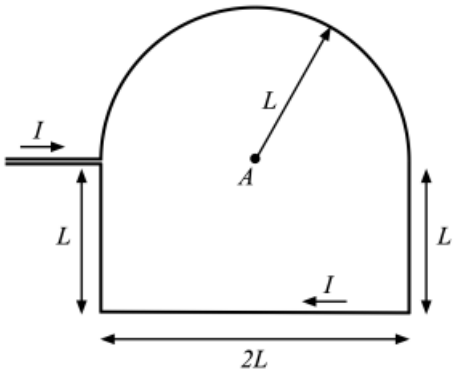
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 24

Problema 1 (I2 2023-1)

La espira de la figura está formada por 2 segmentos rectos de largo L, uno de largo $2L$ y otro semicircular de radio L. Si la espira conduce una corriente total I en la dirección mostrada en la figura, calcule el campo magnético $\vec{B}$ en el punto A (centro del semicírculo).



SOLUCION:

De forma cualitativa, a partir de la regla de la mano derecha, podemos notar que el campo magnético en el punto A posee dirección $-\hat{z}$ (entrando en la página).

Igual como lo hemos hecho en otras oportunidades, separaremos el problema en 4 zonas distintas. Es decir, calcularemos el campo producido por la espira semi-circular y los 3 segmentos rectos por separado, para luego obtener el total por principio de superposición. La ley de Biot-Savart para una densidad lineal de carga, como es una espira, se enuncia como

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{R} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$$

Por simplicidad, escogemos el origen del sistema de coordenadas en el punto A, de modo que el campo magnético en ese punto nos queda

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{R} \times (-\vec{R})}{|\vec{R}|^3}$$

- **Semi-circunferencia:**
  En este caso el vector $\vec{R}$ es claramente

$$\begin{aligned} \vec{R} &= L(-\cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{y}) \\ &\Rightarrow |R|^3 = L^3 \\ \Rightarrow d\vec{R} &= L(\sin\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \hat{y})d\theta \end{aligned}$$

  Con θ variando entre 0 y π. Reemplazando

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{-L^2 \sin^2\theta\ \hat{z} + L^2\cos^2\theta\ (-\hat{z})}{L^3}\ d\theta \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_0^\pi d\theta\ \hat{z} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4L}\ \hat{z} \end{aligned}$$

- **Segmentos rectos:**
  En este punto, debemos calcular los aportes de cada uno de los segmentos por separado, lo cual nos llevaría a calcular 3 integrales distintas. De forma alternativa, y mucho más rápida, notemos lo siguiente: Si observamos el semi-cuadrado conformado por los segmentos rectos, podemos notar que ambos segmentos verticales aportan el mismo campo sobre A. De igual modo, si dividimos el segmento horizontal en dos mitades iguales de largo $L/2$, cada una de ellas contribuye lo mismo que uno de los segmentos verticales. Entonces, en vez de calcular 3 integrales, podemos calcular el aporte de uno de los segmentos verticales y multiplicarlo por 4 para así obtener el aporte de todo el semi-cuadrado.

  Utilizamos el segmento cuya corriente apunta hacia abajo, de este modo $\vec{R}$ resulta

$$\begin{aligned} \vec{R} &= L\hat{x} - y\hat{y} \\ \Rightarrow |R|^3 &= (L^2 + y^2)^{3/2} \\ \Rightarrow d\vec{R} &= -dy\ \hat{y} \end{aligned}$$

  Con y variando entre 0 y L. Reemplazando

$$\vec{B}_2(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{-L\ dy}{(L^2 + y^2)^{3/2}}\ \hat{z}$$

Usando el reemplazo $y = L\tan\alpha \;\rightarrow\; dy = L\sec^2\alpha\; d\alpha$, podemos escribir la ecuación anterior de la forma

$$\begin{aligned}
\vec{B}_2(0) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{L^2\sec^2\alpha}{(L^2+L^2\tan^2\alpha)^{3/2}}\; d\alpha \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{L^2\sec^2\alpha}{(L^2\sec^2\alpha)^{3/2}}\; d\alpha \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\int \cos\alpha\; d\alpha \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[\sin\alpha\right]
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio con $\alpha = \arctan(y/L)$, nos queda

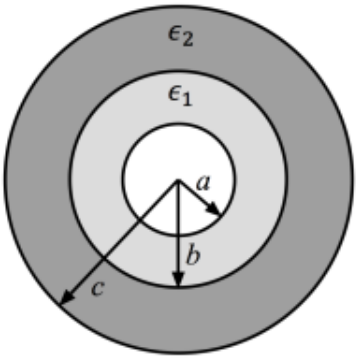
$$\begin{aligned}
\vec{B}_2(0) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left[\sin(\arctan\left(\frac{y}{L}\right)\right]_0^L\; \hat{z} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi L}\; \hat{z}
\end{aligned}$$

Y en tanto, el campo producto del semi-cuadrado es $\vec{B}_\square(0) = 4\vec{B}_2(0) = -\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi L}\; \hat{z}$. Finalmente, el campo total en el punto A viene dado por

$$\vec{B}(0) = \vec{B}_1(0) + \vec{B}_\square(0) = -\frac{\mu_0 I}{2L}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)\hat{z}$$

Problema 2 (I2 2022-2)

Un capacitor está formado por dos cilindros conductores concéntricos de largo L y radios a y c, respectivamente. El espacio entre los cilindros se llena con dos materiales dieléctricos de permitividad ϵ_1 y ϵ_2 como se muestra en la figura.



Suponiendo que el capacitor posee carga $+Q$ en el cilindro interior y $-Q$ en el cilindro exterior y despreciando los efectos de borde, determine:

a) El campo eléctrico y el vector de polarización en la región entre los cilindros conductores.

b) La densidad de carga de polarización σ en cada una de las superficies de los materiales dieléctricos.

c) La capacitancia del sistema.

SOLUCION:

a) Calcularemos lo que nos piden en distintas regiones del capacitor utilizando la ley de Gauss en dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{free}}$$

- $0 < r < a$:
  Para esta región, notemos que $q_{\text{free}} = 0$. Por lo tanto

$$\vec{D} = \vec{E} = \vec{P} = 0$$

- $a < r < b$:
  Ya que nuestra superficie gaussiana encierra el cilindro interior, $q_{\text{free}} = +Q$ y la

ley de Gauss nos entrega

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$
$$D \cdot 2\pi r L = Q$$
$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r}$$

Ya que $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$, tenemos

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 r L}\hat{r}$$

Por definición $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E}$. Nos queda

$$\vec{P} = \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_1 r L}\hat{r}$$

- $b < r < c$: La carga libre encerrada sigue siendo $+Q$. El procedimiento es análogo al paso anterior, pero considerando que el dieléctrico tiene constante ϵ_2:

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r}$$
$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r L}\hat{r}$$
$$\vec{P} = \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_2 r L}\hat{r}$$

- $r > c$: La carga libre encerrada es $q_{\text{free}} = Q - Q = 0$, tal que

$$\vec{D} = \vec{E} = \vec{P} = 0$$

b) Podemos obtener σ utilizando

$$\sigma(r) = \vec{P}(r) \cdot \hat{n}$$

Para el dieléctrico de constante ϵ_1 tenemos la superficie interna en $r = a$ y la superficie externa en $r = b$. La densidad de polarización σ nos queda

$$\sigma_{\text{int}} = \vec{P}(a) \cdot (-\hat{r}) = -\frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_1 a L}$$
$$\sigma_{\text{ext}} = \vec{P}(b) \cdot (\hat{r}) = \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_1 b L}$$

Para el dieléctrico de constante ϵ_2 tenemos la superficie interna en $r = b$ y la superficie externa en $r = c$. Nos queda

$$\sigma_{\text{int}} = \vec{P}(b) \cdot (-\hat{r}) = -\frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_2 b L}$$
$$\sigma_{\text{ext}} = \vec{P}(c) \cdot (\hat{r}) = \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_2 c L}$$

c) La capacitancia viene dada por

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

La diferencia de potencial entre los cilindros es

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\
&= -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 r L} dr - \int_b^c \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r L} dr \\
&= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_1 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \\
&= -\frac{Q}{2\pi L}\left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que la capacitancia es

$$C = 2\pi L \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$$

Problema 3 (I2 2014-2)

Una partícula cargada, de carga q y masa m, parte del reposo en el origen de coordenadas en una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$ paralelo al eje x, y un campo magnetico $\vec{B}$ paralelo al eje z. Muestre que las coordenadas de la partícula un instante t más tarde serán:

$$x = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos\omega t)$$
$$y = -\frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t)$$
$$z = 0$$

donde $\omega = \frac{|q|B}{m}$.

SOLUCION:

La fuerza que actúa sobre las partículas de carga q en presencia del campo electromagnético está dada en general por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

en que $\vec{v}$ es la velocidad de las partículas. La ecuación de movimiento para una partícula cargada en presencia de la fuerza de Lorentz, es

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{2}$$

En este caso particular $\vec{E} = E\hat{x}, \vec{B} = B\hat{z}$. Si descomponemos la velocidad de la partícula en coordenadas cartesianas, i.e., $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$, podemos calcular las componentes de $\vec{v} \times \vec{B} = v_y B\ \hat{x} - v_x B\ \hat{y}$. Reemplazamos las expresiones para obtener las siguientes ecuaciones para las componentes de la velocidad:

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \tag{3}$$
$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}\left(E + v_y B\right) \tag{4}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m}v_x B \tag{5}$$

Integrando (3) obtenemos $v_z(t) = c = v_z(0) = 0$. Ahora derivando la ecuación (5) con respecto al tiempo y luego utilizando (4) para reemplazar dv_x/dt en términos de v_y, obtenemos una ecuación diferencial para v_y:

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{q}{m}B\frac{dv_x}{dt}$$
$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{q^2}{m^2}BE - \frac{q^2}{m^2}B^2 v_y$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = -\omega^2 \frac{E}{B} \tag{6}$$

en que $\omega = |q|B/m$ (conocida como la frecuencia de Larmor). La solución general de la ecuación (6) es:

$$v_y(t) = A\cos\omega t + D\,\mathrm{sen}\,\omega t - \frac{E}{B} \tag{7}$$

en que A y D son constantes de integración. Derivando (7) con respecto al tiempo y utilizando (5) encontramos:

$$v_x(t) = A\,\mathrm{sen}\,\omega t - D\cos\omega t \tag{8}$$

Usando las condiciones iniciales para la velocidad determinamos las constantes A y D. Como $v_x(0) = v_y(0) = 0$, obtenemos a partir de (7) y (8) que $A = E/B$ y $D = 0$. Entonces,

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = \frac{E}{B}\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) = \frac{E}{B}(\cos\omega t - 1) \tag{10}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) = 0 \tag{11}$$

Integrando (9), (10) y (11), usando las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, finalmente obtenemos,

$$x = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos\omega t)$$

$$y = -\frac{E}{\omega B}(\omega t - \mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$z = 0$$

que era lo que se pedía demostrar.

Otros ejercicios que han salido en pruebas: 10.2, 10.3, 11.2, 13.1, 13.3, 14.3, 15.1, 20.1