P1	P2	P3	P4	Nota

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 3

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Primer Semestre 2014 - 3 de Junio
Tiempo para responder: 135 minutos

Nombre: _____ **Sección:** _____

INSTRUCCIONES

- Si utiliza lápiz de grafito, perderá la posibilidad de reclamar errores de corrección.
- Se puede utilizar la calculadora.
- El profesor no se hace responsable de las respuestas que los ayudantes puedan dar a sus consultas durante el examen.
- Resolver cada problema en hojas separadas.
- Poner su nombre en cada una de las páginas de enunciado.
- Cada hoja extra debe contener el nombre y el número del problema que se está resolviendo.
- Al entregar la prueba, deberá depositar cada problema en su respectiva pila (montón). Para que el orden sea el mismo en todos los montones, es imprescindible que esto se haga de un estudiante a la vez (por favor respete a sus compañeros).

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 3

Primer Semestre 2014 - 3 de Junio

Nombre: _____ **Sección:** _____

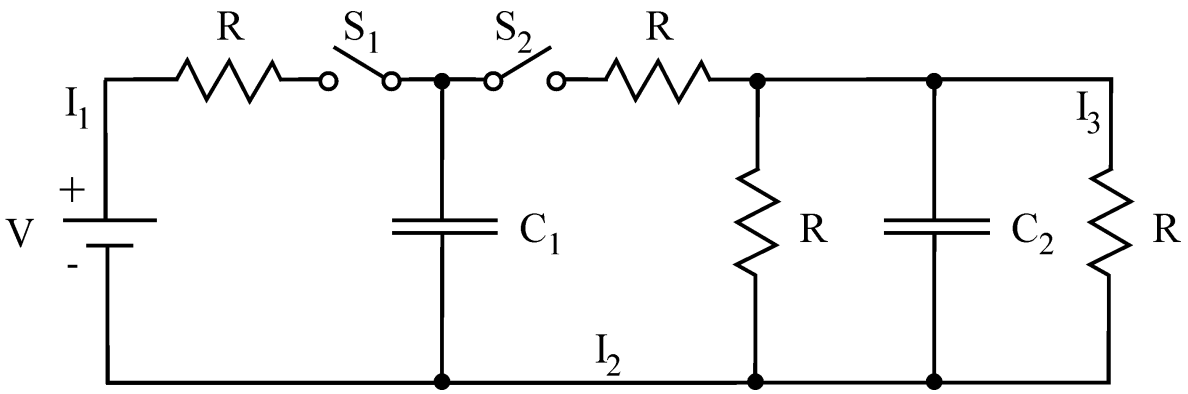
Problema 1

Un circuito eléctrico está compuesto de dos interruptores, dos condensadores diferentes, cuatro resistores iguales y una fuente de voltaje continua como muestra la figura. Los dos condensadores estan inicialmente descargados. Los dos interruptores estan inicialmente abiertos.

(a) En el instante $t = 0$ el interruptor S_1 se cierra. Encuentre, explicando cada paso, la corriente eléctrica I_1 del circuito en función del tiempo.

(b) Después de un tiempo prácticamente infinito el interruptor S_2 también se cierra. Calcule las corrientes eléctricas I_1, I_2 e I_3 inmediatamente después del momento del cierre del interruptor S_2.

(c) Actualmente, ambos interruptores están cerrados. Calcule las corrientes eléctricas I_1, I_2 e I_3 después de un tiempo prácticamente infinito.



Problema 1

a) segunda ley de Kirchhoff $\sum_i V_i = 0$

$$V + V_R + V_{C_1} = 0$$

$$\Rightarrow V - I_1 R - \frac{Q}{C_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} R + I_1 C_1^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow I_1^{-1} dI_1 = -\frac{1}{RC_1} dt$$

$$\Rightarrow \ln\left[\frac{I_1(t)}{I_{1,0}}\right] = -\frac{t}{RC_1}$$

$\frac{dQ}{dt} = I_1 > 0$ se carga

2P

$$\Rightarrow \underline{I_1(t) = I_{1,0}\, e^{-\frac{t}{RC_1}}} \quad (1P) \quad , \quad \underline{I_{1,0} = \frac{V}{R}}$$

b) $t \to \infty \Rightarrow I_1 = 0 \; , \; |V_{C_1}| = |V|$

S_2 se cierra

$$\Rightarrow \underline{I_1 = 0} \; , \; \underline{I_2 = \frac{V}{R}} \; , \; \underline{I_3 = 0}$$

(0,5P) (0,5P) (0,5P)

C_1 está cargado

C_2 está descargado

c) otra vez: $t \to \infty$

$$\Rightarrow \quad I_{c_1} = I_{c_2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{V}{2R + \frac{1}{2}R} = \underline{\underline{\frac{2}{5}\frac{V}{R}}} \qquad (0{,}5\,P)$$

$$I_2 = I_1 = \underline{\underline{\frac{2}{5}\frac{V}{R}}} \qquad (0{,}5\,P)$$

$$I_3 = \frac{I_1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{5}\frac{V}{R}}} \qquad (0{,}5\,P)$$

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 3

Primer Semestre 2014 - 3 de Junio

Nombre: _____ **Sección:** _____

Problema 2

Un espectrómetro de masa es un dispositivo que permite separar partículas según su masa m. Suponga que existe una fuente de partículas con distintas velocidades. Asuma que estas partículas han cedido o ganado solo un electrón. Luego estas partículas pueden entrar a la región 1 en donde se seleccionan según su velocidad (ver región 1 de la figura). Para esto, si el campo magnético aplicado en la región 1 es $\vec{B} = B\hat{k}$,

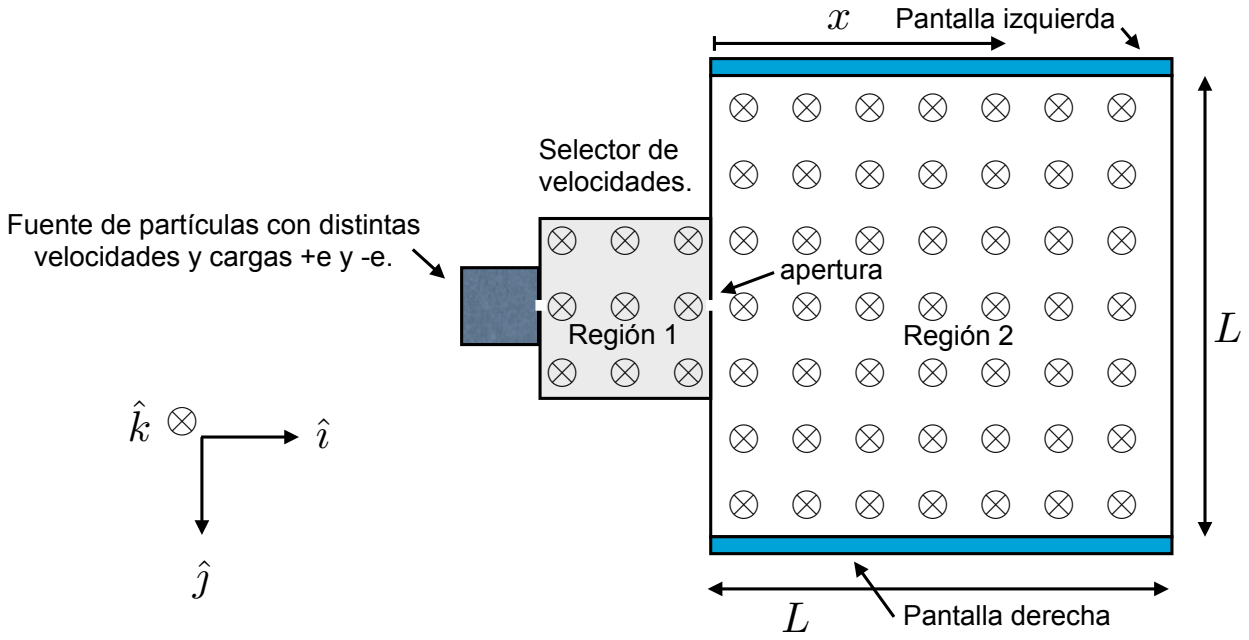
(a) (1.5 punto) Determine el campo eléctrico necesario (magnitud y dirección) para que las partículas con velocidad $v\hat{\imath}$ atraviesen la apertura indicada en la figura.

Luego de atravesar la apertura, las partículas entrarán en la región 2 en donde solo existe un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$ (el mismo que en la región 1).

(b) (1.5 punto) Qué tipo de trayectoria describirán las partículas en la región 2? Tome en cuenta el tipo de carga de la partícula.

(c) (2 puntos) Relacione la masa de la partícula m con la coordenada x que describe la posición en que la partícula golpea la pantalla.

(d) (1 puntos) Determine la masa míntima y máxima que es posible detectar con este dispositivo para un campo magnético de magnitud B y un campo eléctrico de magnitud E.



2 Problema - Solución

Un espectrómetro de masa es un dispositivo que permite separar partículas según su masa m. Suponga que existe una fuente de partículas con distintas velocidades. Asuma que estas partículas han cedido o ganado solo un electrón. Luego estas partículas pueden entrar a la región 1 en donde se seleccionan según su velocidad (ver región 1 de la figura). Para esto, si el campo magnético aplicado en la región 1 es $\vec{B} = B\hat{k}$,

(a) (1.5 puntos) Determine el campo eléctrico necesario (magnitud y dirección) para que las partículas con velocidad $v\hat{\imath}$ atraviesen la apertura indicada en la figura.

Para que la partícula no desvíe su trayectoria en la región 1, el campo eléctrico debe ejercer una fuerza contraria a la fuerza magnética que experimenta la partícula (1 punto),

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -\vec{F}_m && (1)\\ &= -(\pm e)\vec{v} \times \vec{B} && (2)\\ &= -(\pm e)v\hat{\imath} \times B\hat{k} && (3)\\ &= (\pm e)vB\hat{\jmath} && (4) \end{aligned}$$

Por otro lado, la fuerza eléctrica esta dada por $\vec{F}_e = \pm e\vec{E}$. Luego (0.5 punto),

$$\begin{aligned} \pm e\vec{E} &= (\pm e)vB\hat{\jmath} && (5)\\ \vec{E} &= vB\hat{\jmath} && (6) \end{aligned}$$

Luego de atravesar la apertura, las partículas entrarán en la región 2 en donde solo existe un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$ (el mismo que en la región 1).

(b) (1.5 puntos) Qué tipo de trayectoria describirán las partículas en la región 2? Tome en cuenta el tipo de carga de la partícula.

En presencia de un campo magnético (y ausencia de campo eléctrico) las partículas describirán una trayectoria circular (0.5 punto). El radio de giro puede ser obtenido igualando la fuerza magnética a la fuerza

centrípeta,

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{mv^2}{R}(\hat{r}) = \vec{F}_{centripeta} \quad (7)$$

$$(\pm e)vB\hat{\imath} \times \hat{k} = \frac{mv^2}{R}(\hat{r}) \quad (8)$$

$$-(\pm e)vB\hat{\jmath} = \frac{mv^2}{R}(\hat{r}) \quad (9)$$

Donde $\hat{r}$ apunta en la dirección del centro de giro en el instante en que la partícula entra a la región 2 y R es el radio de giro. Luego concluimos que,

$$\hat{r} = \mp\hat{\jmath} \qquad R = \frac{mv}{eB} \quad (10)$$

Entonces, partículas con carga positiva se desviarán hacia la pantalla izquierda, mientras que partículas con carga negativa se desviarán a la pantalla derecha (1 punto).

(c) (2 puntos) Relacione la masa de la partícula m con la coordenada x que describe la posición en que la partícula golpea la pantalla.

Si consideramos que la partícula choca a la pantalla en el punto x, la condición geométrica está dada por (1 punto),

$$R = L/2 + d, \qquad x^2 + d^2 = R^2 \quad (11)$$

Despejando y obtenemos (0.5 punto),

$$x^2 + (R - L/2)^2 = R^2 \quad (12)$$

$$x^2 + R^2 - RL + L^2/4 = R^2 \quad (13)$$

$$x^2 - RL + L^2/4 = 0 \quad (14)$$

$$R = \frac{x^2}{L} + \frac{L}{4} \quad (15)$$

Reemplazando R obtenemos (0.5 punto),

$$\frac{mv}{eB} = \frac{x^2}{L} + \frac{L}{4} \quad (16)$$

$$m = \frac{eB}{v}\left(\frac{x^2}{L} + \frac{L}{4}\right) \quad (17)$$

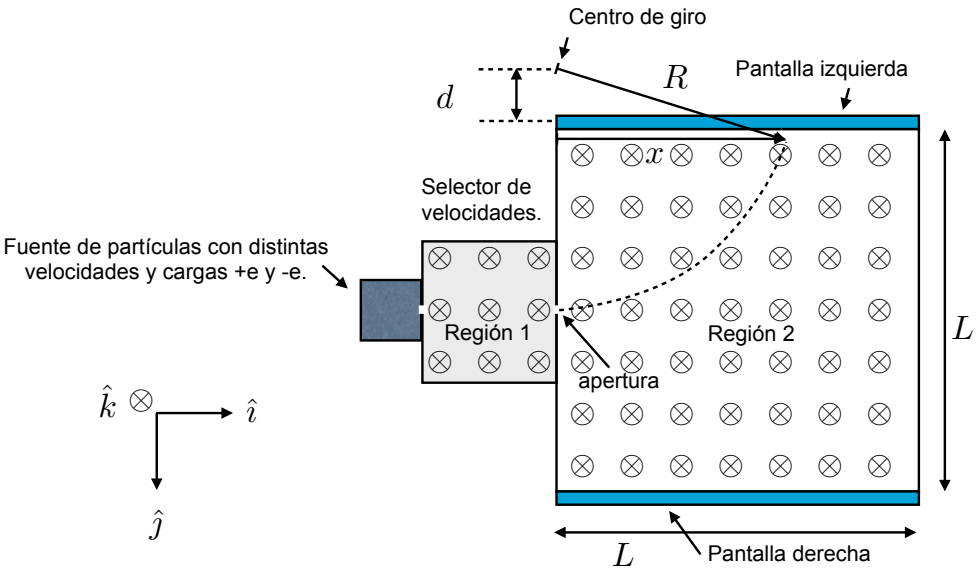
(d) (1 punto) Determine la masa míntima y máxima que es posible detectar con este dispositivo para un campo magnético de magnitud B y un campo eléctrico de magnitud E.

Los valores mínimo y máximo de x son 0 y L, respectivamente. Luego, el rango de masa está dado por (0.5 punto),

$$\frac{1}{4}\frac{eBL}{v} < m < \frac{5}{4}\frac{eBL}{v} \tag{18}$$

Reemplazando $v = E/B$ tenemos que (0.5 punto),

$$m_{min} = \frac{1}{4}\frac{eB^2L}{E} < m < \frac{5}{4}\frac{eB^2L}{E} = m_{max} \tag{19}$$



FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 3

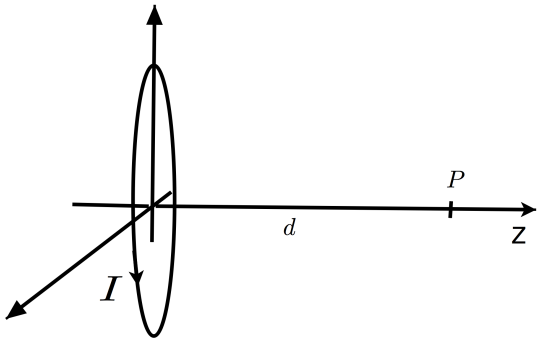
Primer Semestre 2014 - 3 de Junio

Nombre: _____ **Sección:** _____

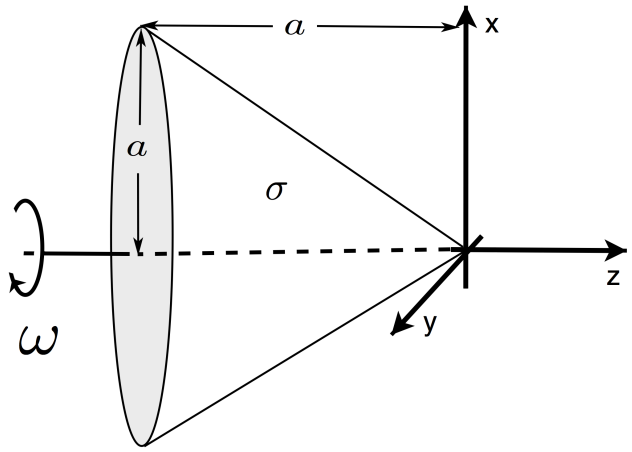
Problema 3

(a) (2 puntos) Demuestre que el campo magnético producido por una espira de radio R y corriente I en un punto P del eje z a una distancia d de la espira está dado por (ver figura)

$$\vec{B}(d) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z}.$$



(b) (4 puntos) Se tiene un cono hueco, de radio y alto a, cuya base es paralela al plano x-y (ver figura). El cono tiene una densidad de carga superficial uniforme $\sigma > 0$ y gira con velocidad angular constante ω en torno al eje z. Calcule el vector campo magnético del sistema en el origen $(0, 0, 0)$.



I3

Solución del Problema 3.
Parte (a). Notemos primero que por simetría la el campo magnético apunta en la direccón z (ver

Esto hay que argumentarlo de alguna forma. En este caso es con un dibujo.

0.5 P

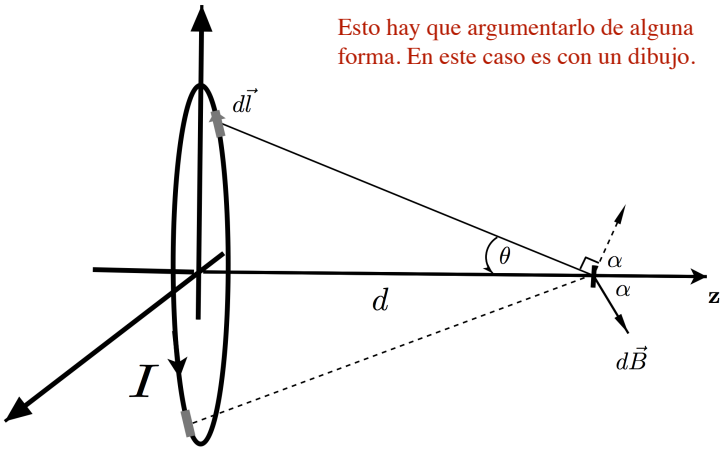


figura). De modo que si consideramos el campo producido por un elemento $d\vec{l}$ usando que

$$d\vec{l} \perp (\vec{r} - \vec{r'}) \Rightarrow |d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r'})| = dl|\vec{r} - \vec{r'}|,$$

encontramos que

$$dB_z = |d\vec{B}| \cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \cos\alpha. \qquad \text{0.5 P}$$

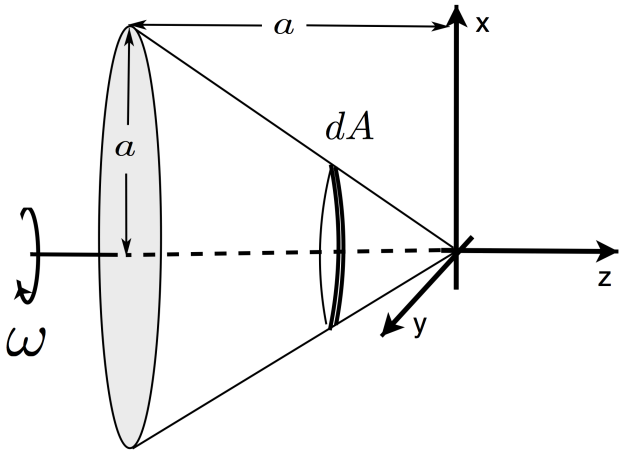
Notamos que $\alpha = \pi/2 - \theta$ (ver figura) y por tanto $\cos\alpha = \sin\theta$. Además usaremos que por simple geometría

$$|\vec{r} - \vec{r'}|^2 = R^2 + d^2 \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}}. \qquad \text{0.5 P}$$

Por tanto concluimos que

$$B_z = \int_{\text{alambre}} dB_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{1}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \int_{\text{alambre}} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \qquad \text{0.5 P}$$

Parte b). De acuerdo a la parte a) se tiene que $\vec{B}(0) = B\hat{z}$. Consideremos un elemento de área dA



en una posición $(0, 0, z)$. La magnitud del campo producido por dA está dado por

$$dB = \frac{\mu_0 R(z)^2 dI(z)}{2(R(z)^2 + z^2)^{3/2}}. \qquad 1\text{ P} \tag{1}$$

Claramente se tiene que

$$R(z) = |z| \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{z^2 dI(z)}{(2z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\sqrt{2}}\frac{dI(z)}{|z|}. \qquad 1\text{ P} \tag{2}$$

y por tanto usando que $dA = 2\pi|z|(dz/\cos(45°))$ y que $\cos(45°) = 1/\sqrt{2}$

$$dI(z) = \frac{\text{carga total en } dA}{\text{período de oscilación}} = \frac{\sigma dA(z)}{2\pi/\omega} = \sqrt{2}\sigma\omega|z|dz. \tag{3}$$

1 P

Sustituyendo (3) en (2) encontramos 0.5 P

$$dB = \frac{\mu_0}{4}\sigma\,\omega\,dz.$$

0.5 P

Por lo tanto,

$$B = \int_{-a}^{0} \frac{\mu_0}{4}\sigma\,\omega\,dz = \frac{\mu_0}{4}\sigma\,\omega\,a.$$

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 3

Primer Semestre 2014 - 3 de Junio

Nombre: _____ **Sección:** _____

Problema 4

Un cable coaxial consiste en un dispositivo similar al que se muestra en la figura. Se tiene un cable cilíndrico sólido, largo y recto de radio a concéntrico con el eje z por el que pasa una corriente total I. La densidad de corriente que pasa por este cable está dada por $\vec{J}_0 = C_0 r\ \hat{z}$, donde C_0 es una constante positiva. Concéntrico al primer cable existe otro cable largo y recto, en forma de cascarón cilíndrico, con radio interno b y radio externo c, por el que pasa una corriente en sentido opuesto al sentido de la corriente interna, de tal forma que $\vec{J}_1 = -C_1 r\ \hat{z}$ (donde C_1 es una constante positiva).

(a) Demuestre que $C_0 = \frac{3I}{2\pi a^3}$.

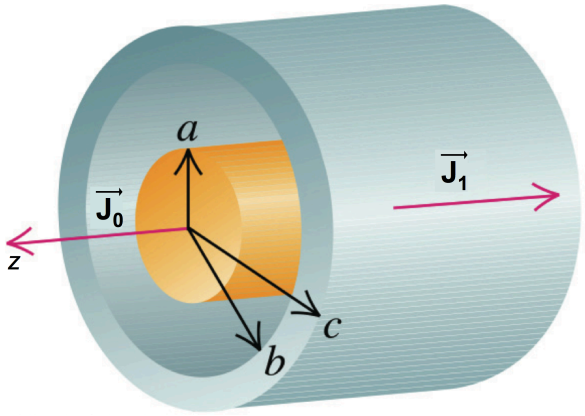
(b) Determine el campo magnético en la región $r < a$.

(c) Determine el campo magnético en la región $a < r < b$.

(d) Determine C_1 de tal forma que el campo magnético afuera del cable (en la región $r > c$) sea nulo.

(e) Asumiendo que C_1 tiene el valor que determinó en (d), determine el campo magnético en la región $b < r < c$.

Nota: cuando se pide determinar el campo magnético se pide tanto la magnitud como la dirección. (Las partes (a) hasta (e) tienen el mismo puntaje.)



Problema 4 - Solución

(a) La corriente total que pasa por el cable interior es igual a I. Esto significa que:

$$\int \vec{J}_0 \cdot d\vec{A} \doteq I \text{ [0.3 puntos]}$$

En todo momento $\vec{J}_0$ y $d\vec{A}$ son paralelos. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} \int \vec{J}_0 \cdot d\vec{A} &= \int J_0 dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a C_0 r (r dr d\theta) \\ &= \int_0^a 2\pi C_0 r^2 dr \\ &= 2\pi C_0 \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

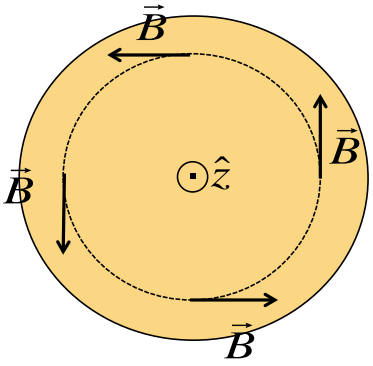
de donde concluímos que:

$$C_0 = \frac{3I}{2\pi a^3} \text{ [0.9 puntos]}$$

(b) La Ley de Ampere dice que:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

Por simetría, el campo magnético sólo puede tener una componente en $\hat{\theta}$ (algo que es válido en todo el problema) [0.3 puntos]. Aplicamos la Ley de Ampere utilizando una espira de forma circular con radio r, concéntrica con el cable. Viendo el cable desde el frente tenemos que:



Integrando en la dirección contraria a las manecillas del reloj, el lado izquierdo de la Ley de Ampere nos da:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = B(2\pi r)$$

Para el lado derecho necesitamos calcular I_{enc}, la cual es positiva dada la dirección de integración. Tenemos que:

$$I_{enc} = \int \vec{J_0} \cdot \vec{dA} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{3Ir'}{2\pi a^3}(r' dr' d\theta) = \frac{Ir^3}{a^3}$$

en donde remplazamos r por r' como variable muda para hacer la integral. Nos queda entonces que:

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a^3} \text{ [0.9 puntos]}$$

La dirección de este campo es, como ya mencionamos, en $\hat{\theta}$.

(c) Utilizamos la misma estrategia que en (b). La diferencia ahora es que la corriente encerrada es simplemente I:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot \vec{dl} &= \mu_0 I_{enc} \\ B(2\pi r) &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ [0.9 puntos]} \end{aligned}$$

La dirección sigue siendo en $\hat{\theta}$ [0.3 puntos]. Es interesante que este resultado es igual al que se obtiene cuando el cable no tiene espesor. En otras palabras, el resultado es el mismo que si toda la corriente estuviera concentrada en un alambre en $\hat{z}$.

(d) Si queremos que el campo magnético sea nulo, necesitamos que la corriente encerrada en una espira Amperiana con radio $r > c$ sea cero. Sabemos que la corriente total que pasa por el conductor interno es I. Por ende, necesitamos que la corriente total que pasa por el conductor externo y que va en sentido contrario también sea I para que se cancelen: [0.4 puntos]

$$\int \vec{J_1} \cdot \vec{dA} \doteq I$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int \vec{J_1}\cdot d\vec{A} &= \int_0^{2\pi}\int_b^c C_1 r(rdrd\theta)\\ &= \int_b^c 2\pi C_1 r^2 dr\\ &= \frac{2\pi C_1}{3}(c^3-b^3)\end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$C_1 = \frac{3I}{2\pi}\frac{1}{(c^3-b^3)} \text{ [0.8 puntos]}$$

(e) Una vez más seguimos la misma estrategia que en (b), con la única diferencia que la espira Amperiana tiene radio $b < r < c$. El lado izquierdo de la ecuación es el usual

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(2\pi r)$$

Para el lado derecho necesitamos calcular I_{enc}. Como estamos integrando en la dirección contraria a las manecillas del reloj, la corriente total en el conductor interno tiene signo positivo, mientras que la corriente encerrada en el conductor externo tiene signo negativo [0.3 puntos]. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}I_{enc} = I - \int \vec{J_1}\cdot d\vec{A} \text{ [0.3 puntos]} &= I - \int_0^{2\pi}\int_b^r \frac{3Ir'}{2\pi(c^3-b^3)}(r'dr'd\theta)\\ &= I - \frac{I}{c^3-b^3}r'^3|_b^r\\ &= I\left(1-\frac{r^3-b^3}{c^3-b^3}\right)\end{aligned}$$

Nos queda entonces que:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{r^3-b^3}{c^3-b^3}\right) \text{ [0.6 puntos]}$$

Nota: si el procedimiento está bien y sólo hay un error de arrastre de la parte (d), otorgar 0.3 puntos en lugar de 0.6.
Una vez más, la dirección es en $\hat{\theta}$.