(\kappa - 1\right)}$$

Problema

Se tienen tres esferas conductoras concéntricas de radios a, b, y c. El espacio entre las dos primeras está lleno con un dieléctrico de constante κ. Inicialmente la esfera de radio a está descargada y las esferas de radios b y c tienen carga q_1 y q_2, respectivamente. La esfera interior de radio a se conecta con la esfera de radio c con un cable aislado delgado

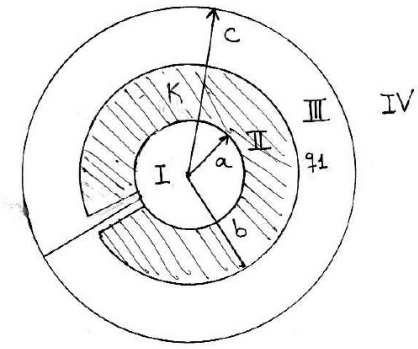


a) Calcular la carga libre en cada esfera

b) Calcular la carga de polarización en la superficie externa y en la superficie interna del dieléctrico

Solución

a) Definimos las siguientes regiones



Al conectar las esferas de radio a y c, se distribuirá la carga en ambas de modo que quedan al mismo potencial, luego

$$q_2 = q_A + q_C$$

Además, para la región I

$$r < a \rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

pues corresponde al interior de una esfera conductora. Para $a < r < b$ se utiliza la ley de Gauss con una superficie esférica de radio r

$$\oiint_{S(r)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{D}(\vec{x}') = 4\pi r^2 D(r) = q_A$$

$$\vec{D} = \frac{q_A}{4\pi r^2}\hat{r}$$

y luego

$$\vec{E}(r) = \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Para la región $b < r < c$

$$\oiint_{S(r)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{(q_A + q_1)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q_A + q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Por último, para $r > c$

$$\oiint_{S(r)} d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}') = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1 + q_A + q_C}{\epsilon_0}$$

En resumen

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } 0 < r < a \\ \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{q_A+q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } b < r < c \\ \frac{q_A+q_1+q_C}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } c < r \end{cases}$$

El potencial en una esfera de radio a es

$$\phi(a) = \int_a^\infty d\vec{r} \cdot \vec{E} = \int_a^b d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_b^c d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) + \int_c^\infty d\vec{r} \cdot \vec{E}(r)$$

donde la última integral corresponde a

$$\int_c^\infty d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) = \phi(c) = \phi(a)$$

$$\phi(a) = \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{q_A + q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_b^c \frac{dr}{r^2} + \phi(a)$$

luego

$$\frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{q_A + q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = 0$$

$$q_A\left(\frac{b-a}{ab}\right) + (q_A + q_1)\left(\frac{c-b}{bc}\right) = 0$$

$$q_A\frac{b-a}{ab} + (q_A + q_1)\frac{c-b}{cb} = 0$$

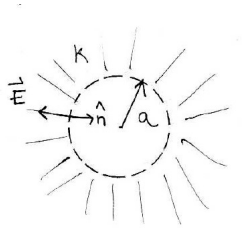
$$q_A\left(\frac{b}{a} - 1 + 1 - \frac{b}{c}\right) = \frac{q_1(b-c)}{c} \rightarrow q_A\frac{b(c-a)}{ac} = q_1\frac{b-c}{c}$$

Finalmente

$$q_A = \frac{q_1(b-c)a}{b(c-a)}$$

$$q_C = q_2 - q_A = q_2 - \frac{q_1(b-c)a}{b(c-a)}$$

b) Sobre la superficie interna del dieléctrico



$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\,\vec{E}$$

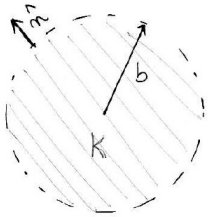
sobre la superficie

$$\vec{E} = \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 a^2}\hat{r}$$

y $\hat{n} = -\hat{r}$

$$\sigma_a = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)\,q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 a^2} = -\frac{(\kappa - 1)\,q_A}{4\pi\kappa a^2}$$

y sobre la superficie externa



$$\vec{E} = \frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 b^2}\hat{r}$$

$$\hat{n} = \hat{r}$$

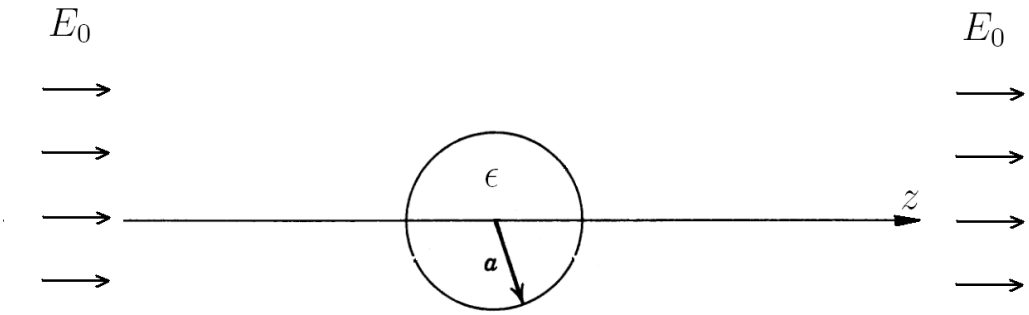
luego

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = (\epsilon - \epsilon_0)\,\frac{q_A}{4\pi\kappa\epsilon_0 b^2}$$

$$\sigma_b = \frac{(\kappa - 1)\,q_A}{4\pi\kappa b^2}$$

Problema

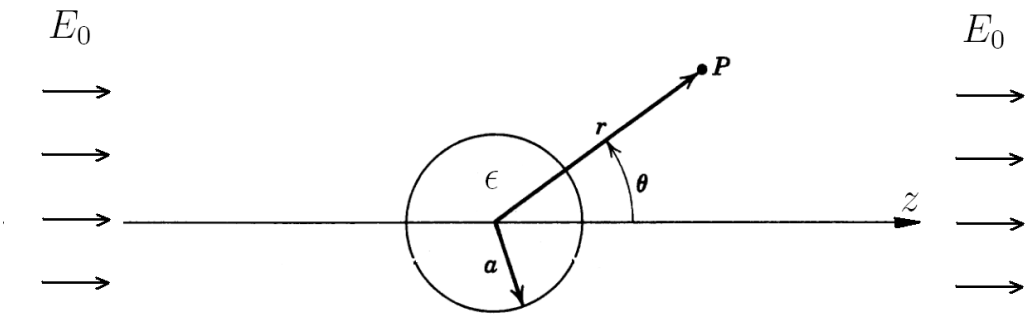
Una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ϵ se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme, como se muestra en la figura



Encuentre el potencial ϕ y el campo eléctrico en todo el espacio

Solución

Dada la simetría esférica del problema, resolveremos el problema en coordenadas esféricas, como se muestra en la figura



Como no hay cargas libres, el potencial electrostático satisface la ecuación de Laplace

$$\vec{\nabla}^2\phi = 0$$

Dada la simetría azimutal (el potencial no depende del ángulo polar φ), la solución general para $r < a$ y $r > a$ toma la forma

$$\phi_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta)$$

$$\phi_{ext} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(B_l r^l P_l + C_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta)$$

Lejos de la esfera dieléctrica, $\vec{E}(\vec{x}) = E_0 z$, o, equivalentemente

$$\phi_\infty = -E_0 z$$

en coordenadas esféricas

$$\phi_\infty = -E_0 r\cos\vartheta$$

Es decir

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r,\vartheta) = \phi_\infty = -E_0 r\cos\vartheta$$

$$\lim_{r\to\infty}\phi_{ext}=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^l P_l(\cos\vartheta)=-E_0 r\cos\vartheta$$

De aquí, es claro que

$$B_l=0, l=0,2,3,4...$$

y

$$B_1 r\cos\vartheta=-E_0 r\cos\vartheta$$
$$B_1=-E_0$$

con esto, el potencial exterior toma la forma

$$\phi_{ext}=-E_0 r\cos\vartheta+\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\vartheta)$$

Ahora utilizaremos las condiciones de contorno en la superficie $r=a$. En primer lugar, la componente tangencial del campo eléctrico en $r=a$ debe ser continua

$$\vec{E}_{int}\cdot\hat{\vartheta}\Big|_{r=a}=\vec{E}_{ext}\cdot\hat{\vartheta}\Big|_{r=a}$$

$$-\vec{\nabla}\phi_{int}\cdot\hat{\vartheta}\Big|_{r=a}=-\vec{\nabla}\phi_{ext}\cdot\hat{\vartheta}\Big|_{r=a}$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\phi_{int}}{\partial\vartheta}\Big|_{r=a}=-\frac{1}{a}\frac{\partial\phi_{ext}}{\partial\vartheta}\Big|_{r=a}$$

de forma equivalente, se puede imponer

$$\phi_{int}\Big|_{r=a}=\phi_{ext}\Big|_{r=a}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l P_l(\cos\vartheta)=-E_0 a\cos\vartheta+\sum_{l=0}^{\infty}C_l a^{-(l+1)}P_l(\cos\vartheta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l a^l-C_l a^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\vartheta)=-E_0 a\cos\vartheta$$

De aquí, se obtiene

$$A_1 a-\frac{C_1}{a^2}=-E_0 a$$

y para $l\neq 1$

$$A_l a^l-C_l a^{-(l+1)}=0, l\neq 1$$

Además, si no hay densidad de carga libre en la superficie dieléctrica, la componente normal del campo $\vec{D}(\vec{x})$ es continua

$$\vec{D}_{int}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a}=\vec{D}_{ext}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a}$$

$$-\epsilon\vec{\nabla}\phi_{int}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a}=-\epsilon_0\vec{\nabla}\phi_{ext}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a}$$

$$-\epsilon\frac{\partial\phi_{int}}{\partial r}\Big|_{r=a}=-\epsilon_0\frac{\partial\phi_{ext}}{\partial r}\Big|_{r=a}$$

$$\epsilon\sum_{l=0}^{\infty}A_l l a^{l-1}P_l(\cos\vartheta)=\epsilon_0\left(-E_0\cos\vartheta-(l+1)\sum_{l=0}^{\infty}C_l a^{-(l+2)}P_l(\cos\vartheta)\right)$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)\sum_{l=0}^{\infty}A_l l a^{l-1}P_l(\cos\vartheta)=-E_0\cos\vartheta-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)C_l a^{-(l+2)}P_l(\cos\vartheta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)A_l l a^{l-1}+(l+1)C_l a^{-(l+2)}\right)P_l(\cos\vartheta)=-E_0\cos\vartheta$$

de aquí se obtiene

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)A_1+2C_1a^{-3}=-E_0$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)A_l l a^{l-1}+(l+1)C_l a^{-(l+2)}=0, l\neq 1$$

En resumen

$$A_1 a-\frac{C_1}{a^2}=-E_0 a$$

$$A_l a^l-C_l a^{-(l+1)}=0, l\neq 1$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)A_1+2C_1a^{-3}=-E_0$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)A_l l a^{l-1}+(l+1)C_l a^{-(l+2)}=0, l\neq 1$$

de la segunda ecuación

$$A_l=C_l\frac{1}{a^{2l+1}}, l\neq 1$$

reemplazando en la cuarta

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)C_l\frac{1}{a^{2l+1}}l a^{l-1}+(l+1)C_l a^{-(l+2)}=0, l\neq 1$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)C_l\left(\frac{l}{a^{l+2}}+\frac{l+1}{a^{l+2}}\right)=0, l\neq 1$$

Luego

$$C_l=A_l=0, l\neq 1$$

Para $l = 1$, de la primera ecuación

$$A_1 = \frac{C_1}{a^3} - E_0$$

reemplazando en la tercera

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)\left(\frac{C_1}{a^3} - E_0\right) + 2C_1 a^{-3} = -E_0$$

$$\frac{C_1}{a^3}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2\right) = E_0\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right)$$

Finalmente

$$C_1 = a^3 E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right)$$

$$A_1 = E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right) - E_0$$

$$A_1 = E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 2}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right)$$

$$A_1 = -E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right)$$

Con esto, se tiene

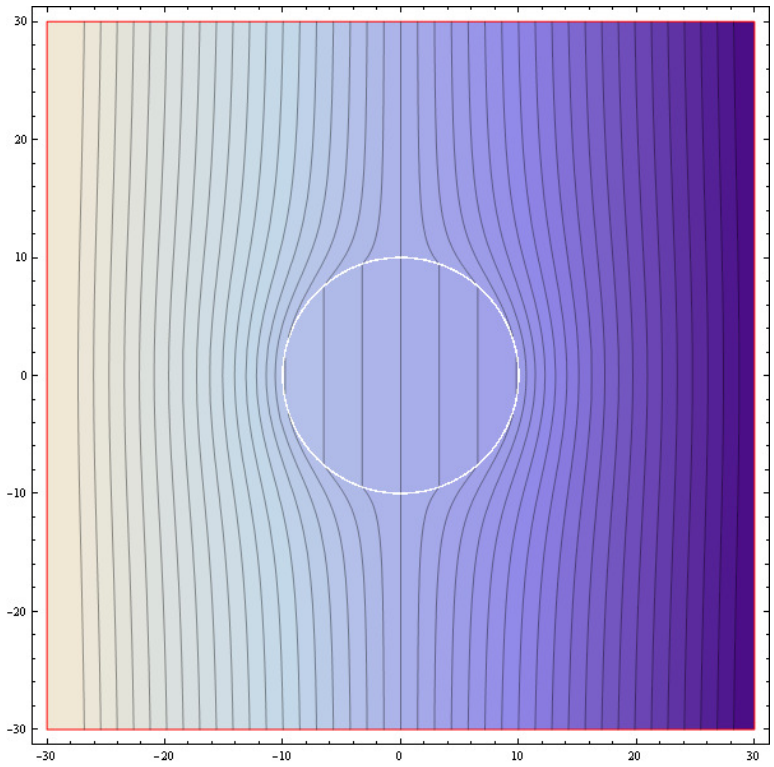
$$\phi_{int} = -E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right) r\cos\vartheta = -E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right) z$$

$$\phi_{ext} = -E_0 r\cos\vartheta + \frac{a^3}{r^2}\cos\vartheta E_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right)$$

Notar que el potencial interior define un campo eléctrico uniforme

$$\vec{E}_{int} = E_0 \left(\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2}\right) \hat{z}$$

La figura muestra las equipotenciales para $E_0 = 100\ (V/m)$, $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r = 5$, $a = 10$ (m)

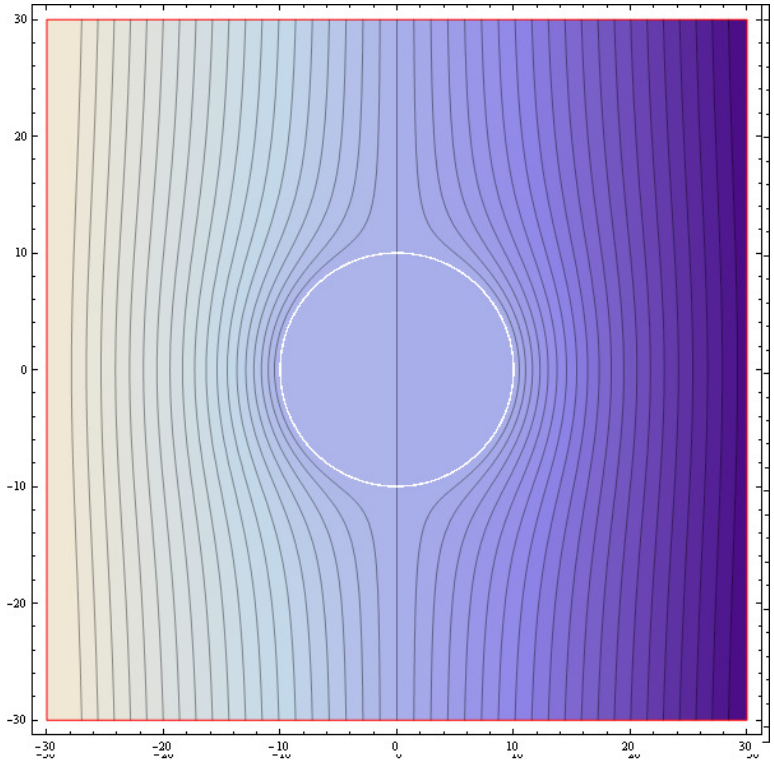


Notar que un dieléctrico con permitividad muy grande se compora de forma similar a un conductor, en efecto, si $\epsilon \to 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho}{\epsilon} \to 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

y entonces el campo está forzado a ser nulo en el interior del dieléctrico / conductor. La siguiente figura muestra la solución para $\epsilon_r = 5000$



En este caso, el potencial es prácticamente constante e igual a cero dentro de la esfera

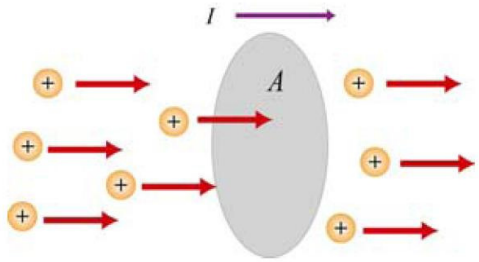
Parte IV

Corrientes Eléctricas

Capítulo 11

Corrientes Eléctricas

Las corrientes eléctricas son flujos de cargas eléctricas. Para ilustrar esto supongamos un conjunto de cargas que se mueven perpendicularmente a una superficie de área A, como se muestra en la figura



La corriente eléctrica se define como la tasa a la cual las cargas atraviesan un área transversal. Si una cantidad de carga ΔQ pasa a través una superficie en un intervalo de tiempo Δt, entonces la corriente promedio I_{avg} está dada por:

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

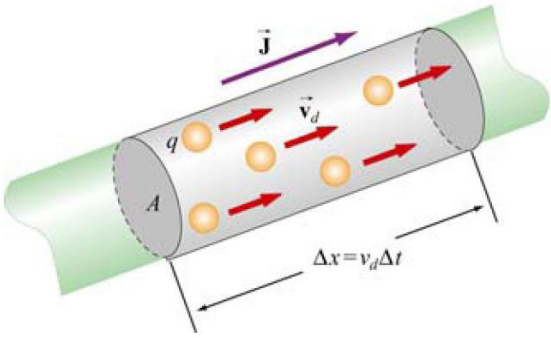
La unidad en S.I. de la corriente es el ampere (A), con $1A = 1\frac{Coulomb}{seg}$. El rango común de corrientes va desde mega-amperes en rayos hasta nano-amperes en células nerviosas. En el límite cuando $\Delta t \to 0$, la corriente instantánea se define como

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Ya que el flujo tiene una dirección, hemos introducido implícitamente la convención de que la dirección de la corriente corresponde a la dirección en la cual las cargas positivas se mueven. Las cargas que se mueven dentro de un cable son electrones cargados negativamente que se mueven en dirección opuesta a la corriente. Corrientes eléctricas fluyen en conductores, sólidos (metales, semiconductores), fluídos (electrolitos, ionizados) y gases (ionizados), pero el flujo no es permitido en no conductores o aislantes.

11.1. Densidad de Corriente

Intentaremos ahora relacionar la corriente (una cantidad macroscópica) con el movimiento microscópico de las cargas. Para ello supongamos un conductor de área transversal A, como se muestra en la figura



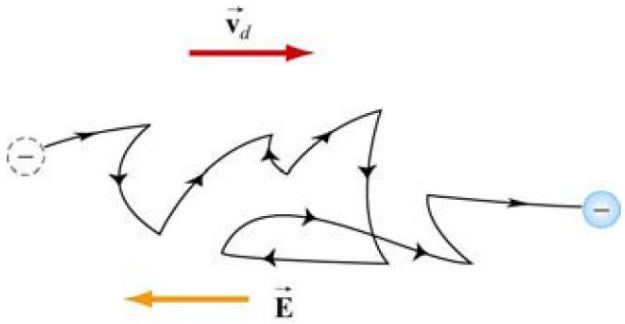
Sea la corriente total a través de una superficie escrita como

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')$$

donde $\vec{J}(\vec{x})$ es la densidad de corriente (tiene unidades de A/m^2). Si q es la carga de cada portador, y n es el número de portadores de carga por unidad de volumen, la cantidad de carga total en esta sección es $\Delta Q = q(nA\Delta x)$. Supongamos que las cargas se mueven con velocidad v_d, así, el desplazamiento en un intervalo Δt será $\Delta x = v_d \Delta t$, lo que implica

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A$$

La velocidad v_d a la cual el portador de carga se mueve se conoce como velocidad de deriva. Físicamente, v_d es la velocidad promedio de un portador de carga dentro de un conductor cuando un campo eléctrico externo es aplicado. De hecho, un electrón dentro de un conductor no viaja en línea recta, si no que su movimiento es errático, como se ve en la figura



Se tiene entonces que la densidad de carga se puede escribir como

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Vemos entonces que $\vec{J}$ y $\vec{v}_d$ tienen la misma dirección para portadores de carga positiva, y tienen direcciones opuestas para los portadores de carga negativa

11.2. Continuidad de la carga Eléctrica

Consideremos un volumen V determinado por una superficie cerrada S. La carga que entra en el dominio V en 1 segundo será (o equivalentemente, la **corriente** que ingresa a V)

$$I = -\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}')$$

Notar que el signo menos es consistente con la definición de flujo (Flujo es positivo cuando las líneas de campo salen a través de la superficie). Por otro lado, la carga total encerrada por este volumen para cierto instante estará dada por

$$Q(t) = \iiint_V d^3x' \rho(\vec{x}', t)$$

Con lo que la corriente será la razón de cambio de esta carga en el tiempo

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iiint_V d^3x' \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t}$$

Igualando debe tenerse entonces

$$-\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}') = \iiint_V d^3x' \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t}$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$-\iiint_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}') = \iiint_V d^3x' \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t}$$

$$\iiint_V d^3x' \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t} \right) = 0$$

Esta ley de conservación de la carga simplemente indica que la variación de la carga contenida en un volumen arbitrario V se debe a un flujo de carga a través de su superficie. Como se cumple para todo V, se obtiene la ecuación de continuidad para la carga eléctrica, en su forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} = 0$$

Supongamos que en determinada región del espacio existe una corriente en estado estacionario, es decir, no hay dependencia temporal. Entonces se cumple

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Cuando existen corrientes estacionarias, la densidad de carga en cada punto es una constante. Es decir, sobre cualquier volumen V, el flujo neto de carga a través de su superficie es cero, lo que es consistente con

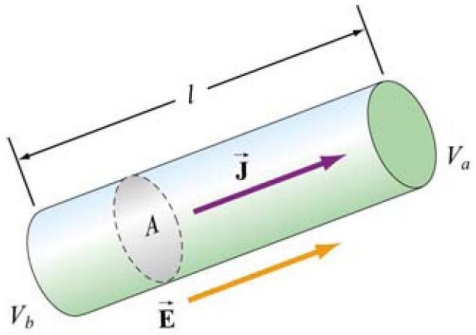
$$\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

11.3. Ley de Ohm

Las corrientes en medios materiales surgen como una respuesta a un campo eléctrico. En algunos materiales, la densidad de corriente depende linealmente del campo eléctrico externo $\vec{E}$. Esta relación usualmente se expresa como

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x})$$

Donde σ es la **conductividad** del material. Este podría ser una matriz de coeficientes no constantes (lo que representa a un medio no homogéneo y anisotrópico). Sin embargo, trabajaremos con medios simples, en donde σ es una constante positiva. Esta ecuación se conoce como la ley de Ohm diferencial. Un material que obedece esta relación se dice Ohmico. Veamos un caso particular y muy usual de la ley de Ohm, consideremos un segmento de alambre recto de largo l ,área A, y conductividad σ, como se muestra en la figura



Supongamos que una diferencia de potencial $\Delta V = \phi_b - \phi_a$ es aplicada entre los extremos del alambre, generando un campo eléctrico $\vec{E}$, y como consecuencia, una corriente I. Asumiendo $\vec{E}$ uniforme en el conductor, y apuntando en la dirección longitudinal se tiene

$$\Delta V = \phi_b - \phi_a = -\int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = El$$

Si el medio es Ohmico, el módulo de la densidad de corriente se puede escribir como

$$J = \sigma E = \sigma \left(\frac{\Delta V}{l} \right)$$

Por otro lado, $J = I/A$, luego

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma} J = \left(\frac{l}{\sigma A} \right) I = RI$$

Donde

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{l}{\sigma A}$$

es la **resistencia** del conductor. La famosa ecuación

$$\Delta V = IR$$

Es la version **macroscópica** de la ley de Ohm. La unidad de R es el Ohm (Ω), donde

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

También se suele definir la de un material como una propiedad intensiva de éste, que es simplemente el recíproco de la conductividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

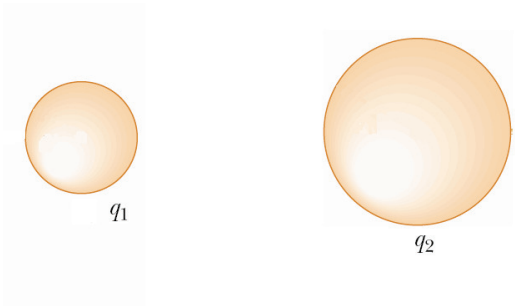
con esto la resistencia de un conductor cilíndrico queda

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

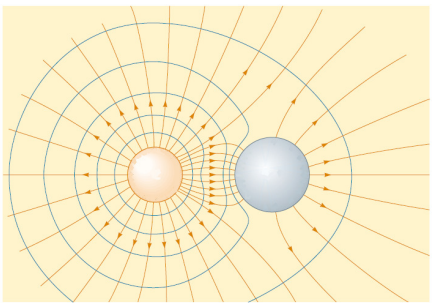
La mayoría de los metales, con buena conductividad y baja resistividad, son ohmicos.

11.3.1. Conexión entre conductores

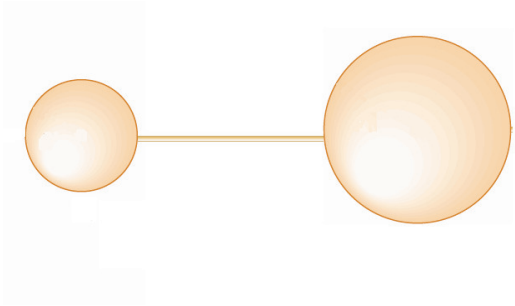
Imaginemos que se tienen 2 conductores perfectos, inicialmente cargados (se encuentran entonces a determinado potencial). La forma de estos dos conductores es absolutamente irrelevante, pero por simpleza y elegancia, en la siguiente figura se ilustran dos conductores esféricos, cargados con carga q_1 y q_2, respectivamente



Si estos conductores están en el vacío, existirá un campo electrostático. Suponiendo que el conductor con carga q_1 se encuentra a mayor potencial, las líneas de campo se verán (para el caso de los conductores esféricos) así



Si existiera alguna carga libre, ciertamente ésta se movería debido al campo eléctrico que generan los conductores. Sin embargo, en el vacío (ausencia de cargas), simplemente nada ocurre. Ahora, imaginemos que ambos conductores se conectan por algún medio parcialmente conductor (de conductividad finita). La forma puede ser cualquiera, incluso podríamos imaginar en llenar todo el espacio de un material conductor, pero podemos imaginar como caso particular (y simple) un alambre muy delgado



¿Qué ocurre entonces?. Ahora existe un medio entre los conductores que posee cargas libres ! Sin duda éstas se moveran siempre que exista un campo eléctrico, y entonces cargas se moverán desde el conductor a mayor potencial hacia el conductor que está a menor potencial. Como consecuencia de esto, el campo eléctrico en la región entre los conductores se irá debilitando, pues este movimiento de cargas de uno al otro provocará una disminución en la diferencia de potencial entre ambos conductores. En conclusión, la conexión entre 2 conductores mediante un medio de conductividad finita dará origen a una **corriente**. Esta corriente se hará cada vez mas débil, hasta que se alcanze un equilibrio en el cual los dos conductores quedan al mismo potencial.

Ahora, pensemos que tenemos un solo conductor, inicialmente cargado con carga Q. Imaginemos que lo conectamos con el infinito mediante algun camino de conductividad finita, por ejemplo un alambre infinito, esto equivale a conectarlo a otro conductor a potencial cero. Lo que sucederá es que toda la carga contenida en el conductor se irá por este camino hacia el infinito, de esta forma, nuestro conductor queda a potencial cero y absolutamente descargado.

11.4. Circuitos Eléctricos

Un circuito es una malla de resistencias, fuentes, condensadores, etc, unidas por medio de conductores perfectos. Un nodo es un punto donde convergen 2 o más conductores. Así, en un nodo se cuple que la suma de las corrientes es cero, esta es la 1 Ley de Kirchhoff, o Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)

$$\sum_k I_k = 0$$

Notar que esta ecuación es equivalente a la ecuación de continuidad de la carga eléctrica para corrientes continuas (estacionarias)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

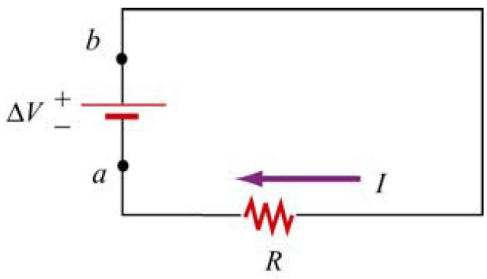
.

La segunda Ley de Kirchhoff o Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) dice que la suma de las caídas de potencial en cada camino cerrado suma 0. Notar que esta ley proviene de

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Debido a esto la integral de línea del campo $\vec{E}$ sobre una curva cerrada (circuito cerrado) es 0.

Energía eléctrica y potencia
Considere un circuito consistente en una batería y una resistencia (R). Sea la diferencia de potencial entre los puntos a y b $\Delta V = \phi_b - \phi_a > 0$. Si una carga Δq se mueve a través de la batería, su energía potencial eléctrica aumenta $\Delta U = \Delta q \Delta V$. Por otro lado, si la carga se mueve a través de la resistencia, la energía potencial decrece debido a las colisiones con los átomos de la resistencia. Si despreciamos la resistencia interna de la batería y la de los cables conductores, al volver al punto a, la energía de Δq permanece invariante.



Así, la tasa a la que se disipa energía a través de la resistencia está dada por

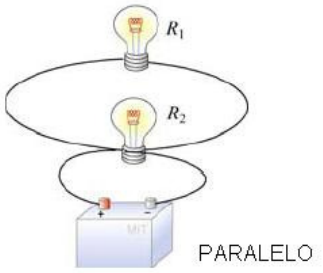
$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = (\frac{\Delta q}{\Delta t})\Delta V = I\Delta V$$

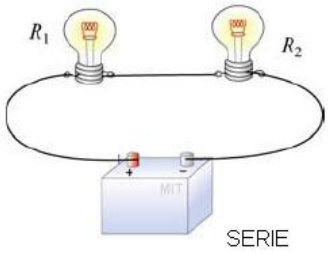
Esta es precisamente la potencia suministrada por la batería. Usando que $\Delta V = IR$, se puede reescribir como

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Los circuitos eléctricos conectan fuentes de poder a cargas como resistencias, motores, lámparas, etc. La conexión entre la fuente y la carga se hace soldando con cables conductores, tambien llamados nodos. Las distintas partes de un circuito pueden estar en serie o en

paralelo, como ya se vió en el caso de los capacitores.
Dos elementos se dicen estar en paralelo cuando son conectados a la misma diferencia de potencial.



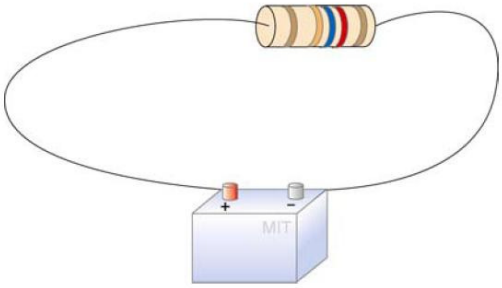


Por otro lado,cuando los elementos son conectados uno seguido de otro, tal que la corriente pasa a través de cada elemento sin otros caminos de por medio, los elementos están en serie.
Se pueden tener circuitos cerrados, a través de los cuales fluye corriente, o bien circuitos abiertos en donde no existen corrientes. Usualmente por accidente, los cables pueden entrar en contacto, causando un corto circuito, esto es, gran parte de la corriente fluirá a través del corto circuito, mientras que una fracción muy pequeña fluirá a través de la carga.
Esto podría quemar un equipo eléctrico como un transformador. Para prevenir el daño, un fusible se conecta en serie. Cuando hay un corto circuito, el fusible aisla la carga del resto del circuito.
En los circuitos eléctricos, un punto (o un nodo en común) se escoge como tierra. A este punto se le asigna arbitrariamente un voltaje, usualmente cero, y el voltaje V en cualquier otro punto del circuito está definido como la diferencia de potencial entre el punto y la tierra.

Fuerza Electromotriz
Vimos que energía eléctrica debe ser suministrada para mantener una corriente constante en un circuito cerrado. La fuente de energía es llamada comúnmente como la fuerza electromotriz, o f.e.m (ε). Las baterías son ejemplos de fuentes de f.e.m. Se pueden pensar como bombas que mueven cargas desde potenciales bajos a potenciales más altos. Matemáticamente la f.e.m se define como

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \tag{11.1}$$

Que corresponde al trabajo hecho para mover una unidad de carga en la dirección del potencial más alto. La unidad SI para ε es el volt (V). Considere un circuito simple que consiste en una batería como fuente de f.e.m y una resistencia R, como se muestra en la figura

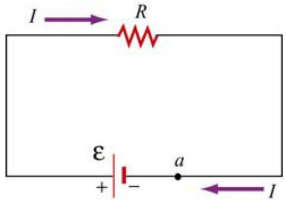


Asumiendo que la batería no posee resistencia interna, la diferencia de potencial ΔV entre los terminales positivo y negativo de la batería es igual a la fem ε. Para establecer una corriente

alrededor del circuito, la batería efectúa un proceso de descarga que convierte energía química en una f.e.m. La corriente I se puede encontrar notando que no hay un trabajo neto al mover una carga q a través de un camino cerrado debido a la naturaleza conservativa de la fuerza electrostática.

$$W = -q \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Sea a el punto de partida



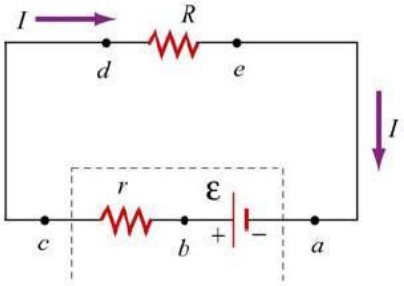
Cuando se atraviesa desde el terminal negativo al positivo, el potencial aumenta en ε. Por otro lado, cuando atravesamos la resistencia, el potencial decrece una cantidad IR, y la energía potencial se convierte en energía térmica en la resistencia. Asumiendo que los cables conectores no poseen resistencias, a través de un camino cerrado, la diferencia de potencial neta es cero

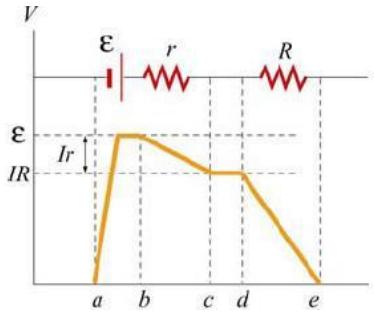
$$\varepsilon - IR = 0$$

Lo que implica

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

De todas formas, una batería real siempre posee una resistencia interna r





Ahora la diferencia de potencial a través de la batería es

$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$

Ya que no hay una diferencia de potencial neta a través de un camino cerrado, tenemos

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

O bien

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

De la figura de la derecha vemos el cambio de potencial mientras atravesamos el circuito en el sentido del reloj. Notar que la mayor diferencia de potencial está inmediatamente despues de la

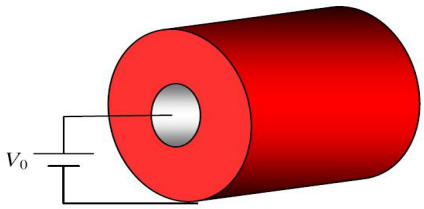
batería. El voltaje cae a medida que se atraviesa cada resistencia. Notar también que el voltaje es constante en los cables. Esto se debe a que los cables poseen resistencias extremadamente pequeñas comparadas con las resistencias del circuito.
Para una fuente de f.e.m ε, la potencia a la cual la energía se entrega es

$$P = I\varepsilon = I(IR + Ir) = I^2R + I^2r$$

Es decir, la potencia de la fuente es igual a la suma de la potencia disipada en ambas resistencias, la interna y la de carga. Esto es necesario debido a la conservación de la energía.

Problema

El espacio entre dos circuitos conductores de largo L y radios a y b ($b > a$), está lleno de material de conductividad σ. Calcule la intensidad de la corriente por unidad de longitud y la resistencia, cuando la diferencia de potencial entre los conductores es V_0.



Solución

La diferencia de potencial será responsable de un movimiento de cargas a través del material conductor que se encuentra entre los conductores externos. La conservación de la carga implica

$$\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Para corrientes estacionarias

$$\frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Si el medio es Ohmico, $\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \vec{E}(\vec{x}) \right) = 0$$

Si el medio además es homogéneo

$$\frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

Finalmente

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0$$

Y entonces el potencial satisface la ecuación de Laplace en la región $a < r < b$. La solución en coordenadas cilíndricas (suponiendo que ése depende únicamente de la coordenada radial r) es

$$\phi(r) = A \ln r + B$$

Imponiendo la condición $\phi(a) - \phi(b) = V_0$

$$A = V_0 \ln \frac{b}{a}$$

Así, se obtiene el campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = V_0 \ln \frac{b}{a} \frac{1}{r} \hat{r}$$

Utilizando la ley de Ohm, se obtiene la densidad de corriente

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma\vec{E}(\vec{x}) = \sigma V_0 \ln\frac{b}{ar}\hat{r}$$

La corriente por unidad de largo que fluye a través de los conductores se puede obtener como la integral de flujo de la densidad de corriente sobre una superficie cilíndrica de radio r (y largo unitario). Esta integral resulta simple pues la densidad de corriente tiene magnitud constante a lo largo de esta superficie, y su dirección coincide en todo punto con la normal. El diferencial de área sobre el cilindro es $da = drd\varphi dz$

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi r \frac{\sigma V_0}{r} \ln\frac{b}{a}$$

$$I = 2\pi\sigma V_0 \ln\frac{b}{a}[A/m]$$

Así, la resistencia por unidad de longitud es

$$r = \frac{V_0}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

y la resistencia total es

$$R = rL = \frac{L\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

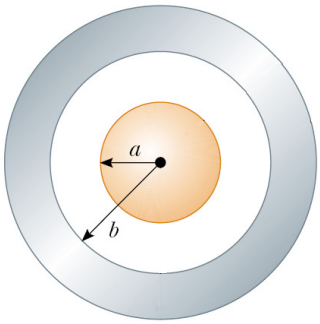
Problema

Dos esferas metálicas concéntricas, de radios a y b están separadas por un material conductor de conductividad σ constante

a) Si estas esferas son mantenidas a una diferencia de potencial V constante, encuentre la corriente que va de una a la otra

b) Encuentre la resistencia entre las esferas

c) Observe que en este caso se cumple $R = \epsilon_0/$, donde C es la capacidad. Demuestre esta fórmula para dos conductores cualquiera, separados por un material conductor de conductividad σ constante



Solución

a) Al establecer una diferencia de potencial sobre los conductores

$$V = \phi(a) - \phi(b)$$

se inducirán cargas Q y $-Q$ sobre las superficies $r = a$ y $r = b$, respectivamente. El campo eléctrico en la región interior se puede determinar a partir de la ley de Gauss debido a la simetría esférica que éste debe tener

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Si S se escoge como una superficie esférica de radio r, se tiene

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, a < r < b$$

Por otro lado

$$V = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_a^b \frac{drQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde se ha utilizado un camino radial para evaluar la integral de línea

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Entonces

$$Q = \frac{V4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

luego, para $a < r < b$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Vab}{(b-a)r^2}\hat{r}$$

Debido a que la zona $a < r < b$ está llena con un material conductor, el campo eléctrico dará origen a un movimiento de cargas (corriente), en donde la densidad está relacionada con el campo $\vec{E}$ mediante la ley de Ohm

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma\vec{E}(\vec{x}) = \frac{V\sigma ab}{(b-a)r^2}\hat{r}$$

La corriente que fluye entre los conductores se puede obtener integrando sobre una superficie esférica S de radio r, $a < r < b$

$$I = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 4\pi r^2 J(r)$$

Luego

$$I = \frac{4\pi\sigma Vab}{(b-a)}$$

b) La resistencia está dada por

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

c) La capacidad de un condensador esférico es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

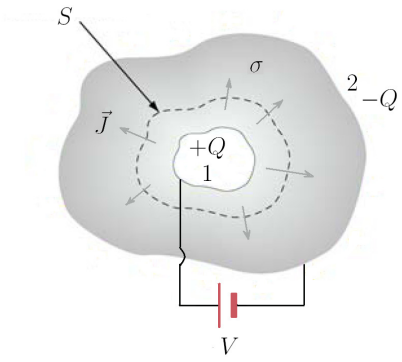
Evaluando

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma C} = \frac{\epsilon_0}{\sigma}\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{4\pi\sigma}$$

y entonces se tiene

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma C} = R$$

Veamos que esto se cumple en el caso general. Sean 1 y 2 dos conductores cualquiera , separados por un material de conductividad σ



Se tendrá un flujo de corriente dado por

$$I = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

por ley de Ohm

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x})$$

$$I = \sigma \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

por ley de Gauss

$$I = \sigma \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por otro lado, si C es la capacidad del sistema, se cumple

$$Q = CV$$

entonces

$$I = \frac{\sigma C V}{\epsilon_0}$$

$$V = \frac{\epsilon_0}{\sigma C} I$$

Finalmente se demuestra la relación general

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

Problema

Considere un conductor perfecto, inicialmente con carga Q_0, y completamente rodeado por un medio uniforme de conductividad σ y constante dieléctrica ϵ

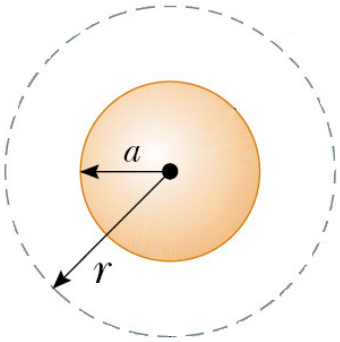
a) Si el conductor es una esfera de radio a, muestre que su carga como función del tiempo es

$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/\epsilon}$$

b) Muestre que el resultado anterior es válido independientemente de la forma del conductor

Solución

a) Sea $Q(t)$ la carga sobre la superficie esférica al instante t. Ésta generará un campo eléctrico esféricamente simétrico



$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r}$$

al ser el medio circundante un conductor de conductividad σ, se tendrá una densidad de corriente como respuesta a este campo

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sigma\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma Q(t)}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r}$$

Esta es una corriente que fluye isotrópicamente de forma radial. La corriente se obtiene de integrar $\vec{J}(\vec{x})$ sobre una superficie cerrada que contenga a la esfera conductora, en particular se puede evaluar tomando una esfera concéntrica de radio $r > a$

$$I(t) = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{\sigma Q(t)}{\epsilon}$$

Por otro lado, la carga total contenida en el volumen encerrado por S es

$$Q(t) = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x}, t)$$

Por la continuidad de la carga

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\sigma Q(t)}{\epsilon}$$

cuya solución es

$$Q(t) = Q_0 e^{-t\sigma/\epsilon}$$

b) El resultado anterior es independiente de la forma de los conductores. En efecto, sea S una superficie cerrada que contenga completamente al conductor. La corriente que se genera está dada por

$$I = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Si el medio es ohmico

$$I = \sigma \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

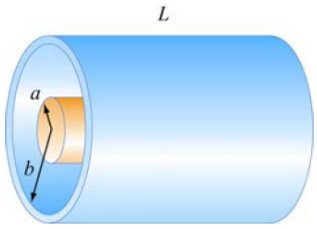
y utilizando la ley de Gauss

$$I = \sigma \frac{Q(t)}{\epsilon} = \frac{dQ(t)}{dt}$$

y se obtiene la misma ecuación diferencial para la carga contenida en el conductor

Problema

Dos cilindros coaxiales (radios a y b) de largo L están separados por un material de conducividad $\sigma(r) = \frac{k}{r}$ donde k es una constane arbitraria y r la distancia al eje (común) de los cilindros. Encuentre la resistencia entre los cilindros. Observe que al ser la conductividad función de la posición, la densidad de carga en el material conductor no es cero y el campo E no varía como $1/r$. Recuerde que una corriente estacionaria I tiene el mismo valor para cualquier superficie cilíndrica



Solución

Supongamos que se establece una diferencia de potencial $\Delta V > 0$ entre los conductores $r = a$ y $r = b$. Usaremos el hecho de que la corriente que fluye entre los cilindros está dada por la integral

$$I = \iint_S dS(\vec{x})\hat{n}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Donde S es un cilindro concéntrico a los conductores, de radio r y largo L. Además, por simetría cilíndrica, $\vec{J} = J(r)\hat{r}$

$$I = 2\pi r L J(r)$$

luego la densidad de corriente es

$$\vec{J}(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi r L}\hat{r}$$

Si $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ (por simetría), se tiene por ley de Ohm

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma(r)\vec{E}(r)$$

luego

$$E(r) = \frac{r}{k}\frac{I}{2\pi r L}$$

con esto, la diferencia de potencial entre los conductores es

$$\Delta V = \int_a^b d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi L k}(b - a)$$

Entonces

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{b - a}{2\pi k L}$$

Problema

Se sabe que la atmósfera tiene una conductividad (causada principalmente por los rayos cósmicos) que depende de la altura de la siguiente manera

$$\sigma(z) = \left(3 + \frac{z^2}{3}\right) 10^{-14}[\Omega]^{-1}$$

donde z es la distancia vertical sobre el suelo. Se ha encontrado además, un campo eléctrico vertical, dirigido hacia el suelo, que en la superficie de la tierra vale

$$\vec{E} = -100\hat{k}$$

Suponga el siguiente modelo de la atmósfera: imagine una capa conductora paralela a la superficie; situada a una distancia de 15 km sobre el nivel del suelo. Entre esta capa y la tierra se encuentra la atmósfera, con la conductividad y el campo eléctrico indicados arriba. El radio de la tierra es $R_T = 6400$ km.

a) Calcule el campo eléctrico y el potencial en función de la altura z

b) Calcule la corriente total que fluye entre la capa superior conductora y la tierra

Solución

a) Sabemos que en corriente continua (o estacionaria) se cumple que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Además, se sabe que la dirección del campo eléctrico es según z y, por razones de simetría no debe depender de las coordenadas x e y. Eso se traduce en

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma(z)E(z)) = \frac{d}{dz}\left(\sigma(z)E(z)\right) = 0$$

$$\sigma(z)E(z) = A$$

El valor de esta constante se puede obtener evaluando en z=0

$$A = \sigma(0)E(0) = -3 \times 10^{-12}$$

De esta forma, el campo eléctrico en la atmósfera es

$$\vec{E}(\vec{x}) = -3 \times 10^{-12} \frac{1}{(3 + \frac{z^2}{3})10^{-14}}\hat{k} = \frac{-300}{3 + \frac{z^2}{3}}\hat{k}$$

Fijando el valor del potencial en la tierra como 0, entonces

$$\phi(z) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

donde $\vec{x}_2$ es cualquier punto a altura z, y $\vec{x}_1$ es un punto sobre la superifice. Escogiendo una curva vertical, se tiene

$$\phi(z) = \int_0^z dz \frac{300}{3 + \frac{z^2}{3}} = 900 \int_0^z dz \left(\frac{1}{3 + z^2}\right) = 900 Arctg\left(\frac{z}{3}\right)$$

b) La densidad de corriente se obtiene usando la ley de Ohm, esto es

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma(z)\vec{E}(\vec{x}) = -\left(3 + \frac{z^2}{3}\right) 10^{-14} \frac{300}{3 + \frac{z^2}{3}} \hat{k} = -3 \times 10^{-12} [A/m^2] \hat{k}$$

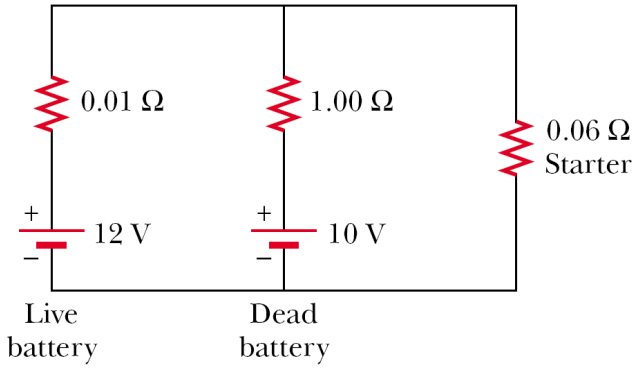
La corriente será

$$I = \iint_S d\vec{S}(\vec{x}') \cdot \vec{J}(\vec{x}') = -3 \times 10^{-12} S = -3 * 10^{-12} 4\pi R_T^2$$

$$I = 122{,}88[A]$$

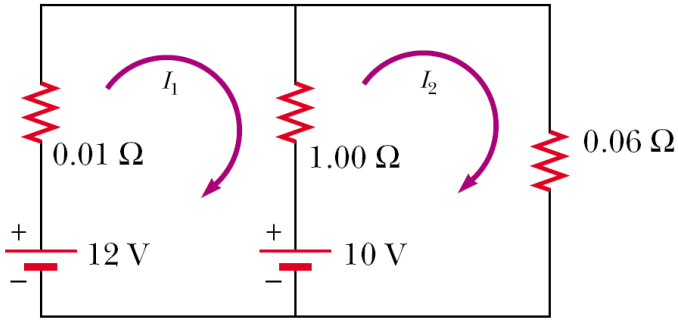
Problema

Una batería descargada se carga conectándola a la batería cargada de otro automóvil mediante cables para corriente. Determine la corriente del motor de arranque y en la batería descargada



Solución

Se utiliza la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) para cada malla, esto es



Para la malla 1

$$-12 + 0{,}01I_1 + 1\,(I_1 - I_2) + 10 = 0$$

y en la malla 2

$$-10 + 1(I_2 - I_1) + 0{,}06I_2 = 0$$

De la primera ecuación se obtiene

$$I_2 = 1{,}01I_1 - 2$$

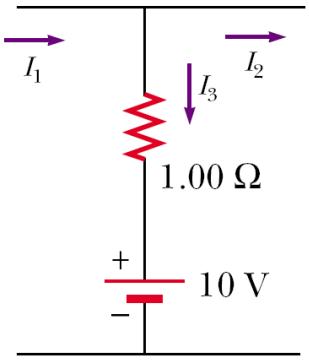
Reemplazando

$$0{,}0706I_1 - 2{,}02 = 10 \rightarrow I_1 = 170{,}25A$$

Con esto

$$I_2 = 1{,}01 * I_1 - 2 = 169,95A$$

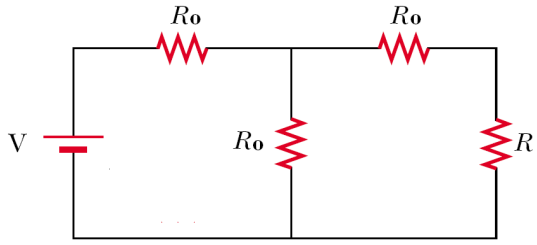
I_2 es la corriente a través del motor de arranque, mientras que la corriente a través de la batería descargada será, según nuestra convención



$$I_3 = I_1 - I_2 = 170{,}25 - 169{,}95 = 0{,}2975A$$

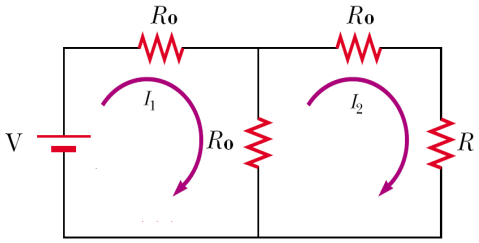
Problema

En el circuito de la figura la batería tiene una FEM de valor V. Encuentre la resistencia R que debe colocarse entre los terminales A y B para que en ella se disipe la máxima potencia



Solución

Resolviendo el problema con mallas



Para la malla 1

$$-V + I_1 R_0 + R_0(I_1 - I_2) = 0$$

Para la malla 2

$$R_0(I_2 - I_1) + R_0 I_2 + R I_2$$

De la primera ecuación se obtiene

$$I_1 = \frac{V + I_2 R_0}{2R_0}$$

Reemplazando en la ecuación de la malla 2

$$(2R_0 + R)I_2 = R_0 I_1 = R_0 \frac{V + I_2 R_0}{2R_0}$$

$$(3R_0 + 2R)I_2 = V \rightarrow I_2 = \frac{V}{3R_0 + 2R}$$

Teniendo la corriente que pasa por la resistencia R, la potencia que ésta consume se puede obtener como

$$P = V_R I_R = (I_R R) I_R = I_R^2 R$$

Así

$$P = \frac{V^2}{(3R_0 + 2R)^2} R$$

Para encontrar el valor de R que maximize esta potencia consumida, bastará con resolver

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0$$

Esto es

$$\frac{dP}{dR} = \frac{V^2}{(3R_0 + 2R)^2} - \frac{4RV^2}{(3R_0 + 2R)^3} = \frac{3V^2R_0 + 2V^2R - 4RV^2}{(3R_0 + 2R)^3}$$

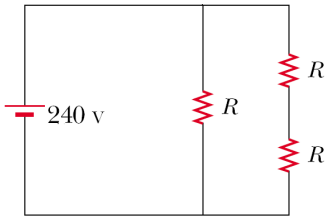
$$\frac{3V^2R_0 - 2V^2R}{(3R_0 + 2R)^3} = 0 \rightarrow 3V^2R_0 - 2V^2R = 0$$

Así, la resistencia R que maximiza la potencia consumida es

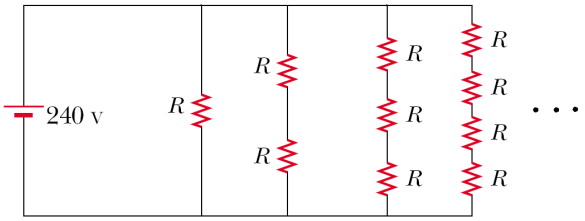
$$R = \frac{3}{2} R_0$$

Problema

La fuente $V_1 = 240$ (V) está conectada a tres resistencias iguales según la figura

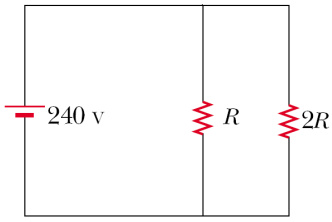


a) Determine R si la fuente de voltaje entrega 1920(W) al conjunto de resistencias
b) Si al circuito en paralelo, se le agregan más resistencias en paralelo, siguiendo una secuencia de $3R$ en serie, $4R$ en serie, hasta llegar a NR en serie, calcule la potencia suministrada por la fuente de voltaje cuando N tiende a Infinito



Solución

a) El circuito se puede reducir considerando que hay 2 resistencias en serie, cuya resistencia equivalente será la suma de ambas, así, el circuito queda



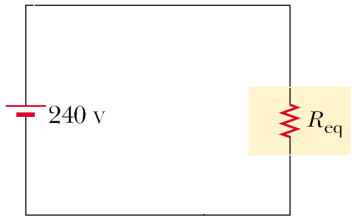
Estas 2 resistencias ahora se encuentran en paralelo, por lo que se puede obtener un R_{eq} de todo el circuito

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

Con lo que

$$R_{eq} = \frac{2}{3}R$$

Con esto, el circuito equivale a



La potencia generada por este circuito será la misma que consume R_{eq}, esto es

$$P = V_{R_{eq}} I_{R_{eq}} = V I_{R_{eq}} = V\left(\frac{V}{R_{eq}}\right) = 1920W$$

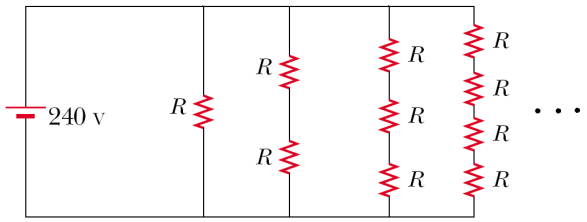
De aquí se obtiene

$$R_{eq} = \frac{V^2}{P} = \frac{240^2}{1920} = 30\Omega$$

Finalmente se obtiene R usando que

$$R_{eq} = \frac{2}{3}R \rightarrow R = \frac{3}{2}R_{eq} = 45\Omega$$

b)



En este caso, se puede obtener una resistencia equivalente según

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + ... + \frac{1}{NR}$$

Así, se puede obtener la potencia que debe entregar la fuente para un cierto valor de N

$$P_N = \frac{V^2}{R_{eq}} = V^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{kR}$$

Así, para obtener la potencia cuando N tiende a infinito, bastará con obtener el siguiente límite (si existe)

$$P_{N\rightarrow\infty} = \lim_{N\rightarrow\infty} P_N = V^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kR}$$

Pero esta serie diverge, es decir, la potencia necesaría sería infinita. Esto es lógico ya que la fuente tendría que alimentar un número infinito de resistencias.

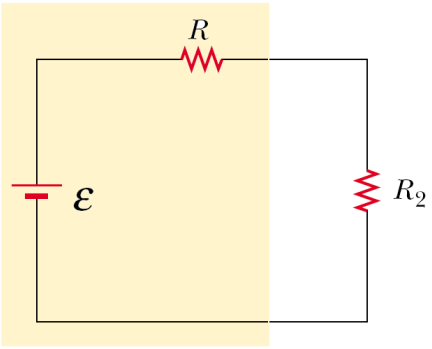
Problema

Una batería tiene una f.e.m ε y una resistencia interna R. Una resistencia de carga R_2 se conecta a los terminales de la batería.

a) Determine el valor de R_2 tal que la diferencia de potencial aplicada a los terminales sea máxima.

b) Determine el valor de R_2 para obtener una corriente máxima en el circuito.

c) Determine el valor de R_2 para que la potencia consumida por ésta sea la máxima posible



Solución

a) Primero determinamos la corriente a través del circuito

$$-\varepsilon + IR + IR_2 = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + R_2}$$

Así, la diferencia de potencial entre los extremos de la batería es

$$V = IR_2 = \frac{R_2\varepsilon}{R + R_2} = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{R}{R_2}}$$

La diferencia de potencial entre los terminales será máxima cuando $R_2 \rightarrow \infty$ y valdrá ε, que es el valor de la fem.

b) Teníamos que

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_2}$$

Luego, la corriente será máxima si $R_2 = 0$, y equivale a cortocircuitar los terminales de la batería

c) La potencia consumida por R_2 está dada por

$$P = VI = \frac{R_2\varepsilon}{R + R_2}\frac{\varepsilon}{R + R_2} = \frac{R_2\varepsilon^2}{(R + R_2)^2}$$

Para encontrar el valor de R_2 que maximiza esta potencia resolvemos

$$\frac{dP}{dR_2} = \frac{\varepsilon^2(R + R_2)^2 - 2(R + R_2)R_2\varepsilon^2}{(R + R_2)^4} = 0$$

Así

$$(R + R_2)^2 - 2(R + R_2)R_2 = 0 \rightarrow R_2 + R - 2R_2 = 0$$

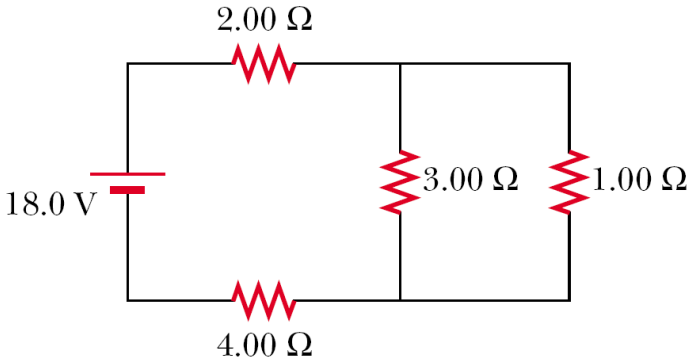
Luego, la potencia será máxima si

$$R_2 = R$$

es decir, se debe colocar una resistencia igual a la resistencia interna de la batería

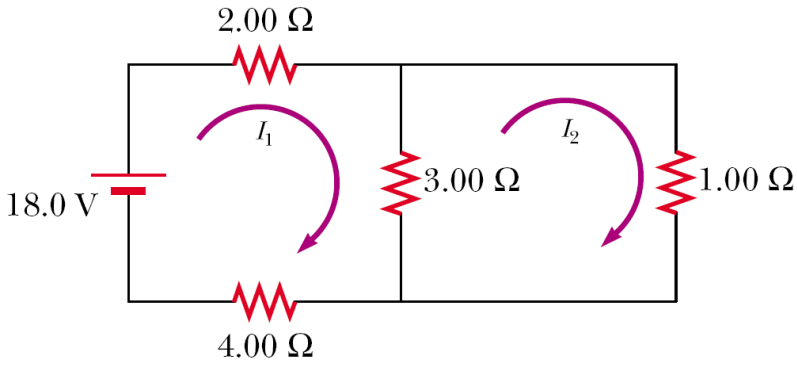
Problema

Calcule la potencia entregada a cada resistencia en el circuito de la figura



Solución

Se resuelve el circuito mediante LVK



Para la malla 1

$$-18 + 2I_1 + 3(I_1 - I_2) + 4I_1 = 0 \rightarrow 9I_1 - 3I_2 = 18$$

en la malla 2

$$3(I_2 - I_1) + 1I_2 = 0 \rightarrow 4I_2 = 3I_1$$

Resolviendo

$$9I_1 - \frac{9}{4}I_1 = 18 \rightarrow I_1 = 2,6A$$

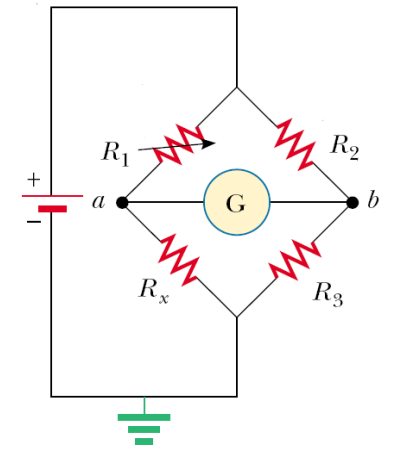
$$I_2 = \frac{3}{4}I_1 = 2A$$

Teniendo las corrientes que circulan por el circuito, podemos obtener la potencia que consume cada resistencia, usando que $P = VI = I^2R$

$$P_{2\Omega} = 2I_1^2 = 13,52W$$
$$P_{4\Omega} = 4I_1^2 = 27,04W$$
$$P_{3\Omega} = 3(I_1 - I_2)^2 = 1,08W$$
$$P_{1\Omega} = 1I_2^2 = 4W$$

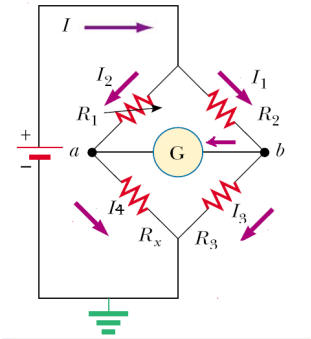
Problema

El circuito de la figura es llamado Puente de Wheastone y se usa para calibrar resistencias. El dispositivo está formado por 3 resistencias, de las cuales 2 son ajustables, y un galvanómetro (dispositivo que sirve para medir corrientes). Para realizar la medida, se ajustan las resistencias variables R_1 y R_2 hasta que el galvanómetro marque cero. Exprese el valor de R_x en función de las otras 3 resistencias. Modele el galvanómetro como una resistencia R_G.



Solución

Definamos las corrientes que circulan por el circuito



Se obtienen las relaciones inmediatas

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_3 + I_g$$

$$I = I_4 + I_3$$

$$I_4 = I_2 + I_g$$

Cuando la corriente que pasa por el galvanómetro es nula, se tiene

$$I_1 = I_3$$

$$I_2 = I_4$$

Además, utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$-V + I_2 R_2 + I_4 R_x = 0$$

$$-V + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

De esta última ecuación, se obtiene

$$I_2 = I_1 \frac{R_1}{R_2}$$

Además, igualando el valor de V

$$I_2 R_2 + I_4 R_x = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

$$I_2 R_2 + I_2 R_x = I_1 R_1 + I_1 R_3$$

$$I_1 \frac{R_1}{R_2}(R_2 + R_x) = I_1(R_1 + R_3)$$

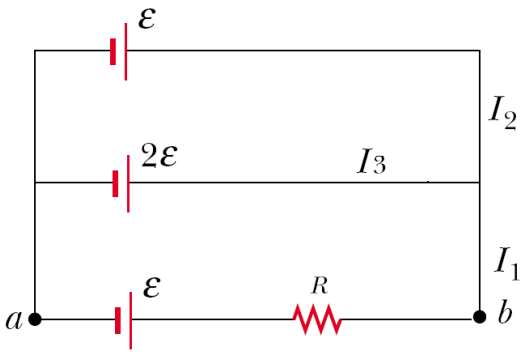
$$R_x = \frac{R_2}{R_1}(R_1 + R_3) - R_2 = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

Finalmente

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

Problema

En el circuito de la figura, la batería de más arriba y la de más abajo tienen la misma f.e.m igual a ε. La del medio tiene 2ε. Las resistencias interiores de las baterías son iguales a r. Existe una sola resistencia exterior R (ubicada como se ve en el dibujo). Designe las corrientes por I_1, I_2, I_3, como se ve en el dibujo

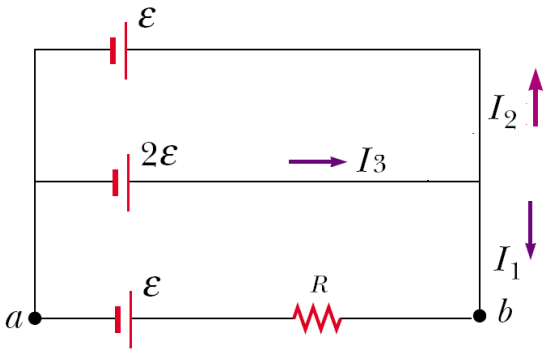


a) Calcule las tres corrientes en valor y signo.

b) Suponga que el punto a del circuito está conectado a tierra y calcule en tal caso el potencial que tiene el punto b

Solución

Definimos un sentido arbitrario para las corrientes I_1,I_2 e I_3, como se ve en la figura



Resolvemos el circuito con la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK). La ecuación para la malla 2 es

$$\varepsilon + rI_2 - 2\varepsilon + (I_2 + I_1)r = 0$$

$$-\varepsilon + 2rI_2 + rI_1 = 0$$

Para la malla 1

$$-2\varepsilon + (I_1 + I_2)r + I_1R + \varepsilon + I_1r = 0$$

$$-\varepsilon + I_2r + I_1(R + 2r) = 0$$

De la primera ecuación obtenemos

$$I_2 = \frac{\varepsilon - rI_1}{2r}$$

Así

$$-\varepsilon + \frac{\varepsilon - rI_1}{2} + I_1(R + 2r) = 0$$

$$-2\varepsilon + \varepsilon - rI_1 + 2I_1(R + 2r) = 0$$

Finalmente

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{3r + 2R}$$

y

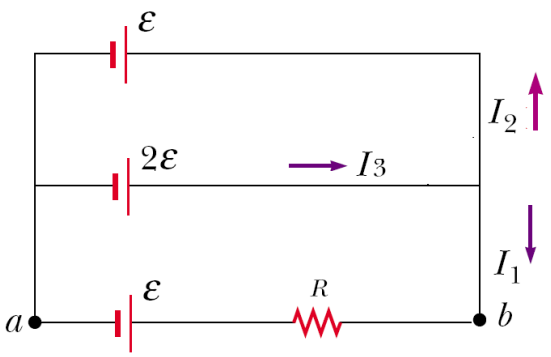
$$I_2 = \frac{\varepsilon}{2r} - \frac{r\varepsilon}{2r(3r + 2R)} = \frac{3r\varepsilon + 2R\varepsilon - r\varepsilon}{2r(3r + 2R)} = \frac{\varepsilon(r + R)}{r(3r + 2R)}$$

Por ultimo, $I_3 = I_1 + I_2$

$$I_3 = \frac{\varepsilon(r + R)}{r(3r + 2R)} + \frac{\varepsilon}{3r + 2R} = \frac{\varepsilon(2r + R)}{r(3r + 2R)}$$

Como los valores obtenidos son todos positivos, los sentidos de las corrientes supuestos inicialmente son todos correctos.

b)



De la figura es claro que

$$V_B - V_A = I_1R + \varepsilon + I_1r = I_1(R + r) + \varepsilon$$

Como A está conectado a tierra, $V_A = 0$

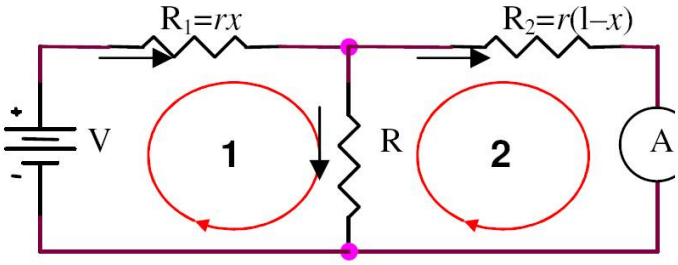
$$V_B = \varepsilon + (R + r)\frac{\varepsilon}{3r + 2R} = \varepsilon + \frac{\varepsilon(R + 2r)}{2R + 3r}$$

Problema

Considere la línea telegráfica de L metros de longitud, y de resistencia por unidad de largo r[Ω/m]. Esta línea tiene una falla de resistencia R en un punto. Demuestre que la corriente que lee un amperímetro ideal (de resistencia interna 0) conectado a un extremo de la línea es mínima cuando la falla se encuentra en el medio de la distancia entre el transmisor y el receptor.

Solución

Supongamos que la falla está a una distancia x de uno de los extremos. El sistema queda modelado por el siguiente circuito



Sea I_1 la corriente por R_1, I_2 la corriente por R_2 e I la corriente por R. Es claro que

$$I = I_1 - I_2$$

Ahora, las ecuaciones de malla son las siguientes

$$-V + R_1 I_1 + R(I_1 - I_2) = -V + rxI_1 + R(I_1 - I_2) = 0$$

$$R_2 I_2 + R(I_2 - I_1) = r(l - x)I_2 + R(I_2 - I_1) = 0$$

De la primera ecuación

$$I_1 = \frac{V + RI_2}{R + rx}$$

Reemplazando esto último

$$r(l - x)I_2 + RI_2 - R\frac{V + RI_2}{R + rx} = 0$$

$$RrlI_2 - RxrI_2 + r^2 lxI_2 - x^2 r^2 I_2 + R^2 I_2 + RrxI_2 - RV - R^2 I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{RV}{Rrl + r^2 lx - x^2 r^2}$$

$$I_2 = \frac{RV}{Rrl + r^2 x(l - x)}$$

Ahora veamos cuando esta corriente es mínima. Esto equivale a encontrar el x tal que el denominador sea máximo

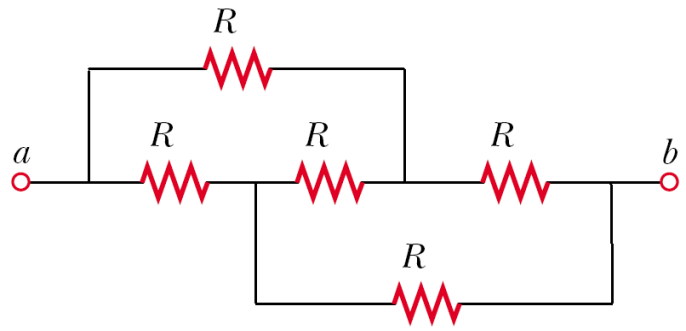
$$\frac{d}{dx}\left(Rrl + r^2xl - lr^2x^2\right) = r^2l - 2lr^2x = 0$$

$$r^2x = 2r^2l \rightarrow x = \frac{l}{2}$$

Es decir, la corriente medida es mínima cuando la falla se encuentra en la mitad de la línea

Problema

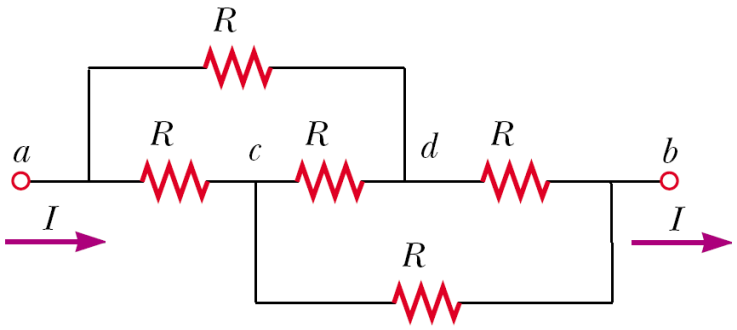
Obtener la resistencia equivalente entre A y B aplicando las leyes de Kirchhoff



Solución

La resistencia equivalente entre a y b se puede obtener al ver la relación entre el voltaje aplicado y la corriente que circula por el circuito. Se tiene

$$V_A - V_B = IR_{eq}$$



LCK para el nodo A

$$I = \frac{(V_A - V_D)}{R} + \frac{(V_A - V_C)}{R} \rightarrow IR = 2V_A - V_C - V_D$$

LCK para el nodo C

$$\frac{V_A - V_C}{R} = \frac{V_C - V_D}{R} + \frac{V_C - V_B}{R} \rightarrow V_A = 3V_C - V_B - V_D$$

Para el nodo D

$$\frac{V_C - V_D}{R} + \frac{V_A - V_D}{R} = \frac{V_D - V_B}{R} \rightarrow 3V_D - V_A - V_C = V_B$$

Y para el nodo B

$$\frac{V_D - V_B}{R} + \frac{V_C - V_B}{R} = I \rightarrow IR = V_C + V_D - 2V_B$$

Resolviendo

$$V_B - V_A = 3V_D - V_A - V_C - 3V_C + V_B + V_D$$

$$V_B - V_A = 4V_D - V_A - 4V_C + V_B \rightarrow V_D = V_C$$

Es decir, la corriente entre D y C es cero. Así, el sistema queda

$$IR = 2V_A - 2V_C$$

$$V_A = 2V_C - V_B$$

$$IR = 2V_C - 2V_B$$

Luego

$$\frac{V_A + V_B}{2} = V_C$$

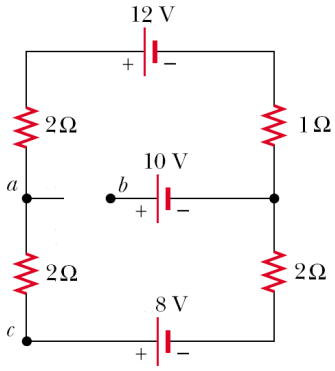
Así

$$IR = V_A - V_B = IR_{eq}$$

Con lo que la resistencia equivalente es R

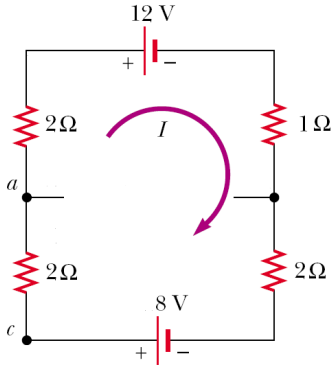
Problema

Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b. Todas las fem tienen una resistencia interna de 1 Ω



Solución

Para resolver este problema basta con notar que solo fluye corriente por la malla exterior, ya que a y b forman un circuito abierto. Aplicando LVK alrededor del circuito se obtiene



$$2I + 2I + 12 + I + I + 2I - 8 + I = 0 \rightarrow 9I = -4$$

$$I = -4/9A$$

Redefinamos I con su sentido correcto, es decir, el contrario al que habíamos supuesto. Así, $I = 4/9$ en el sentido contrareloj.

Para obtener los potenciales en a y b, nos damos como referencia el punto c. Con esto

$$V_a = 2I + V_c = 8/9 + V_c$$

Mientras que

$$V_c - 8 - I - 2I + 10 = V_b$$

$$V_b = V_c - 8 - \frac{12}{9} + 10 = V_c + 0,667$$

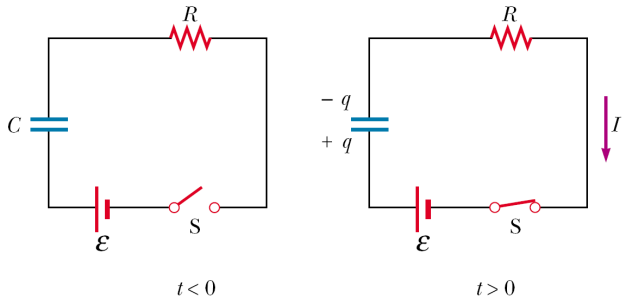
Notar que no existe una caída de potencial a través de la resistencia de 3Ω ya que por ella no pasa corriente. Finalmente

$$V_b - V_a = 0,667 - 0,888 = -0,221V$$

11.5. Circuitos RC

11.5.1. Carga de un condensador

Considere el circuito de la figura. El condensador está conectado a una fuente de voltaje DC (corriente continua) de fem ε. En $t = 0$ el interruptor S se cierra. Supongamos además que el condensador inicialmente está descargado, $q(t = 0) = 0$



En particular, para $t < 0$, no hay voltaje entre los terminales del condensador, asi que éste actúa como un corto circuito. Cuando $t = 0$, el interruptor se cierra y la corriente comienza a fluir acorde con

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

En este instante, la diferencia de potencial entre los terminales de la batería es la misma que la diferencia de potencial a través de la resistencia. Esto inicia la carga del condensador. Mientras éste comienza a cargarse, el voltaje a través de él aumenta en el tiempo

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Para la malla utilizamos la ley de voltajes para un circuito cerrado, obteniendo

$$-\varepsilon + V_C(t) + I(t)R = 0$$

$$-\varepsilon + \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt}R = 0$$

Debido a que I debe ser la misma en todas las partes del circuito, la corriente a través de la resistencia R es igual a la tasa de incremento de carga en las placas del condensador. El flujo de corriente en el circuito irá decreciendo debido a que la carga presente en el capacitor haga cada vez más difícil poner más carga en él. Una vez que la carga del condensador alcanza su maximo valor Q, la corriente en el circuito caerá a cero. Esto es evidente al reescribir la ecuación de malla como

$$I(t)R = \varepsilon - V_C(t)$$

Así, el capacitor cargado satisface una ecuación diferencial de primer orden que relaciona la tasa de cambio de carga con la carga en el condensador

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R}\left(\varepsilon - \frac{q}{C}\right)$$

Esta ecuación la podemos resolver con el método de separación de variables

$$\frac{dq}{\varepsilon - \frac{q}{C}} = \frac{1}{R}dt \rightarrow \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC}dt$$

Ahora podemos integrar para obtener

$$\int_0^q \frac{dq}{\varepsilon - \frac{q}{C}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

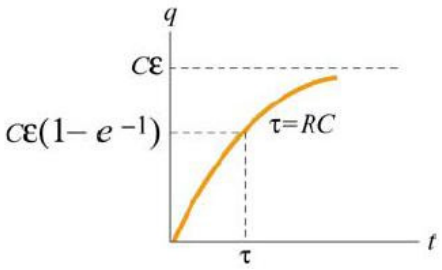
Lo que nos lleva a

$$\ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Finalmente, se obtiene

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Donde $Q = C\varepsilon$ es la cantidad máxima de carga almacenada por las placas. La independencia temporal de $q(t)$ se grafica en la figura



Teniendo la carga en el condensador, podemos determinar el voltaje a través de éste

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

El gráfico del voltaje como función del tiempo tiene la misma forma que la carga a través del condensador. De la figura, vemos que después de un tiempo suficientemente largo la carga acumulada en el condensador tiende a

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = C\varepsilon = Q$$

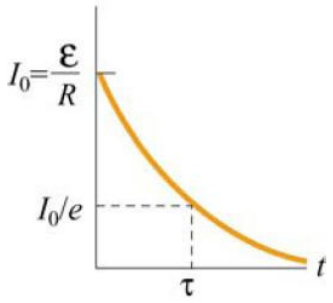
En el límite, el voltaje a través del condensador es igual al voltaje de la fuente y el proceso de carga efectivamente termina

$$\lim_{t\to\infty} V_C(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

La corriente en el circuito es igual a la razón de cambio de la carga en el condensador

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

El coeficiente que acompaña a la exponencial es igual a la corriente inicial que fluye a través del circuito cuando el interruptor fue cerrado en $t = 0$. El gráfico de la corriente en función del tiempo es



La corriente en el circuito decrece exponencialmente en el tiempo. Se suele escribir de la siguiente manera

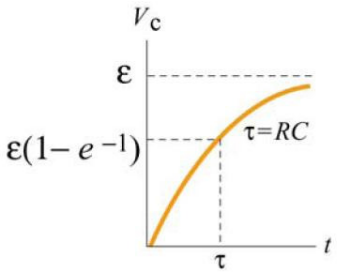
$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Donde $\tau = RC$ se llama **constante de tiempo**. En efecto, la unidad de τ en SI es el segundo. La constante de tiempo τ es una medida del decaimiento temporal para la función exponencial. Este decaimiento satisface la siguiente propiedad

$$I(t + \tau) = I(t)/e$$

Lo que muestra que despues de un tiempo τ la corriente cae por un factor de $e^{-1} = 0{,}368$, como se ve en el gráfico. Similarmente, el voltaje a través del condensador también se puede expresar en términos de esta constante

$$V_C(t) = \varepsilon \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

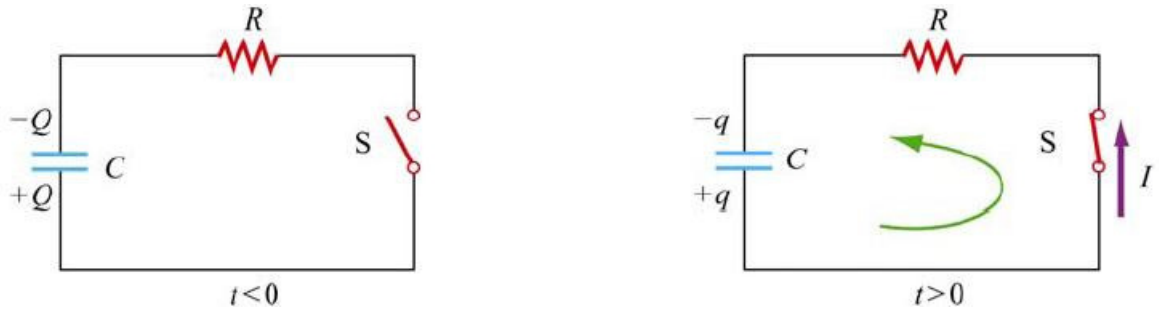


Notar que inicialmente en $t = 0$, $V_C(t = 0) = 0$. Después de un tiempo τ, la diferencia de potencial a través del condensador ha aumentado un factor $(1 - e^{-1}) = 0{,}632$ de su valor final.

$$V_C(\tau) = \varepsilon \left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}632\varepsilon$$

11.5.2. Descarga de un Condensador

Suponga ahora que el condensador ha sido cargado hasta un valor Q. Para $t < 0$, el interruptor está abierto y la diferencia de potencial a través del condensador está dada por $V_C = Q/C$. Por otro lado, la diferencia de potencial a través de la resistencia es cero por que no hay un flujo de cargas, esto es $I = 0$. Ahora supongamos que en $t = 0$ el interruptor se cierra. El condensador comenzará a descargarse



El condensador cargado ahora actúa como una fuente de voltaje para conducir corriente alrededor del circuito. Cuando el condensador se descarga (el flujo de electrones va desde la placa negativa hasta la placa positiva), el voltaje entre sus extremos disminuye. Usando la ley de Kirchhoff para un circuito cerrado

$$\frac{q(t)}{C} - I(t)R = 0$$

Además se cumple

$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

El signo se debe al hecho de que un flujo de corriente implica una disminución en la diferencia de polaridad de las placas del condensador. Así, la carga satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{q(t)}{C} + R\frac{dq(t)}{dt} = 0$$

que también se puede resolver mediante el método de separación de variables

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

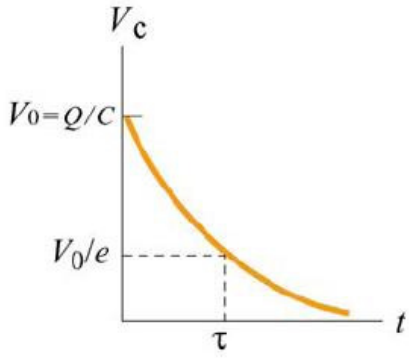
Así

$$q(t) = Qe^{-t/RC}$$

Y el voltaje a través del condensador es

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = (\frac{Q}{C})e^{-t/RC}$$

El gráfico del voltaje a través del capacitor en función del tiempo

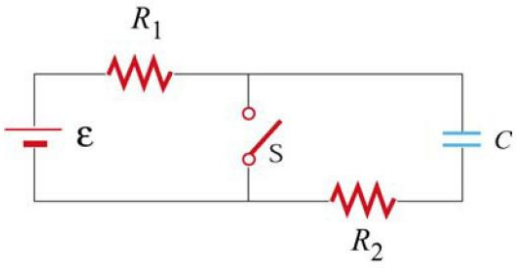


La corriente también decae exponencialmente en el circuito

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC}$$

Problema

En el circuito de la figura, suponga que el interruptor ha estado abierto por un tiempo muy largo. En $t = 0$ se cierra



a) Cual es la constante de tiempo antes de que se cerrara el interruptor?
b) Cual es la constante de tiempo después de que se cierra el interruptor?
c) Encuentre la corriente a través del interruptor como función del tiempo una vez que el interruptor se ha cerrado.

Solución

a) Antes que el interruptor se cerrara, las dos resistencias R_1 y R_2 están en serie con el condensador. Debido a que la resistencia equivalente es $R_{eq} = R_1 + R_2$, la constante de tiempo está dada por

$$\tau = R_{eq}C = (R_1 + R_2)C$$

Y la carga almacenada en el condensador es

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

b) Una vez que el interruptor se cierra, el circuito cerrado a la derecha se vuelve un circuito RC que decae con constante de tiempo $\tau' = R_2C$. La carga comienza a decaer acorde a

$$q'(t) = C\varepsilon e^{-t/\tau}$$

c) La corriente a través del interruptor consiste en 2 fuentes, la corriente constante I_1 del circuito izquierdo, y la corriente que decae I_2 del circuito RC. Las corrientes están dadas por

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

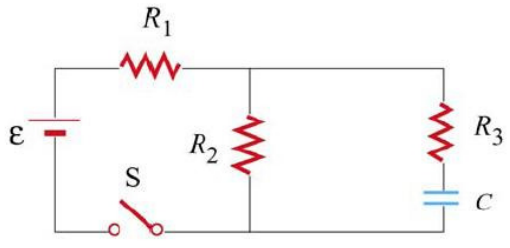
$$I'(t) = \frac{dq'}{dt} = -\frac{C\varepsilon}{\tau'}e^{-t/\tau} = -\frac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/R_2C}$$

Así, ya que I_1 e I' van en la dirección hacia abajo a través del interruptor, la corriente total será

$$I(t) = I_1 + I'(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/R_2C}$$

Problema

Considere el circuito de la figura. Sea $\varepsilon = 40V$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 4\Omega$ y $C = 4\mu F$. El condensador inicialmente está descargado



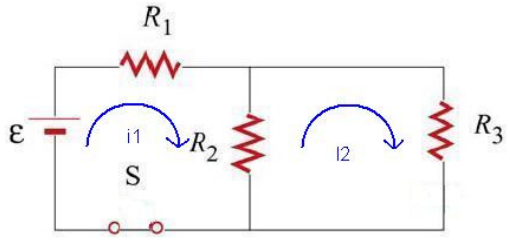
En $t = 0$ el interruptor se cierra.

a) Encuentre la corriente a través de cada resistencia inmediatamente después de que el interruptor es cerrado.

b) Encuentre la carga final del capacitor.

Solución

a) Inmediatamente después de que el interruptor se cierra, el condensador equivale a un corto circuito, ya que el voltaje en $t = 0$ a través de éste es nulo. Es decir, en el instante justo en que se cierra el interruptor el circuito equivale a



Para la malla 1

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + R_2(I_1 - I_2) = 0$$

Para la malla 2

$$R_2(I_2 - I_1) + I_2 R_3 = 0$$

Reemplazando los valores numéricos, se tiene

$$-40 + 8I_1 + 6(I_1 - I_2) = 0 \rightarrow I_1 = \frac{40 + 6I_2}{14}$$

$$6(I_2 - I_1) + 4I_2 = 0 \rightarrow I_2 = \frac{3}{5} I_1$$

Resolviendo este sistema

$$70I_1 = 200 + 18I_1 \rightarrow I_1 = 3,84A$$

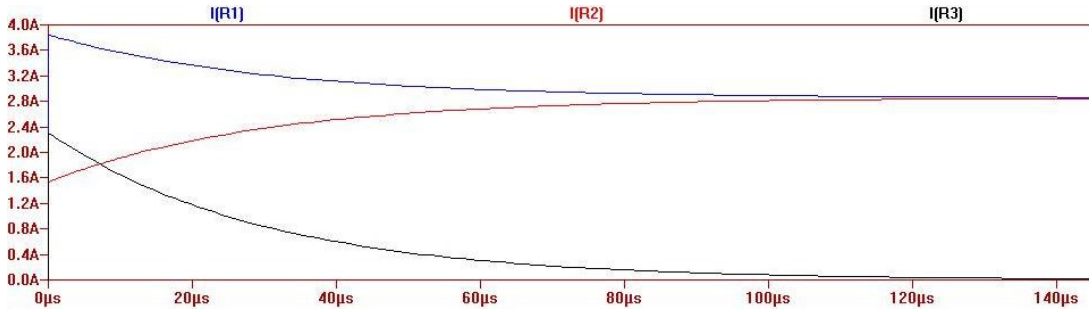
con esto

$$I_2 = 2,3A$$

Finalmente la corriente por R_2 será

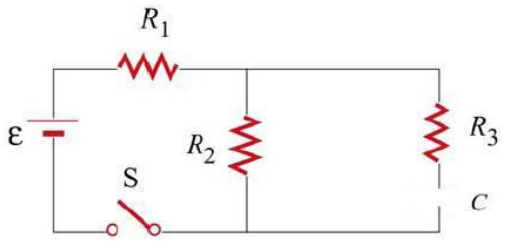
$$I_3 = I_1 - I_2 = 3,84 - 2,3 = 1,54$$

Simulando el circuito, obtenemos las corrientes como función del tiempo



Notar que en $t = 0$ los valores coinciden con los obtenidos recién. Ver también como el circuito llega a un estado estacionario en un margen de tiempo de los 120 μ s.
Por último, es claro como la corriente I_3 decae rápidamente a cero a medida que el condensador se va cargando.

b) Después de un tiempo, el condensador se carga totalmente y este pasa a comportarse como un circuito abierto, es decir, a través del condensador no pasa corriente.(y tampoco por R_3)



Así, es fácil notar que el voltaje final a través del condensador será igual al voltaje a través de la resistencia R_2.

$$-\varepsilon + I(R_1 + R_2) = 0 \rightarrow I = \frac{40}{14} = \frac{20}{7}$$

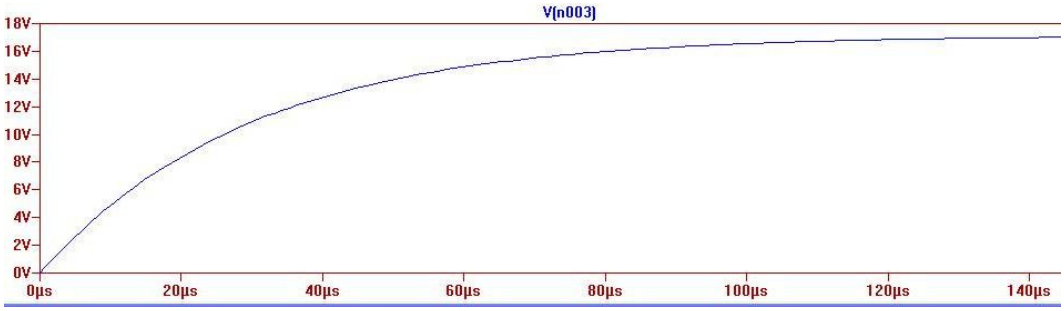
Y el voltaje a través de R_2 será

$$V_{R2} = IR_2 = 6\frac{20}{7} = 17,14(V) = V_C(t = \infty)$$

Así, la carga final del condensador se puede obtener como

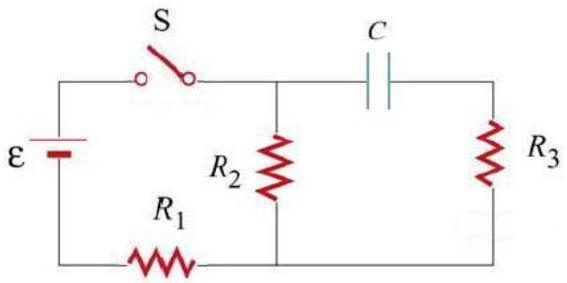
$$Q(t = \infty) = CV_C = 4\mu F * 17,14 = 6,85 * 10^{-5}C$$

El voltaje en el condensador en función del tiempo es



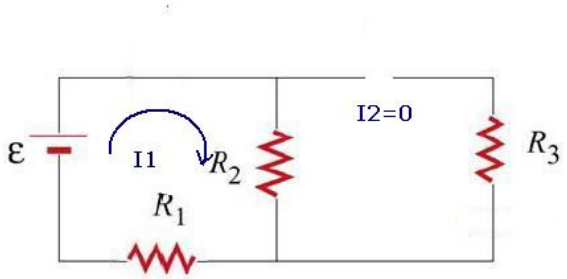
Problema

En el circuito de la figura, el interruptor se encuentra cerrado durante un tiempo muy largo.
a) ¿Cuál es la corriente en cada resistencia?
b) ¿Cuál es la carga en el condensador C?
c) En t=0 se abre el interruptor S. Encuentre la corriente que pasa por la resistencia R_2 en función de t.
d) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la carga en C disminuya hasta 4/5 del valor en t=0?



Solución

a) El interruptor ha estado cerrado durante un tiempo muy largo, esto significa que el condensador se ha cargado completamente. Cuando esto sucede, el condensador equivale a un circuito abierto, es decir, no pasa corriente a través de él. Bajo estas circunstancias, sólo habrá corriente por la malla 1, así



LVK en malla 1

$$-\varepsilon + I_1 R_2 + I_1 R_1 = 0 \rightarrow I_1 = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Que es la corriente por R_1 y por R_2, por lo dicho anteriormente, la corriente por R_3 es cero.

b) Para obtener la carga en el condensador, primero debemos obtener el voltaje a través de él, y luego utilizar la relación que relaciona el voltaje con la carga acumulada

$$V_C(t) = Cq(t)$$

Nos interesa la carga final del condensador, esto es

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \frac{V_C(t \to \infty)}{C}$$

Como ya vimos, después de un tiempo suficientemente largo no hay corriente por la malla derecha, así, no hay una diferencia de potencial a través de R_3. Por lo tanto el voltaje en el condensador será igual al voltaje a través de R_2

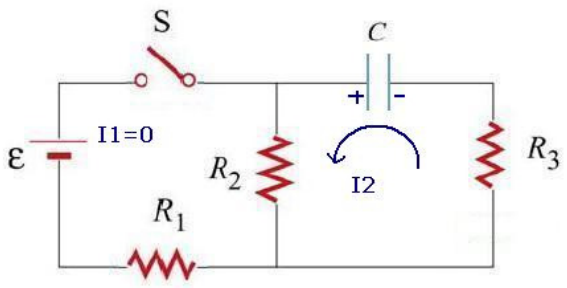
$$\lim_{t\to\infty} V_C(t) = V_{R_2} = I_1 R_2$$

$$V_C(\infty) = \frac{V R_2}{R_1 + R_2}$$

y así

$$q = CV = \frac{VCR_2}{R_1 + R_2}$$

c) Notemos que al abrir el interruptor, no pasa corriente por la malla 1 y se inicia un proceso de descarga en el condensador.



Si esto no parece evidente, veamos la ecuación de la malla 2

$$I_2 R_3 - V_C(t) + R_2 I_2 = 0$$

$$I_2(R_2 + R_3) = V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Notemos que I_2 es positiva, es decir, el sentido que le asignamos es el correcto. Esto significa que cargas positivas están dejando la placa positiva y están llegando a la placa negativa. Es decir, la carga entre las placas va disminuyendo en la medida en que I_2 sea positiva. Esto se traduce en

$$I_2 = -\frac{dq}{dt}$$

Así, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para $q(t)$

$$-\frac{dq}{dt}(R_2+R_3)=\frac{q(t)}{C}$$

$$\frac{dq}{dt}(R_2+R_3)+\frac{q(t)}{C}=0$$

Ecuación homogénea cuya solución es de la forma

$$q(t)=q_0e^{-t/(C(R_2+R_3))}$$

con q_0 la carga inicial del condensador, calculada anteriormente como

$$q_0=\frac{R_2VC}{(R_1+R_2)}$$

Finalmente,

$$I(t)=-\frac{dq}{dt}=\frac{q_0}{C(R_2+R_3)}e^{-t/C(R_2+R_3)}$$

d) Para determinar el tiempo que debe pasar para obtener 4/5 de la carga inicial, resolvemos la ecuación

$$\frac{4}{5}q_0=q_0e^{-t/(C(R_2+R_3))}$$

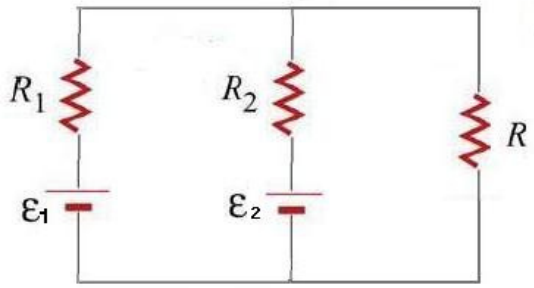
$$\ln(4/5)=-\frac{t}{C(R_2+R_3)}$$

con lo que

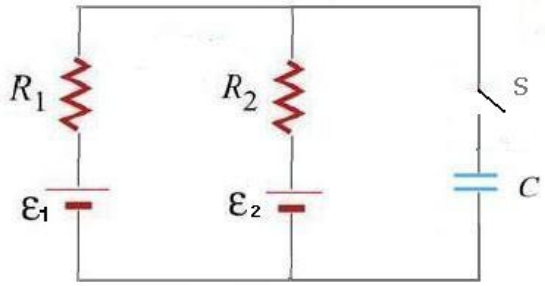
$$t=\ln(5/4)(R_2+R_3)C$$

Problema

Dos baterías de FEM ε_1 y ε_2 y resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo con una resistencia R



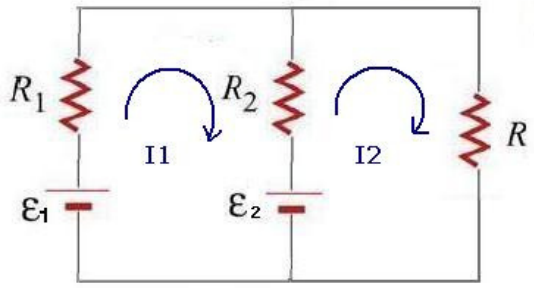
a) Calcule la potencia entregada por cada batería
b) Ahora se reemplaza la resistencia R por un interruptor S y un condensador C en serie.



El interruptor se cierra en t=0
i) Calcule la carga q en el condensador como función del tiempo
ii) Calcule la corriente en cada resistencia como función del tiempo

Solución

a)Para obtener la potencia entregada por cada batería, debemos conocer la corriente que pasa por cada una, y lo hacemos usando la LVK para las mallas 1 y 2, como se muestra en la figura



Para la malla 1

$$-\varepsilon_1 + I_1 R_1 + R_2(I_1 - I_2) + \varepsilon_2 = 0$$

En la malla 2

$$-\varepsilon_2 + R_2(I_2 - I_1) + I_2 R = 0$$

De la primera ecuación se obtiene

$$I_1 = \frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$

Reemplazando en la segunda

$$-\varepsilon_2 + I_2(R_2 + R) = I_1 R_2 = \frac{R_2^2 I_2 + R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{R_1 + R_2}$$

Así

$$-\varepsilon_2(R_1 + R_2) + I_2(R_2 + R)(R_1 + R_2) = R_2^2 I_2 + R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$-\varepsilon_2(R_1 + R_2) + I_2(R_2 R_1 + R_2^2 + R R_1 + R R_2) = R_2^2 I_2 + R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$I_2(R_2 R_1 + R R_1 + R R_2) = R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_2(R_1 + R_2)$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Y entonces, I_1 está dada por

$$I_1 = \frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon_1 R_2^2 + \varepsilon_2 R_1 R_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)}{(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(R_1 + R2)}$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 R_2^2 + \varepsilon_2 R_1 R_2 + \varepsilon_1 R R_1 + \varepsilon_1 R_1 R_2 + \varepsilon_1 R R_2 - \varepsilon_2 R R_1 - \varepsilon_2 R R_2 - \varepsilon_2 R_1 R_2}{(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(R_1 + R2)}$$

$$I_1 = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(R_1 + R_2) + R_2 \varepsilon_1 (R_1 + R_2)}{(R(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(R_1 + R2)}$$

Finalmente,

$$I_1 = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_2 \varepsilon_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Y la corriente por la fem ε_2 es

$$I_3 = I_1 - I_2 = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

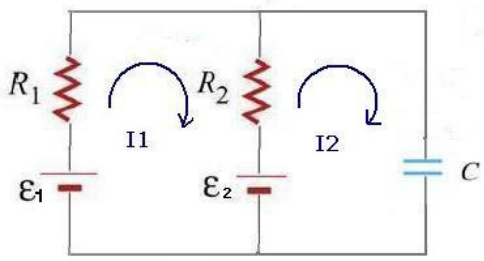
Con esto, la potencia entregada por ε_1 es

$$P_1 = I_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \frac{R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_2 \varepsilon_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Y la potencia entregada por ε_2

$$P_2 = -I_3 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \frac{R(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

b)



Aquí, la ecuación de la malla 1 es equivalente al caso anterior, donde se obtuvo

$$I_1 = \frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$

Para la malla 2

$$-\varepsilon_2 + R_2(I_2 - I_1) + V_C = 0 \rightarrow -\varepsilon_2 + R_2 I_2 - R_2 I_1 + \frac{q}{C} = 0$$

Reemplazando I_1

$$-\varepsilon_2 + R_2 I_2 - R_2(\frac{R_2 I_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}) + \frac{q}{C} = 0$$

$$-\varepsilon_2 + \frac{R_2^2 I_2 + R_1 R_2 I_2 - R_2^2 I_2 - R_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{R_1 + R_2} + \frac{q}{C} = 0$$

$$I_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Pero $I_2 = dq/dt$

$$\frac{dq}{dt}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{dq}{dt}\frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2} + q = C\frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Sean

$$\tau = \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2}, A = C\frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Entonces

$$\frac{dq}{dt}\tau + q = A$$

Cuya solución es

$$q(t) = A(1 - e^{-t/\tau})$$

Con esto,

$$I_2(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}$$

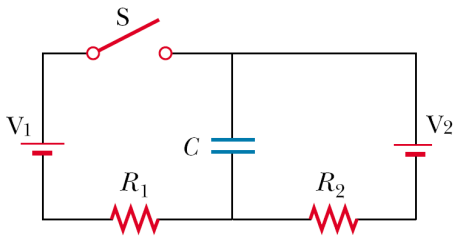
$$I_1(t) = (\frac{R_2}{R_1 + R_2})\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$

Y la corriente por R_2

$$I_3(t) = I_1(t) - I_2(t) = (\frac{R_2}{R_1 + R_2})\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2} - \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}$$

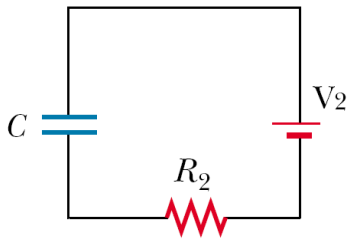
Problema

Considere el circuito de la figura. Inicialmente el circuito ha estado abierto largo tiempo
a) Calcule la carga del condensador, con el interruptor abierto
b) Si el interruptor se cierra y transcurre mucho tiempo, encuentre la nueva carga del condensador



Solución

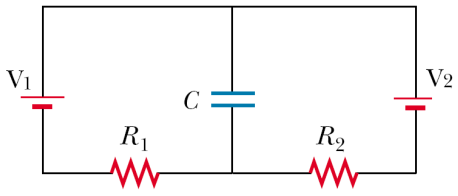
a) Antes que se cierre el interruptor, sólo se debe considerar el circuito de la derecha



Si ha pasado mucho tiempo, ha dejado de circular corriente y el condensador está cargado completamente

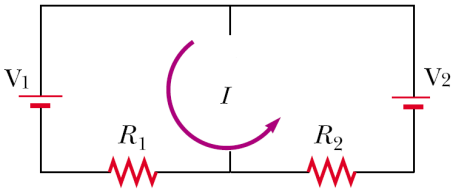
$$Q = CV$$

b) Si se cierra el interruptor, el circuito es el siguiente



Como ha pasado mucho tiempo, el condensador está cargado y no hay corriente hacia él.

De esta forma, la corriente circula según



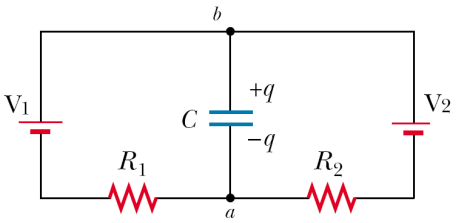
Se tiene

$$V_1 + I(R_1 + R_2) - V_2 = 0$$

Luego

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R_1 + R_2}$$

Con esto podemos determinar la diferencia de potencial entre los terminales del condensador



Sea

$$\Delta V = V_b - V_a$$

$$-\Delta V + V_1 + IR_1 = 0$$

Luego

$$\Delta V = \frac{R_1 V_2 + R_2 V_1}{R_1 + R_2}$$

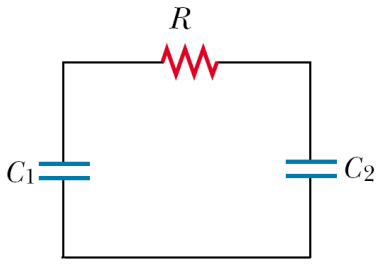
con esto, la carga almacenada en el condensador es

$$Q = C\Delta V$$

$$Q = C\frac{R_1 V_2 + R_2 V_1}{R_1 + R_2}$$

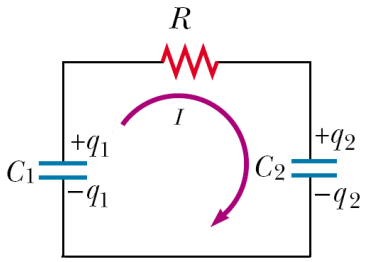
Problema

Inicialmente el condensador de capacidad C_1 tiene carga Q_0, y el segundo condensador está descargado. Encuentre la pérdida de energía por calor de Joule al conectar ambos condensadores mediante un conductor de resistencia R, como muestra la figura



Solución

Definimos la corriente por el circuito según se muestra en la figura



La ecuación de la malla entrega

$$-V_1 + IR + V_2 = 0$$

donde los voltajes entre los extremos de cada condensador se relacionan con las cargas

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

La ecuación a resolver es

$$-\frac{Q_1}{C_1} + IR + \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Pero Q_1, Q_2 e I no son independientes. En efecto

$$I(t) = \frac{dQ_2}{dt} = -\frac{dQ_1}{dt}$$

Notar que esto es consistente con

$$\frac{d}{dt}(Q_1 + Q_2) = 0$$

pues por conservación de la carga

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_0$$

Luego, derivando una vez con respecto al tiempo

$$-\frac{1}{C_1}\frac{dQ_1}{dt}+\frac{dI(t)}{dt}R+\frac{1}{C_2}\frac{dQ_2}{dt}=0$$

$$\frac{1}{C_1}I(t)+\frac{dI(t)}{dt}R+\frac{1}{C_2}I(t)=0$$

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$$

Finalmente

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\frac{1}{R}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)I(t)$$

La solución de esta ecuación es

$$I(t)=Ke^{-\frac{1}{R}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)t}$$

donde K es una constante a determinar. Considerando que el condensador 2 está inicialmente descargado

$$Q_2(0)=0$$

Se tiene

$$Q_2(t)=\int_0^t d\tau I(\tau)=K\int_0^t d\tau e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)t}$$

$$Q_2(t)=\frac{KRC_1C_2}{C_1+C_2}\left(1-e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)t}\right)$$

La constante K se puede determinar imponiendo que para todo $t\in\mathbb{R}^+$

$$-\frac{Q_1(t)}{C_1}+I(t)R+\frac{Q_2(t)}{C_2}=0$$

Como $Q_1(t)=Q_0-Q_2(t)$

$$-\frac{Q_0}{C_1}+\frac{Q_2(t)}{C_1}+I(t)R+\frac{Q_2(t)}{C_2}=0$$

$$-\frac{Q_0}{C_1}+\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)Q_2(t)+I(t)R=0$$

Reemplazando

$$-\frac{Q_0}{C_1}+\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)KR\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\left(1-e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)t}\right)+RKe^{-\frac{1}{R}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)t}=0$$

$$-\frac{Q_0}{C_1}+KR=0$$

Luego

$$K = \frac{Q_0}{RC_1}$$

Equivalentemente uno podría haber notado que en $t = 0$, el condensador 2 se comporta como un cortocircuito, y el voltaje inicial en el condensador 1 es

$$V_1(0) = \frac{Q_0}{C_1}$$

de forma que

$$I(0) = \frac{V_1(0)}{R} = \frac{Q_0}{C_1 R}$$

La potencia disipada en la resistencia está dada por

$$P(t) = RI^2(t) = R\frac{Q_0^2}{R^2C_1^2}e^{-2\frac{(C_1+C_2)}{RC_1C_2}t}$$

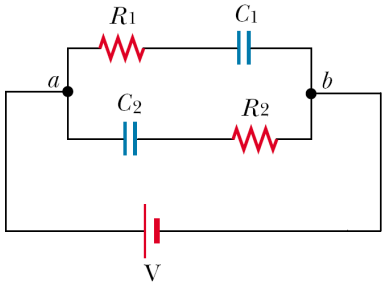
y la energía perdida será

$$-\Delta E = \int_0^\infty dt \frac{Q_0^2}{RC_1^2}e^{-\frac{2(C_1+C_2)}{RC_1C_2}t} = \frac{Q_0^2C_2}{2C_1(C_1+C_2)}$$

Notar que es independiente de R! Esta pérdida de energía coincide exactamente con la diferencia de energía almacenada por el sistema antes y después de conectar ambos condensadores

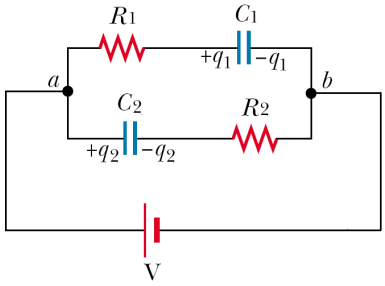
Problema

Encuentre en el circuito de la figura la intensidad de corriente eléctrica por cada rama y la carga en cada condensador al tiempo t. Asuma que inicialmente los condensadores están descargados



Solución

Definimos las corrientes que se indican en la figura, asi como las cargas en cada condensador



Por supuesto que debe tenerse

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t)$$

Tomando el circuito cerrado que involucra a la fuente, la resistencia R_1 y el condensador C_1 se tiene

$$-V + I_1(t)R_1 + \frac{Q_1}{C_1} = 0$$

Por otro lado, considerando el circuito cerrado que contiene a V, R_2 y C_2

$$-V + I_2R_2 + \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Además se tiene

$$I_1(t) = \frac{dQ_1(t)}{dt}$$

$$I_2(t) = \frac{dQ_2}{dt}$$

De esta forma, y derivando las ecuaciones obtenidas anteriormente

$$\frac{1}{C_1}\frac{dQ_1(t)}{dt} + R_1\frac{dI_1(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{C_1}I_1(t) + R_1\frac{dI_1(t)}{dt} = 0$$

luego

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} I_1(t)$$

del mismo modo

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} I_2(t)$$

Resolviendo

$$I_1(t) = K_1 e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}$$

$$I_2(t) = K_2 e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}$$

Las constantes K_1 y K_2 se determinan de forma inmediata al considerar que en $t = 0$ ambos condensadores se comportan como un cortocircuito y entonces

$$I_1(0) = \frac{V}{R_1}$$

$$I_2(0) = \frac{V}{R_2}$$

con esto

$$I_1(t) = \frac{V}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}$$

$$Q_1(t) = V C_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C - 1}}\right)$$

$$I_2(t) = \frac{V}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}$$

$$Q_2(t) = V C_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\right)$$