FIS1533/FIZ0221 - I1

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Primer Semestre 2015 - 10 de Abril
Tiempo para responder: 120 minutos

1. Se tienen dos alambres muy largos (que se pueden asumir infinitos) cada uno uniformemente cargado con densidades de carga lineal λ uno y $\lambda/2$ el otro. Los alambres están situados paralelamente a una distancia y, el uno con respecto al otro. La magnitud de la fuerza por unidad de largo entre los alambres es

   a) $\dfrac{\lambda^2}{4\pi y\varepsilon_0}$
   b) $\dfrac{\lambda^2}{2\pi y\varepsilon_0}$
   c) $\dfrac{\lambda^2}{\pi y\varepsilon_0}$
   d) $\dfrac{2\lambda^2}{\pi y\varepsilon_0}$
   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución

   El cable con densidad de carga λ crea un campo $\vec{E} = E(y)\hat{y}$ dado por

   $$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}.$$

   Sobre un elemento dq del cable con densidad de carga $\lambda/2$ este campo ejerce una fuerza $dF = dqE(y)$. Para este cable $dq = (\lambda/2)dx$, de modo que la fuerza por unidad de largo es

   $$\boxed{\frac{F}{L} = \frac{\lambda^2}{4\pi y\varepsilon_0}}$$

2. Considere un cable aislante de largo L en el eje x, su densidad lineal de carga es $\lambda(x) = \lambda_0\frac{|x|}{L}$ con respecto al sistema de referencia indicado en la Figura 1 . ¿Cuál de las siguientes expresiones para la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}(0, y)$ producido por el cable es correcta?

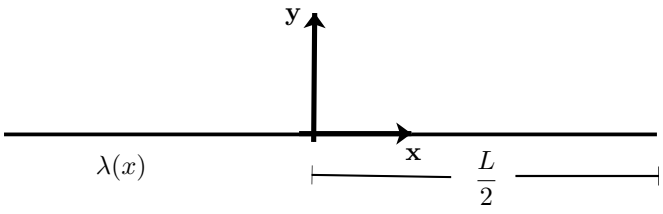


Figura 1:

   a) $\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{y^2}{(y^2 + L^2/4)}$
   b) $\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{y^2}{(y^2 + L^2/4)}$

c) $\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{y}{\sqrt{y^2+L^2/4}}$

d) $\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\big(1-\dfrac{y}{\sqrt{y^2+L^2}}\big)$

e) $\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\big(1-\dfrac{y}{\sqrt{y^2+L^2/4}}\big)$

Solución

Usemos la fórmula para el campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}.$$

En este problema $\vec{r} = y\hat{y}$, $\vec{r}' = x'\hat{x}$, $dq = \lambda dx'$. Reemplazando en el campo eléctrico nos queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda_0|x'|(y\hat{y}-x'\hat{x})}{(x'^2+y^2)^{3/2}}.$$

La componente $\hat{x}$ se anula porque el integrando es impar y la integral entre $\pm L/2$ (es claro además por la geometría del problema). El integrando de la la componente $\hat{y}$ es par por lo que tenemos que

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = 2\frac{\lambda_0 y\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/2}\frac{x'}{(x'^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\big(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+L^2/4}}\big)}$$

3. Se intersectan dos esféras sólidas cargadas E_1 y E_2, con densidades de carga uniforme ρ_1 y ρ_2, radios $4R$ y $3R$, y centros ubicados en los puntos $(4R,0,0)$ y $(8R,0,0)$, respectivamente como indica la Figura 2 (notar que en la intersección la densidad es $\rho_1+\rho_2$). Suponiendo que las densidades de carga satisfacen la relación $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la magnitud del campo eléctrico en el punto $(12R,0,0)$?

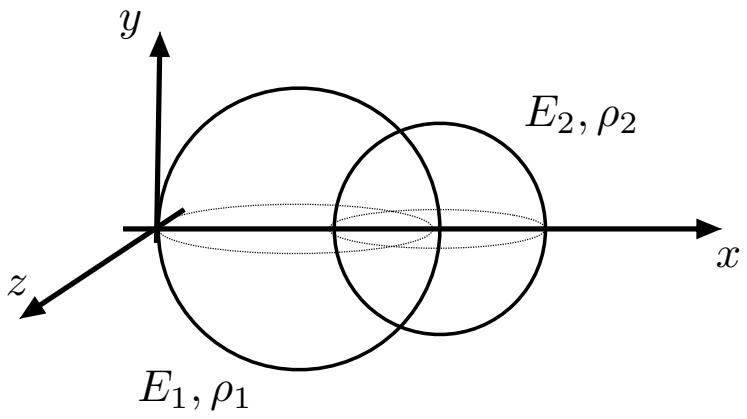


Figura 2:

a) $\dfrac{18\rho R}{27\varepsilon_0}$

b) $\dfrac{3\rho R}{8\varepsilon_0}$

c) $\dfrac{\rho R}{4\varepsilon_0}$

d) $\dfrac{43\rho R}{48\varepsilon_0}$

e) $\dfrac{47\rho R}{36\varepsilon_0}$

Solución

El punto $12R\hat{x}$ se encuentra fuera de ambas esferas por lo que el campo que cada una produce es como si fueran cargas puntuales en sus respectivos orígenes. El punto $12R$ está a distancia $8R$ del centro de E_1 y a $4R$ del centro de E_2. El campo está dirigido a lo largo del eje $\hat{x}$ y es

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(8R)^2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0(4R)^2}.$$

$$Q_1 = \rho\frac{4}{3}\pi(4R)^3; \qquad Q_2 = \rho\frac{4}{3}\pi(3R)^3.$$

Reemplazando en E resulta

$$\boxed{E = \frac{43\rho R}{48\varepsilon_0}}$$

4. Considere nuevamente las esféras de la Figura 2. Suponiendo que ambas esferas tienen carga positiva ¿Cuál debe ser la razón ρ_1/ρ_2 entre las densidades para que el campo eléctrico en el punto $(6R, 0, 0)$ sea nulo?

   a) 1/2

   b) 1/3

   c) 1

   d) 4/3

   e) Ninguna de las anteriores.

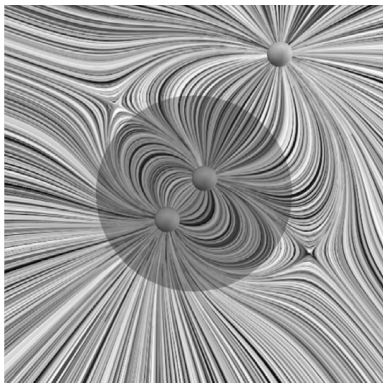
   Solución

   El punto $6R$ está a la derecha y a distancia $2R$ del centro de E_1 y a la misma distancia $2R$ pero a la izquierda cel centro de la esfera E_2, por lo tanto si las densidades son iguales estos dos campos serán de igual magnitud, pero de dirección opuesta y se cancelan.

   Por lo tanto la respuesta correcta es

   $$\boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1.}$$

5. La figura muestra las líneas de campo producidas por tres cargas con magnitud +1C, +1C y −1C (aunque no necesariamente en este orden). La superficie Gaussiana en la figura es una esfera que contiene dos de las cargas. ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta para el flujo eléctrico a través de esta superficie?



a) Es $-\frac{2\,\mathrm{C}}{\varepsilon_0}$

b) Es $\frac{2\,\mathrm{C}}{\varepsilon_0}$

c) Es cero

d) Dependerá de la distancia a que se encuentren las cargas que están adentro

e) Dependerá de la distancia a que se encuentre la carga que está afuera

Solución

En la región sombreada se ven líneas de campo que parten de una de las cargas y terminan en la otra. Esto quiere decir que las cargas son de signo opuesto, por lo tanto la respuesta correcta es

Es cero.

6. Una esfera conductora masiva con radio r_1 se encuentra dentro de un cascarón esférico conductor de radio interior r_2 y radio exterior r_3, el cual se encuentra dentro de otro cascarón esférico conductor con radio interior r_4 y radio exterior r_5. (Los radios cumplen con $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$.) Los tres conductores están posicionados en forma concéntrica. La esfera y el cascarón exterior están eléctricamente cargados con carga positiva $+2q$ y carga negativa $-q$, respectivamente, mientras el cascarón del medio está eléctricamente neutro.

   La densidad superficial de carga eléctrica en la superficie exterior del cascarón del medio es:

   a) $\sigma = -\dfrac{q}{2\pi r_2^2}$

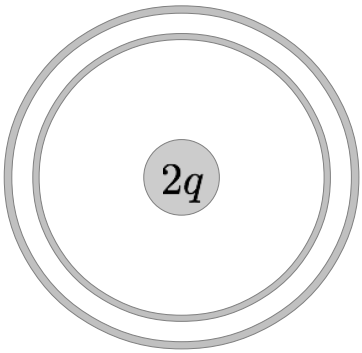
   b) $\sigma = \dfrac{q}{2\pi r_3^2}$

   c) $\sigma = \dfrac{q}{4\pi r_2 r_3}$

   d) $\sigma = \dfrac{q}{4\pi r_1^2}$

   e) $\sigma = \dfrac{q}{4\pi r_5^2}$

   Solución



Como en el interior del cascarón intermedio el campo tiene que ser cero, en la superficie interna del cascarón se coloca carga $-2q$, como es neutro por fuerza tiene que ponerse $2q$ en la cara externa de este cascarón. La densidad en esta superficie externa del cascarón del medio es

$$\boxed{\sigma = \frac{2q}{4\pi r_3^2} = \frac{q}{2\pi r_3^2}.}$$

7. Para la configuración del Problema 6 la magnitud del campo eléctrico como función del radio r en el espacio $r_3 < r < r_4$ es:

   a) $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

   b) $E(r) = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0 r^2}$

   c) $E(r) = \dfrac{q r_3^2}{\varepsilon_0 r^4}$

   d) $E(r) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

   e) $E(r) = \dfrac{q}{\frac{3\pi}{4}\varepsilon_0 r^2}$

   Solución

   Si se usa el teorema de Gauss en esta región la carga encerrada es $2q$. El campo es por lo tanto

   $$\boxed{E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

8. Para la configuración del Problema 6 el voltaje (es decir la diferencia de potencial) entre la esfera y el cascarón exterior es:

   a) $U = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_4 - r_1}{r_1 r_4} - \dfrac{r_3 - r_2}{r_2 r_3}\right)$

   b) $U = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_4}\right)$

   c) $U = 0\,\mathrm{V}$

   d) $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_3}\right)$

   e) $U = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r_1 r_4}}$

Solución

Nos piden $V(r_1) - V(r_4)$. Como los conductores están a potencial constante, sabemos que $V(r_5) = V(r_4)$ y $V(r_2) = V(r_3)$. Entonces podemos escribir $V(r_1) - V(r_4) = V(r_1) - V(r_2) + V(r_3) - V(r_4)$. Entre r_1 y r_2 y entre r_3 y r_4 el campo vale lo mismo,

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Usando la definición de diferencia de potencial entre dos puntos sale

$$\boxed{V(r_1) - V(r_4) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_4 - r_1}{r_1 r_4} - \frac{r_3 - r_2}{r_2 r_3}\right)}$$

9. Un cable coaxial consiste de un alambre metáliico con radio $r_0 = 1\,\mathrm{mm}$ y un cascaron cilíndrico metálico con radio interior $r_\mathrm{i} = 6\,\mathrm{mm}$ y radio exterior $r_\mathrm{e} = 6{,}2\,\mathrm{mm}$ que se encuentra en forma coaxial alrededor del alambre. El alambre tiene una densidad superficial de carga $\sigma = 3{,}6\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$ y el cascarón esta conectado a tierra. El largo del cable es $L \gg r_\mathrm{e}$ y sí se pueden despreciar los efectos en los extremos del cable.
Aviso: Usar $\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C\,V^{-1}\,m^{-1}}$.

(Nota: Objeto conectado a tierra significa que via un cable conductor el objeto se conecta a un conductor infinitamente grande (tierra).)

El valor máximo de la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre el alambre y el cascarón es:

a) $E_\mathrm{max} = 4\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$
b) $E_\mathrm{max} = 20\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$
c) $E_\mathrm{max} = 40\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$
d) $E_\mathrm{max} = 80\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$
e) $E_\mathrm{max} = 400\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$

Solución

El campo eléctrico es mas intenso cerca del cilindro interno y decae al alejarse, por lo tanto su mayor valor es en $r = r_0$. Como se trata de la superficie de un conductor sabemos que

$$E(r_0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}.$$

Reemplazando los valores fijándose en las unidades se encuentra

$$E_\mathrm{max} = \frac{3,6 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-12}} = 400 \times 10^3 \mathrm{Vm^{-1}}$$

y la respuesta correcta es

$$\boxed{E_\mathrm{max} = 400\,\mathrm{kV\,m^{-1}}}$$

10. Para el cable coaxial del Problema 9 la densidad superficial de carga en la superficie interior del cascarón es:

a) $\sigma_\mathrm{i} = -3\,\mathrm{C\,m^{-2}}$
b) $\sigma_\mathrm{i} = -0{,}6\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$
c) $\sigma_\mathrm{i} = -1{,}2\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$
d) $\sigma_\mathrm{i} = -0{,}3\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$
e) $\sigma_\mathrm{i} = -2\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$

Solución

Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro concéntrico y de radio tal que quede en el interior del cilindro externo, sabemos que el flujo es cero, puesto que el campo eléctrico es cero en el interior del conductor. Esto implica que la carga encerrada tiene que ser cero. La carga encerrada es la que esta en el cilindro interno más loa que está en la superficie interna del cilindro externo. Entonces

$$2\pi r_0\sigma + 2\pi r_i\sigma_i = 0$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\sigma_i = -\frac{\sigma r_0}{r_i} = -0{,}6\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}}$$

11. Para el cable coaxial del Problema 9 la magnitud del campo eléctrico al exterior del cascaron ($r > r_\mathrm{e}$) es:

a) $E(r) = \dfrac{2\pi r_0 L\sigma}{r^2}$

b) $E(r) = \dfrac{2\pi r_0^2\sigma}{r^2}$

c) $E(r) = \dfrac{\pi r_0 L\sigma}{r^2}$

d) $E(r) = 0\,\mathrm{V\,m^{-1}}$

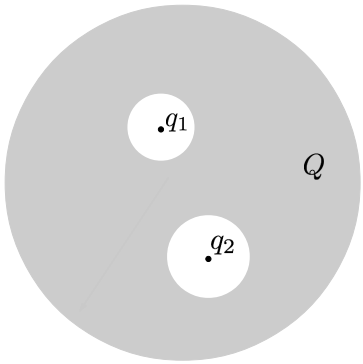
e) $E(r) = \dfrac{L^2\sigma}{r^2}$

Solución

Como el cilindro externo está conectado a tierrra su potencial es cero. No se deposita carga en la superficie externa de este cilindro por lo que el campo al exterior del cascarón es

$$\boxed{E(r) = 0\,\mathrm{V\,m^{-1}}}$$

12. Una esfera conductora de radio a tiene dos cavidades también esféricas de radios R_1 y R_2. Llamemos S a la superficie exterior y S_1 y S_2 a las superficies en torno a las cavidades como se muestra en la figura. En el centro de la cavidad de radio R_1 hay una carga puntual q_1 y en el centro de la cavidad de radio R_2 hay una carga puntual q_2. La separación entre las cargas puntuales es d y la esfera conductora tiene carga total Q.



El módulo de la fuerza sobre la carga q_1 es

a) $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

b) $F = \dfrac{Qq_1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

c) $F = 0\text{N}$

d) $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$

e) $F = \dfrac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$

Solución

Como el campo en el conductor se anula y la carga q_1 está al centro de la cavidad, la densidad superficial en la superficie S_1 se distribuye con simetría esférica y no genera campo en la cavidad. El campo en la cavidad es solamente el campo creado por q_1 y por lo tanto nada hace fuerza sobre q_1.

La solución correcta es

$$\boxed{F = 0\text{N}}$$

13. Considere nuevamente el Problema 12. Tomando como referencia el potencial en infinito igual a cero, la superficie S_1 está a potencial eléctrico

a) $V = \dfrac{Q + q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

b) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

c) $V = \dfrac{Q - q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

d) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

e) $V = \dfrac{Q + q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 (a - R_1 - R_2)}$

Solución

Sobre las superficies internas S_1 y S_2 se depositan $-q_1$ y $-q_2$ respectivamente. SObre la superficie externa se deposita entonces $Q + q_1 + q_2$ con simetría esférica. Desde fuera se ve como una carga puntual en el origen por lo tanto

$$\boxed{V = \frac{Q + q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}.}$$

14. Dos cascarones esféricos concéntricos están a potencial eléctrico V_1 y V_2 (tomamos como referencia que el potencial en infinito es cero). El radio del cascarón interior es a y el radio del cascarón exterior es $2a$. (Desprecie el grosor)

La carga en el cascarón interior es

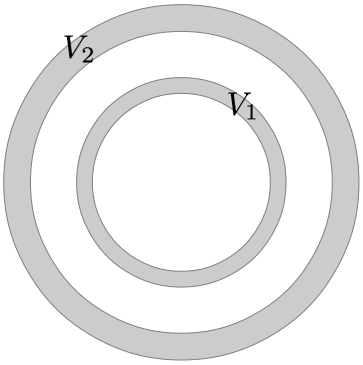
a) No se puede calcular con los datos dados

b) $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 a V_1$

c) $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 (aV_1 + bV_2)/2$

d) $Q_1 = 0\,\text{C}$

e) $Q_1 = 8\pi\varepsilon_0 a (V_1 - V_2)$



Solución

Llamemos Q_1 la carga en el cascarón interior. En la región entre $r = a$ y $r = 2a$ el campo se debe solamente a Q_1 y es

$$\vec{E}_I = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}.$$

Entonces

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1=a}^{r_2=2a} \vec{E}_I \cdot d\vec{r} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

y la alternativa correcta es

$$\boxed{Q_1 = 8\pi\varepsilon_0 a(V_1 - V_2).}$$

15. Considere la situación del Problema 14. La carga en el cascarón exterior es

a) No se puede calcular con los datos dados.
b) $Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 a(2V_2 - V_1)$
c) $Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 a V_2$
d) $Q_2 = Q_1 \dfrac{V_2}{V_1}$
e) $Q_2 = Q_1 \dfrac{V_1}{V_2}$

Solución

Si llamamos Q_2 la carga en el cascarón exterior, el campo y el potencial en $r > 2a$ son

$$\vec{E}_{II} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, \qquad V_{II} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Entonces $V_2 = V_{II}(2a)$. Usando el valor de Q_1 anterior, se despeja Q_2 y resulta

$$\boxed{Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 a(2V_2 - V_1).}$$

16. Considere la situación del Problema 14. El trabajo necesario para llevar una carga q desde infinito hasta el centro de las esferas es

a) $W = qV_1 + qV_2$
b) $W = q(V_2 - V_1)$

c) $W = -q(V_2 - V_1)$

d) $W = qV_1$

e) $W = 0\,\mathrm{J}$

Solución

El cascarón interior está a potencial V_1. Para $r < a$ no hay otras cargas y por lo tanto el potencial no cambia y $V = V_1$ para $r < a$. El trabajo es $W = q(V_{final} - V_{inicial})$ y el resultado correcto es por lo tanto,

$$\boxed{W = qV_1.}$$

17. Considere la situación del Problema 14. El trabajo necesario para llevar una carga q desde la esfera interna de radio a hasta una posición fuera de las esferas $r = 3a$ es

a) $W = \dfrac{q}{3}(2V_2 - 3V_1)$

b) $W = \dfrac{q}{3}(V_2 + 2V_1)$

c) $W = \dfrac{q}{6}(2V_2 - V_1)$

d) $W = -\dfrac{q}{2}(3V_2 - 2V_1)$

e) $W = -q(3V_2 + V_1)$

Solución

El trabajo $W = q(V(3a) - V(a))$. Sabemos $V(a) = V_1$. Y afuera el potencial es el de una carga puntual, y vale V_2 en $r = 2a$, de modo wu afuera podemos escribir

$$V = V_2\frac{2a}{r}, \quad r > 2a$$

La respuesta correcta es entonces

$$\boxed{W = \frac{q}{3}(2V_2 - 3V_1)}$$

18. Considere la siguiente distribución de carga: un plano infinito con densidad uniforme σ ubicado en el plano (x, y) y un alambre delgado de largo infinito con densidad uniforme de carga λ perpendicular al plano (que atraviesa el plano por un orificio de tamaño despreciable). Elija el eje z de modo que coincida con el alambre.

El trabajo necesario para llevar una carga q desde el punto $(1, 0, 1)$ hasta el punto $(2, 0, 2)$ es

a) $W = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 + \pi\sigma)$

b) $W = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 + \pi\sigma)$

c) $W = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 - \pi\sigma)$

d) $W = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 - \pi\sigma)$

e) $W = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 - 2\pi\sigma)$

Solución

El campo eléctrico es la suma del campo que produce el alambre más el campo que produce el plano,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{x} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}.$$

El trabajo es

$$W = q(V_f - V_i) = -q\int_{(1,0,1)}^{(2,0,2)} \vec{E}\cdot d\vec{r}.$$

Esto resulta

$$\boxed{W = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 + \pi\sigma)}$$