Solución Ayudantía 23

04 de Noviembre 2025 - Profesora Macarena Domínguez

Ayudante: Luis Rivera Ly - luisriveraly@uc.cl

0.0.1 "Control 2 2015-1", Problema 2, Departamento de Física

Se tiene un condensador con tres placas paralelas de área A como se indica en la figura. Las primeras están separadas una distancia L entre ellas y las últimas lo están una distancia d. Además, entre las placas se disponen dos materiales, el primero tiene una conductividad g_1, mientras que el segundo tiene una conductividad g_2. El sistema se encuentra en estado estacionario, conectado a un generador que establece una diferencia de potencial V_0 entre las placas.

a) Determine el(los) campo(s) eléctrico(s) entre las placas. ¿Es el mismo en ambos medios?

b) Determine la(s) densidad(es) de corriente volumétricas que circula(n) entre las placas. ¿Es la misma en ambos medios?

c) Calcule la intensidad de corriente total que circula entre las placas.

d) Determine la resistencia del sistema.

e) ¿Qué pasaría si el generador se desconecta? Explique cualitativamente.

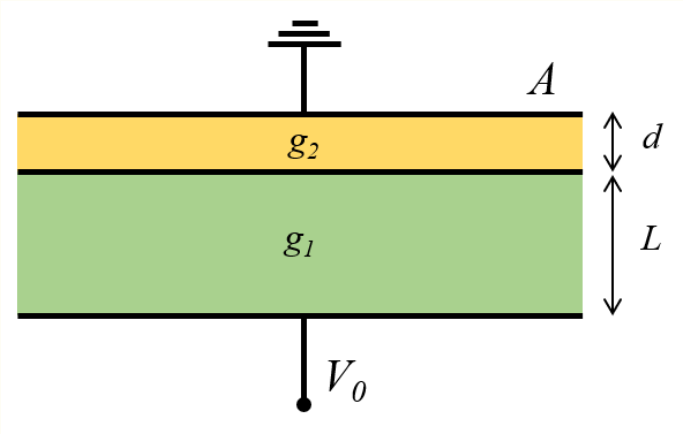


Figura 1. Esquema sobre el condensador.

Solución a), b), c) y d)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar la resistencia del sistema (i.e $0 < z < L+d$). En primer lugar, la intensidad de corriente estará dada por:

$$I = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x})$$

Como la conductividad no es constante en distintas secciones transversales, se debe cumplir la siguiente condición de borde:

$$J_{1n} = J_{2n}$$

Ahora, la densidad de corriente se puede calcular como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

Luego, se puede utilizar la forma integral de la relación campo - potencial:

$$V(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}_a) = -\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Finalmente, la resistencia se puede calcular utilizando la Ley de Ohm Macroscópica:

$$V = IR \;\rightarrow\; R = \frac{V}{I}$$

Paso 1: Condición de Borde - $J_{1n} = J_{2n}$

En primer lugar, el sistema se encuentra en estado estacionario, es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Luego, y por la geometría del problema, se llega a que:

$$\mathbf{J} = J\hat{z}$$

Gracias a la ecuación de continuidad, se concluye que la densidad de corriente es constante. Imponiendo la condición de borde (i.e $J_{1n} = J_{2n}$) en la región $0 < z < L + d$:

$$J = J_{0<z<L} = J_{L<z<L+d}$$

Paso 2: Ley de Ohm Microscópica - $\mathbf{E}_{0<z<L}$

Ahora, y ocupando la Ley de Ohm Microscópica en la región $0 < z < L$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0<z<L} &= \frac{\mathbf{J}_{0<z<L}}{\sigma_{0<z<L}} \\ &= \frac{J}{g_1}\,\hat{z} \end{aligned}$$

Paso 3: Ley de Ohm Microscópica - $\mathbf{E}_{L<z<L+d}$

Análogamente, y ocupando la Ley de Ohm Microscópica en la región $L < z < L+d$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{L<z<L+d} &= \frac{\mathbf{J}_{L<z<L+d}}{\sigma_{L<z<L+d}} \\ &= \frac{J}{g_2}\ \hat{z}\end{aligned}$$

Paso 4: Potencial Eléctrico - ΔV

Como $V_0 = \Delta V$, se calculará la diferencia de potencial eléctrico entre $z = 0$ y $z = d$:

$$V_0 = V(0) - V(L+d) = -\int_{L+d}^{0} \mathbf{E}_{0<z<L+d} \cdot d\mathbf{l}$$

Por propiedades de integrales se pueden invertir los límites
y la única componente en juego es la normal, por lo que $d\mathbf{l} = d\vec{z}$:

$$\begin{aligned}V_0 &= \int_0^L E_{0<z<L}\ dz + \int_L^{L+d} E_{L<z<L+d}\ dz \\ V_0 &= \int_0^L \frac{J}{g_1}\ dz + \int_L^{L+d} \frac{J}{g_2}\ dz \\ V_0 &= \frac{J}{g_1} \cdot L + \frac{J}{g_2} \cdot d \\ V_0 &= \frac{J(dg_1 + Lg_2)}{g_1 + g_2} \\ J &= \frac{V_0 g_1 g_2}{dg_1 + Lg_2}\end{aligned}$$

Agregando la componente normal:

$$\mathbf{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{dg_1 + Lg_2}\ \hat{z} \tag{1}$$

Reemplazando en lo anterior, obtenemos que:

$$\mathbf{E}_{0<z<L} = \frac{V_0 g_1 g_2}{g_1(dg_1 + Lg_2)}\ \hat{z} \tag{2}$$

$$\mathbf{E}_{L<z<L+d} = \frac{V_0 g_1 g_2}{g_2(dg_1 + Lg_2)}\ \hat{z} \tag{3}$$

Paso 5: Intensidad de Corriente - I_{eq}

Notando que los medios se encuentran conectados en serie (i.e misma intensidad de corriente) y utilizando la definición de intensidad de corriente en la región $0 < z < L + d$:

$$I_{eq} = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x})$$

Se conoce que $\mathbf{J} = J\hat{z} \rightarrow \mathbf{E} = E\hat{z}$, por lo que se utilizará el diferencial de superficie que contiene a "$\hat{z}$" en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} I_{eq} &= \iint_S J\ \hat{z} \cdot dxdy\ \hat{z} \\ &= \frac{V_0 g_1 g_2}{dg_1 + Lg_2} \cdot \iint_S dxdy \\ &= \frac{V_0 g_1 g_2}{dg_1 + Lg_2} \cdot A \end{aligned}$$

Luego, se cumple que:

$$I_1 = I_2 = \frac{V_0 A g_1 g_2}{dg_1 + Lg_2} \tag{4}$$

Paso 6: Ley de Ohm Macroscópica - R_{eq}

Finalmente, utilizando la Ley de Ohm Macroscópica en la región $0 < z < L + d$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{V_{eq}}{I_{eq}} \\ &= \frac{V_0}{\frac{AV_0 g_1 g_2}{dg_1 + Lg_2}} \\ &= \frac{dg_1 + Lg_2}{Ag_1 g_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Solución e)

Paso Único: Efectos Desconexión Generador

En un comienzo, el generador estaba conectado y permitía la aparición de campos eléctricos en la región $0 < z < L + d$. Al desconectar el generador, la diferencia de potencial entre las placas se vuelve nula, lo que implica necesariamente la descarga de las placas y, con ello, la desaparición de los campos en tal región.

0.0.2 "Ejercicios Teoría Electromagnética ", 11.5.1, Fabián Cádiz

En el circuito de la figura, suponga que el interruptor ha estado abierto por un tiempo muy largo y en t = 0 se cierra.

a) ¿Cuál es la constante de tiempo antes de que se cerrara el interruptor?

b) ¿Cuál es la constante de tiempo después de que se cerrara el interruptor?

c) Encuentre la corriente a través del interruptor como función del tiempo una vez que el interruptor se ha cerrado.

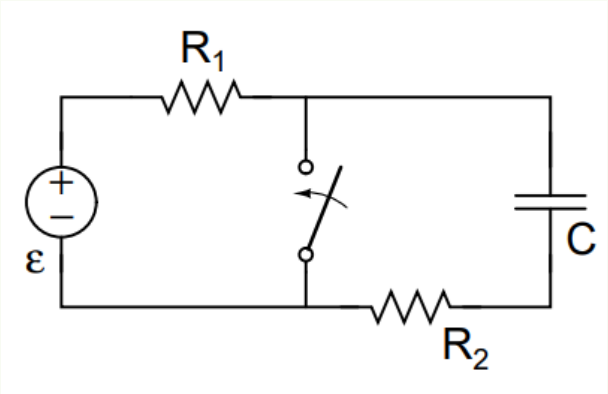


Figura 2. Esquema sobre el circuito RC.

Solución a)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio? - τ

Se pide determinar la constante de tiempo antes de que se cierre el interruptor, por lo que será necesario calcular el voltaje/intensidad del capacitor en función del tiempo. Los pasos a seguir para llegar y resolver la EDO se detallan en el resumen.

Paso 1: Condición Abierto y Ecuación Mallas - M_1

Primero, se nombra de forma arbitraria la intensidad de la malla. Como es solo una, es bastante simple:

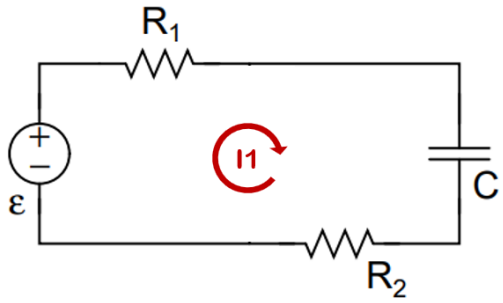


Figura 3. Esquema sobre el circuito RC (antes del cierre).

Para armar las ecuaciones debemos observar una malla y recorrerla en el sentido otorgado. Se sumará solo si se entra a fuentes de + a − y/o en aquellos voltajes de resistores (en caso contrario se resta):

$$-\varepsilon + V_{R_1} + V_C + V_{R_2} = 0$$

Luego, se debe realizar el reemplazo del voltaje en los resistores por Ley de Ohm, dejando positiva la corriente que pasa por la malla observada y negativa la malla opuesta (en caso de haber):

$$-\varepsilon + IR_1 + V_C + IR_2 = 0$$

Ahora, se observa que I también pasa por el capacitor y que este se encuentra en proceso de carga, por lo que se aplica la expresión $I = I_C = C\frac{dV_C}{dt}$:

$$-\varepsilon + CR_1\frac{dV_C}{dt} + V_C + CR_2\frac{dV_C}{dt} = 0 \tag{6}$$

Paso 2: Solución EDO - V_C

La EDO se puede tratar mediante el método de separación de variables, por lo que a un lado se dejarán las variables dependientes de V_C y al otro las variables dependientes del tiempo y/o constantes:

$$-\varepsilon + V_C = -C\frac{dV_C}{dt}(R_1 + R_2)$$

$$\frac{dt}{C(R_1 + R_2)} = \frac{dV_C}{\varepsilon - V_C}$$

Integrando a cada lado:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{C(R_1 + R_2)} = \int_{V_0}^{V_C} \frac{dV_C}{\varepsilon - V_C}$$

Como es antes de que se cierre el circuito $t \in \,]-\infty, 0]$.
Además, el condensador inicialmente se encuentra descargado, por lo que $V_0 = 0$:

$$\int_{0}^{t} \frac{dt}{C(R_1 + R_2)} = \int_{0}^{V_C} \frac{dV_C}{\varepsilon - V_C}$$

Aplicando un cambio de variable al lado derecho $\alpha = \varepsilon - V_C \;\rightarrow\; d\alpha = -dV_C$:

$$\int_0^t \frac{dt}{C(R_1+R_2)} = \int_\varepsilon^{\varepsilon - V_C} -\frac{d\alpha}{\alpha}$$
$$\frac{t}{C(R_1+R_2)} = -\ln\left(\frac{\varepsilon - V_C}{\varepsilon}\right)$$

Aplicando exponencial a cada lado con el objetivo de despejar V_C:

$$e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} = \frac{\varepsilon - V_C}{\varepsilon}$$
$$V_C(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}\right) \tag{7}$$

Paso 3: Constante de Tiempo - τ

Al analizar la solución podremos notar que:

$$-\frac{t}{\tau} = -\frac{t}{C(R_1+R_2)} \;\rightarrow\; \tau = C(R_1+R_2) \tag{8}$$

Solución b)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio? - τ

Se pide determinar la constante de tiempo después de que se cierre el interruptor, por lo que será necesario calcular el voltaje/intensidad del capacitor en función del tiempo. Los pasos a seguir para llegar y resolver la EDO se detallan en el resumen.

Paso 1: Condición Cerrado y Ecuación Mallas - $M_1 - M_2$

Primero, se nombran de forma arbitraria las intensidades de las mallas. Por simplicidad, se tiene que:

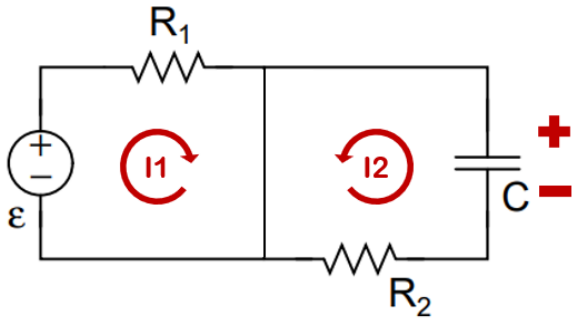


Figura 4. Esquema sobre el circuito (después del cierre)

Para armar las ecuaciones debemos observar una malla y recorrerla en el sentido otorgado. Se sumará solo si se entra a fuentes de + a − y/o en aquellos voltajes de resistores (en caso contrario se resta):

$$M_1 \;\rightarrow\; -\varepsilon + V_{R_1} = 0$$
$$M_2 \;\rightarrow\; -V_C + V_{R_2} = 0$$

Luego, se debe realizar el reemplazo del voltaje en los resistores por Ley de Ohm, dejando positiva la corriente que pasa por la malla observada y negativa la malla opuesta (en caso de haber):

$$M_1 \ \rightarrow \ -\varepsilon + I_1 R_1 = 0$$
$$M_2 \ \rightarrow \ -V_C + I_2 R_2 = 0$$

Ahora, se observa que I_2 también pasa por el capacitor y que este se encuentra en proceso de descarga, por lo que se aplica la expresión $I_2 = I_C = -C\frac{dV_C}{dt}$:

$$M_1 \ \rightarrow \ -\varepsilon + I_1 R_1 = 0 \tag{9}$$
$$M_2 \ \rightarrow \ -V_C - CR_2 \frac{dV_C}{dt} = 0 \tag{10}$$

Paso 2: Solución EDO - V_C

La EDO asociada a la segunda expresión se puede tratar mediante el método de separación de variables, por lo que a un lado se dejarán las variables dependientes de V_C y al otro las variables dependientes del tiempo y/o constantes:

$$V_C = -CR_2 \frac{dV_C}{dt}$$
$$-\frac{dt}{CR_2} = \frac{dV_C}{V_C}$$

Integrando a cada lado:

$$\int_{t_0}^{t} -\frac{dt}{CR_2} = \int_{V_0}^{V_C} \frac{dV_C}{V_C}$$

Como es antes de que se cierre el circuito $t \in \ [0, \infty[$. Además, el condensador se encontrará a cierto voltaje inicial $V(0) = V_0 = \varepsilon$ dado por el límite de la expresión calculada en a):

$$\int_{0}^{t} -\frac{dt}{CR_2} = \int_{\varepsilon}^{V_C} \frac{dV_C}{V_C}$$
$$-\frac{t}{CR_2} = \ln\left(\frac{V_C}{\varepsilon}\right)$$

Aplicando exponencial a cada lado con el objetivo de despejar V_C:

$$V_C(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{CR_2}} \tag{11}$$

Paso 3: Constante de Tiempo - τ

Al analizar la solución podremos notar que:

$$-\frac{t}{\tau} = -\frac{t}{CR_2} \ \rightarrow \ \tau = CR_2 \tag{12}$$

Solución c)

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio? - I

Se pide determinar la intensidad la corriente a través del interruptor cerrado como función del tiempo. A simple vista, se puede observar que por este circulará la suma de las corrientes I_1 e I_2 (según nuestra definición). Luego, se debe determinar I_1 e I_2 mediante la expresión de la intensidad en el capacitor a partir de la diferencia de potencial presente en él:

$$I_c = C\frac{dV_C}{dt} \tag{13}$$

Paso 1: Intensidad de Corriente - I_1

Despejando I_1 de la primera ecuación de malla:

$$\therefore I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} \tag{14}$$

Paso 2: Intensidad de Corriente - I_2

Utilizando la expresión para corriente en capacitores en proceso de descarga:

$$I_2 = -C\frac{dV_C}{dt} = -C \cdot \varepsilon e^{-\frac{t}{CR_2}} \cdot -\frac{1}{CR_2}$$

$$\therefore I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-\frac{t}{CR_2}} \tag{15}$$

Paso 3: Suma de Corrientes - I

Finalmente, la corriente total que pasa por el interruptor sería la suma de ambas:

$$\therefore I(t) = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-\frac{t}{CR_2}} \tag{16}$$

0.0.3 "I2 2021-2", Problema 3, Facultad de Física

Determine el campo magnético en el punto O debido a la corriente constante I que circula por un circuito formado por dos segmentos verticales semi-infinitos y un segmento horizontal de largo $2a$, tal como muestra la figura.

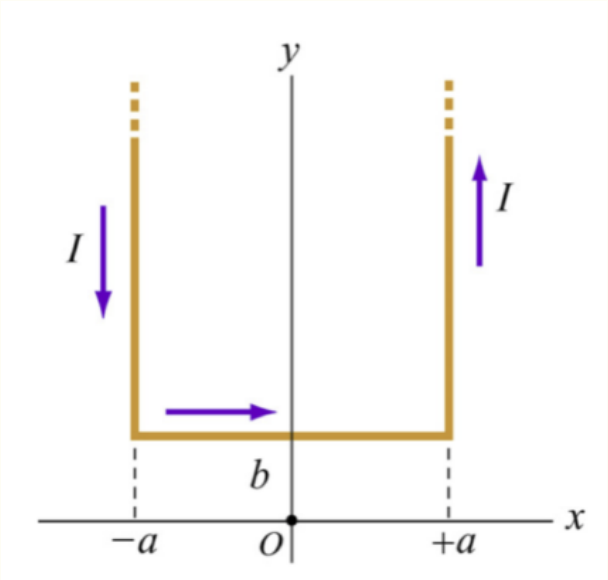


Figura 5. Circuito en estudio.

Solución

Paso 0: ¿Cómo plantear el ejercicio?

Se pide determinar el campo magnético en el punto O, el cual puede ser expresado como la suma de los campos generados por los 3 segmentos . Como las figuras no poseen ninguna simetría apta para la Ley de Ampére, solo queda aplicar campo por definición:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|^3}$$

Se nota que se usa la integral simple debido a la naturaleza del problema, puesto que el alambre vive en una dimensión.

Paso 1: Campo Segmento 1 - $\mathbf{B}_1$

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el punto "O" y se utilizarán coordenadas cartesianas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ parte en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo:

$$\mathbf{r} = 0$$

Como el centro de referencia coincide con el punto a calcular el vector es nulo.

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ parte en el origen y recorre todo el cuerpo con corriente:

$$\mathbf{r}\,' = -a\hat{x} + y\hat{y}, \quad y \in [\infty, b]$$

Se debe hacer énfasis en cómo es el sentido de la corriente.

Se siguen determinando componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = -(-a\hat{x} + y\hat{y})$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

Usando los resultados anteriores:

$$\begin{aligned} Id\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}\,') &= I\ dy\hat{y} \times -(-a\hat{x} + y\hat{y}) \\ &= -Ia\ dy\ \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Para realizar este producto cruz de manera sencilla se recuerda que estamos en la base "(x, y, z)" en coordenadas cartesianas, por lo que $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{\mathbf{z}}$. Al avanzar hacia atrás el signo es negativo. Para determinar "$d\mathbf{l}$" se debe observar cómo es el movimiento de la corriente (en este caso es en el eje y), las coordenadas en uso (cartesianas) y el tipo de diferencial (lineal).

Finalmente, se arma la integral del campo para el segmento 1, considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\infty}^{b} \frac{-Ia\ dy\ \hat{\mathbf{z}}}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{-Ia \cdot a\sec^2\theta\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}}{(a^2 + (a\tan\theta)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\sec^2\theta}{(1 + \tan\theta^2)^{3/2}}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\sec\theta}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)} \cos\theta\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi a} \cdot (\sin\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi a} \cdot (\sin\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) - \sin\frac{\pi}{2})\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi a} \cdot (\sin\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) - 1)\ \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Notar que se realizó un cambio de variable $y = a\tan\theta \ \rightarrow\ dy = a\sec^2\theta\ d\theta$ y que se utilizó la propiedad trigonométrica $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$.

Paso 2: Campo Segmento 2 - $\mathbf{B}_2$

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el punto "O" y se utilizarán coordenadas cartesianas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ parte en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo:

$$\mathbf{r} = 0$$

Como el centro de referencia coincide con el punto a calcular el vector es nulo.

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ parte en el origen y recorre todo el cuerpo con corriente:

$$\mathbf{r}\,' = x\hat{x} + b\hat{y}, \quad x \in [-a, a]$$

Se debe hacer énfasis en cómo es el sentido de la corriente.

Se siguen determinando componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = -(x\hat{x} + b\hat{y})$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = \sqrt{x^2 + b^2}$$

Usando los resultados anteriores:

$$\begin{aligned} Id\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}\,') &= I\ dx\hat{x} \times -(x\hat{x} + b\hat{y}) \\ &= -Ib\ dx\ \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Para realizar este producto cruz de manera sencilla se recuerda que estamos en la base "(x, y, z)" en coordenadas cartesianas, por lo que $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{\mathbf{z}}$. Al avanzar hacia adelante el signo es positivo. Para determinar "$d\mathbf{l}$" se debe observar cómo es el movimiento de la corriente (en este caso es en el eje x), las coordenadas en uso (cartesianas) y el tipo de diferencial (lineal).

Finalmente, se arma la integral del campo para el segmento 2, considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}\,'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{-Ib\ dx\ \hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + b^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)}^{\arctan\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{-Ib \cdot b\sec^2\theta\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}}{(b^2 + (b\tan\theta)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi b} \int_{\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)}^{\arctan\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{\sec^2\theta}{(1 + \tan\theta^2)^{3/2}}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi b} \int_{\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)}^{\arctan\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{\sec\theta}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi b} \int_{\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)}^{\arctan\left(\frac{a}{b}\right)} \cos\theta\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi b} \cdot (\sin\theta)\Big|_{\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)}^{\arctan\left(\frac{a}{b}\right)}\ \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{-I\mu_0}{4\pi b} \cdot (\sin\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right) - \sin\left(\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)\right))\ \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Notar que se realizó un cambio de variable $x = b\tan\theta \;\rightarrow\; dx = b\sec^2\theta\; d\theta$
y que se utilizó la propiedad trigonométrica $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$.

Paso 3: Campo Segmento 3 - $\mathbf{B_3}$

Desde ahora en adelante, nuestro sistema de referencia será el punto "O" y se utilizarán coordenadas cartesianas por la geometría del ejercicio. Se recuerda que el vector $\mathbf{r}$ parte en el origen y se extiende hasta el punto en donde se quiere calcular el campo:

$$\mathbf{r} = 0$$

Como el centro de referencia coincide con el punto a calcular el vector es nulo.

Luego, el vector $\mathbf{r}\,'$ parte en el origen y recorre todo el cuerpo con corriente:

$$\mathbf{r}\,' = a\hat{x} + y\hat{y}, \quad y \in [b, \infty]$$

Se debe hacer énfasis en cómo es el sentido de la corriente.

Se siguen determinando componentes de la integral:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}\,' = -(a\hat{x} + y\hat{y})$$

Calculando el módulo del vector anterior:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

Usando los resultados anteriores:

$$\begin{aligned} Id\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}\,') &= I\; dy\hat{y} \times -(a\hat{x} + y\hat{y}) \\ &= Ia\; dy\; \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Para realizar este producto cruz de manera sencilla se recuerda que estamos en la base "(x, y, z)" en coordenadas cartesianas, por lo que $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{\mathbf{z}}$. Al avanzar hacia atrás el signo es negativo. Para determinar "$d\mathbf{l}$" se debe observar cómo es el movimiento de la corriente (en este caso es en el eje y), las coordenadas en uso (cartesianas) y el tipo de diferencial (lineal).

Finalmente, se arma la integral del campo para el segmento 3, considerando los límites de integración propuestos con anterioridad:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_3 &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I d\mathbf{l}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}\,')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}\,'|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_b^{\infty} \frac{I a\ dy\ \hat{\mathbf{z}}}{(a^2+y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I a\cdot a\sec^2\theta\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}}{(a^2+(a\tan\theta)^2)^{3/2}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi a}\int_{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{(1+\tan\theta^2)^{3/2}}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi a}\int_{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec\theta}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi a}\int_{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi a}\cdot(\sin\theta)\Big|_{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\ \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi a}\cdot(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right))\ \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi a}\cdot(1-\sin\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right))\ \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Notar que se realizó un cambio de variable $y = a\tan\theta \ \rightarrow\ dy = a\sec^2\theta\ d\theta$
y que se utilizó la propiedad trigonométrica $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$.

Paso 4: Principio de Superposición - B

Finalmente, el campo magnético en el punto O será la suma de los campos generados por los 3 segmentos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_3 \\
&= \frac{-I\mu_0}{4\pi a}\cdot(\sin\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)-1)\ \hat{\mathbf{z}} + \frac{-I\mu_0}{4\pi b}\cdot(\sin\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right)-\sin\left(\arctan\left(\frac{-a}{b}\right)\right))\ \hat{\mathbf{z}} \\
&+ \frac{I\mu_0}{4\pi a}\cdot(1-\sin\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right))\ \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{I\mu_0}{2\pi a}\cdot(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})+\frac{-I\mu_0}{4\pi b}\cdot(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}})\ \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{I\mu_0}{2\pi a}\cdot(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})+\frac{-I\mu_0}{2\pi b}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Notar que se utilizó la propiedad trigonométrica $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Nota: El tratamiento de las integrales también se puede realizar observando la simetría de la figura, con el objetivo de simplificar los cálculos para los segmentos 1 y 3.