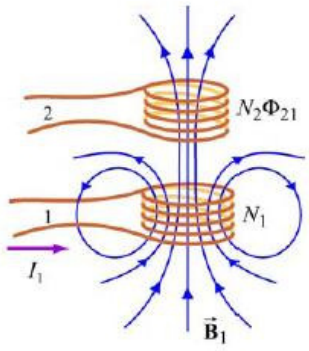
Parte VI

Inductancia y Corriente Alterna

Capítulo 13

Inductancia

A continuación veremos un fenómeno de acoplamiento magnético. Supongamos que tenemos 2 bobinas, cerca una de otra, como se muestra en la figura



La primera de ellas tiene N_1 vueltas y lleva una corriente I_1, la que da origen a un campo magnético $\vec{B}_1$. Debido a que ambas bobinas están cerca, algunas líneas de campo magnético a través de la bobina 1 también pasarán a través de la bobina 2, como se aprecia claramente en la figura. Denotemos por Φ_{21} el flujo magnético total a través de la bobina 2 (que será N_2 veces el flujo a través de una sola vuelta) debido a la corriente I_1.
Ahora, al variar I_1 en el tiempo, habrá una fem inducida en la bobina 2 debido al cambio de flujo magnético en ella

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int_{S_2} d\vec{S}\cdot\vec{B}_1$$

Ahora, por regla de la cadena

$$\frac{d\Phi_{21}}{dt} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} = M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

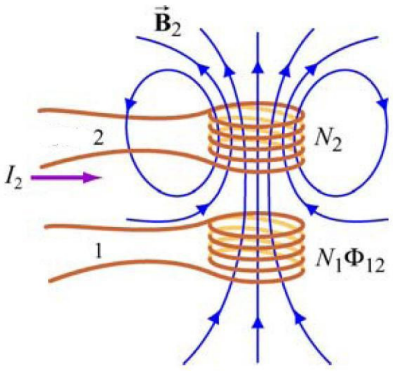
Notar que aquí hemos establecido que el flujo sobre 2 es proporcional a la corriente I_1, es decir, $d\phi_{21}/dI_1 = M_{21}$ donde la constante de proporcionalidad M_{21} se llama **inductancia mutua**, y depende únicamente de la geometría y es una medida de que tan bueno es el acoplamiento magnético.
Vemos que es igual a

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

esto último se debe a que los flujos siempre dependen linealmente de las corrientes que los originan. La unidad S.I de la inductancia mutua es el Henry (H).

Análogamente, ahora suponga que existe una corriente I_2 en la segunda bobina y que varía en el tiempo. Así, se induce una fem en la bobina 1 dada por

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$



Este flujo variable en la bobina 1 es proporcional al cambio de corriente en la bobina 2

$$\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2}\frac{dI_2}{dt} = M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

donde

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

Utilizando la ley de Ampere y la de Biot-Savart se puede deducir la fórmula de Neumann, y se puede demostrar que ámbas inductancias mutuas son iguales (muy útil!)

$$M_{21} = M_{12} = M$$

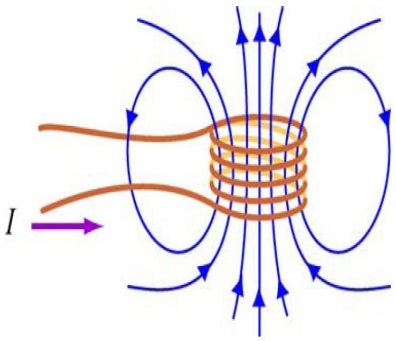
Esto es claro al ver la expresión de la fórmula de Neumann para dos circuitos

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

la cual es totalmente simétrica, de manera que el intercambiar los índices por M_{12} no altera el resultado.

Autoinductancia

Considere nuevamente una bobina de N vueltas que lleva una corriente I en el sentido contrareloj. Si la corriente es constante, entonces el flujo magnético a través de cada vuelta permanecerá constante. Ahora considere que la corriente I varía en el tiempo, luego, de acuerdo a la ley de Faraday-Lenz, una fem inducida aparecerá para oponerse al cambio de flujo.



La corriente inducida irá en el sentido del reloj si $dI/dt > 0$ y contrareloj si $dI/dt < 0$. (Recordar Ley de Lenz!). La propiedad de que su propio campo magnético se opone a cualquier cambio en la corriente es lo que se llama inductancia propia o **autoinductancia**, y la fem generada entre sus terminales se llama fem autoinducida, que se denota por ε_L. Todo elemento de este tipo se denomina Indutancia. Matemáticamente, se tiene

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dI}\frac{dI}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

de manera que

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

donde L es la autoinductancia,

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

Físicamente, la autoinductancia es una medida de la resitencia de una inductancia al cambio de corriente, así, mientras más grande es el valor de L, más lenta será la tasa a la cual varía la corriente.
La autoinductancia también se puede pensar (de hecho es equivalente en términos de la fórmula de Neumann) como la indutancia mutua del circuito consigo mismo, es decir, $L = M_{11}$.

Energía almacenada en campos magnéticos

Debido a que una inductancia en un circuito se opone a cualquier cambio en la corriente a través de ella, debe realizarse un trabajo por un agente externo (como una batería) para establecer una corriente en la inductancia. La energía entonces se puede almacenar en ella!. El rol que juega una inductancia en el caso magnético es análogo al de un condensador en el caso eléctrico. La potencia, o tasa a la cual una fem externa trabaja para superar la fem autoinducida en la inductancia (ε_L) y lograr que pase una corriente I a través de ésta es

$$P = \frac{dW_{ext}}{dt} = I\varepsilon_{ext}$$

Si solo una fem externa y la indutancia están presentes, entonces $\varepsilon = -\varepsilon_L$, esto es

$$P = -I\varepsilon_L = IL\frac{dI}{dt}$$

Si la corriente aumenta con $dI/dt > 0$, entonces $P > 0$ lo que significa que la fuente externa está haciendo un trabajo positivo para transferir energía a la inductancia. Entonces, la energía interna U_B de la inductancia aumenta.
Por otro lado, si la corriente decrece $dI/dt < 0$, la fuente externa toma energía de la inductancia, causando una disminución en la energía interna de ésta.
El trabajo total hecho por la fuente externa para aumentar la corriente desde 0 hasta I es

$$W_{ext} = \int dW_{ext} = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

Esto es igual a la energía magnética almacenada en la inductancia

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

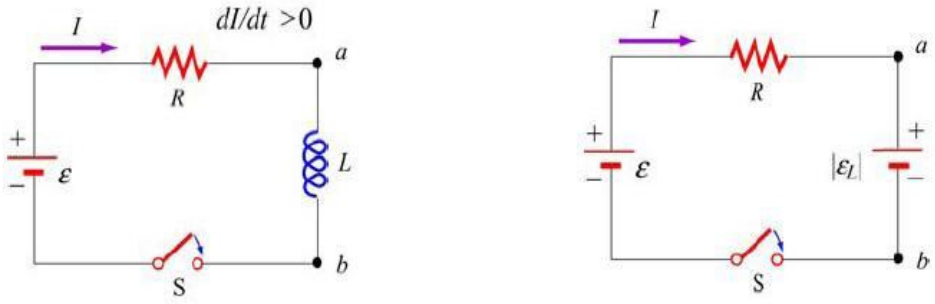
ésta expresión es análoga a la energía eléctrica almacenada en un condensador

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Existe una distinción importante entre una inductancia y una resistencia, desde el punto de vista de la energía. Cuando una corriente I pasa a través de una resistencia, energía fluye a través de la resistencia y se disipa en forma de calor, independiente si la corriente es constante o dependiente del tiempo.
Por otro lado, energía fluye en una inductancia solo cuando existe una corriente que varía en el tiempo , con $dI/dt > 0$. La energía no es disipada pero sí almacenada, y es liberada después cuando $dI/dt < 0$

Circuitos RL

Considere el circuito RL que se muestra en la figura. En t=0, el interruptor es cerrado. Veremos que la corriente no alcanza inmediatamente su máximo valor ε/R. Ésto se debe a la presencia de una fem autoinducida en la inductancia.



Utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$-\varepsilon + IR + |\varepsilon_L| = -\varepsilon + IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

se obtiene entonces una ecuación diferencial para la corriente

$$L\frac{dI}{dt} = \varepsilon - IR$$

la que se puede resolver por el método de separación de variables

$$LdI = dt(\varepsilon - IR) \rightarrow \frac{dI}{(\varepsilon - IR)} = \frac{dt}{L}$$

$$\frac{dI}{(\varepsilon/R - I)} = \frac{dt}{L/R}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación

$$\ln(I - \varepsilon/R) = -t\frac{R}{L} + C_1$$

así

$$I - \varepsilon/R = Ce^{-t\frac{R}{L}}$$

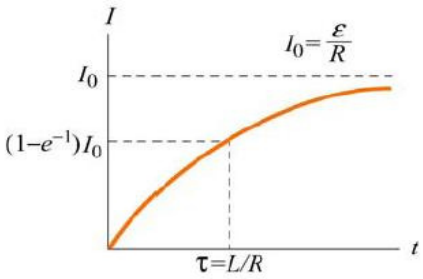
$$I(t) = Ce^{-tR/L} + \varepsilon/R$$

Imponiendo la condición $I(0) = 0$, se tiene $C = -\varepsilon/R$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-tR/L})$$

Se define entonces la constante de tiempo de este circuito como $\tau = L/R$, así

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$



Notar que despues de un tiempo suficientemente largo, la corriente llega a su valor de equilibrio ε/R. El hecho de que no alcanze este valor de forma inmediata se debe justamente a que la inductancia tiende a oponerse a que la corriente varié de forma brusca. La constante de tiempo τ es una medida de qué tan rápido se llega al estado de equilibrio, mientras mayor es el valor de L, más tiempo le toma al circuito a llegar a éste estado.
Similarmente, la magnitud de la fem autoinducida se puede obtener como

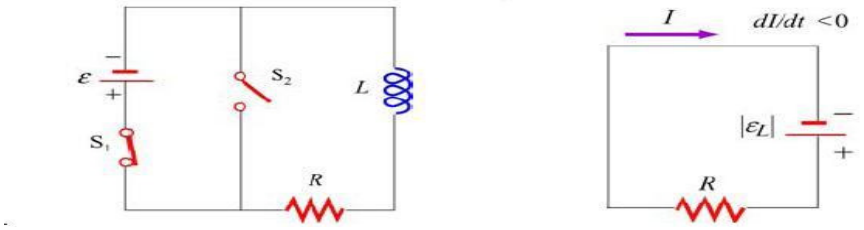
$$|\varepsilon_L| = |-L\frac{dI}{dt}| = \varepsilon e^{-t/\tau}$$

La cual es máxima cuando t=0 y desaparece cuando t tiende a infinito. Esto implica que despues de un largo tiempo desde que el interruptor es cerrado, la autoinducción desaparece y la inductancia siplemente actúa como un alambre conductor conectando 2 partes del circuito.
Para verificar que la energía se conserva, basta multiplicar la ecuación de Kirchhoff por I, para obtener

$$I\varepsilon = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

Notar que el lado izquierdo representa la potencia entregada por la batería, parte de ésta se disipa en la resistencia (I^2R) y el resto se almacena en la inductancia. La energía disipada por la resistencia es irrecuperable, mientras que la almacenada por la inductancia se puede reutilizar después

Para verificar esto último, considere ahora el circuito RL que se muestra en la figura. El interruptor S_1 ha estado cerrado por un tiempo muy largo tal que la corriente está en equilibrio con valor ε/R. Que ocurre cuando en t=0 el interruptor S_1 se cierra y el S_2 se abre?



Sumando las caídas de potencial obtenemos que

$$-|\varepsilon_L| + IR = -L\frac{dI}{dt} + IR = 0$$

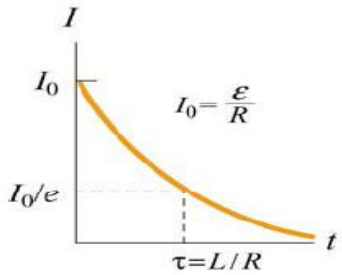
$$L\frac{dI}{dt} = -IR \rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{L/R}$$

Integrando ambos lados de la ecuación

$$I(t) = Ce^{-t/\tau}$$

Imponiendo la condición $I(0) = \varepsilon/R$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau}$$



Es decir, una vez que se desconecta la fuente de energía (batería), la energía almacenada por la inductancia es liberada y entregada a la resistencia, quien disipa esta energía en forma de calor

Circuitos de Corriente Alterna

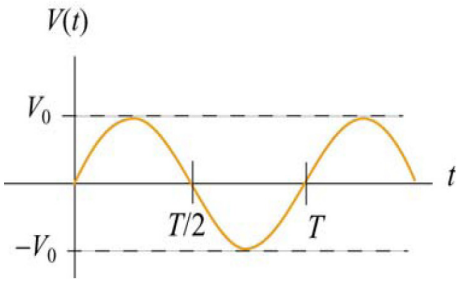
En ayudantías anteriores vimos que un flujo magnético que cambia en el tiempo puede inducir una fem de acuerdo a la ley de Faraday. En particular, si una espira rota con velocidad angular w en la presencia de un campo magnético, la fem inducida varía sinusoidalmente en el tiempo (con frecuencia w) y produce una corriente alterna (AC). Este es el caso típico de generación de energía y de los grandes sistemas de potencia. El símbolo para una fuente de voltaje alterna es



Un ejemplo de fuente AC es

$$V(t) = V_0 \cos wt$$

donde el valor máximo V_0 se llama amplitud. El voltaje varía entre V_0 y $-V_0$. Un gráfico del voltaje como función del tiempo se muestra en la siguiente figura



Es una función periódica en el tiempo. La frecuencia f, definida como $1/T$ donde T es el período, tiene unidades de $1/seg$ (hertz). Se relaciona con la frecuencia angular según $w = 2\pi f$. En nuestras casas obtenemos $V_0 = 220\sqrt{2}$ y $f = 50$ Hz

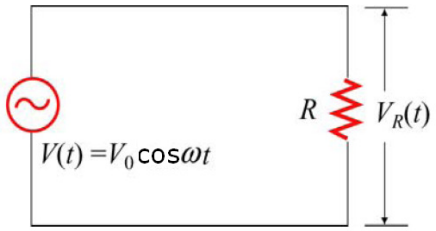
Cuando una fuente de voltaje se conecta a un circuito RLC, después de un tiempo transiente, una corriente alterna comenzará a fluír por el circuito como respuesta a la fuente de voltaje forzante. La corriente será de la forma

$$I(t) = I_0 \cos(wt - \phi)$$

Es decir,oscilará con la **misma frecuencia de la fuente** (esta es una propiedad de los sistemas lineales), con amplitud I_0 y fase ϕ que dependerán de la frecuencia forzante de la fuente
Antes de examinar circuitos RLC complejos, primero consideremos casos simples donde sólo un elemento se conecta a una fuente de voltaje sinusoidal

Carga puramente resistiva

Considere un circuito puramente resistivo con una resistencia conectada a un generador AC, como se muestra en la figura



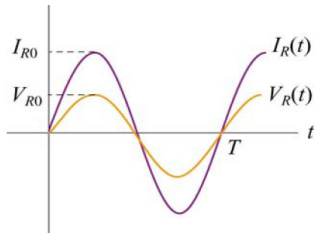
Sumando las caídas de potencial, obtenemos

$$V(t) - V_R(t) = V(t) - I(t)R = 0$$

donde $V_R(t) = I(t)R$ es el voltaje instantáneo a través de la resistencia. La corriente instantánea en la resistencia (y en el circuito) está dada por

$$I(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_0 cos wt}{R} = I_{R0} \cos wt$$

Notamos que $\phi = 0$, lo que significa que $I(t)$ y $V(t)$ están **en fase**, es decir, alcanzan sus valores máximos y mínimos al mismo tiempo.



Ahora, podemos representar voltajes y corrientes con números complejos, así, la fuente que representamos como $V(t) = V_0 cos(wt)$ en forma compleja es, simplemente

$$V(t)^* = V_0 e^{iwt} = V_o(\cos wt + i \sin wt) = \hat{V} e^{iwt}$$

donde $\hat{V}$ es el voltaje en forma de **fasor**. En este caso $\hat{V} = V_o$, pero en otras circunstancias podría ser un número complejo. Por supuesto lo que entendemos aquí por voltaje es la parte real de $V^*(t)$. Similarmente las corrientes también las podemos escribir en forma fasorial.

Definimos la **Impedancia** de una resistencia por el número complejo

$$\hat{Z} = R$$

Esto corresponde a la resistencia expresado como fasor. En el caso de una resistencia es por supuesto un número real. De esta forma

$$\frac{\hat{V}}{\hat{Z}} = \hat{I}$$

Esto se cumple de forma general, de modo que al tratar estos problemas con fasores, siempre se cumple que $\hat{V} = \hat{I}\hat{Z}$, lo que simplifica enormemente los cálculos. En este caso en particular

$$\frac{\hat{V}}{R} = \hat{I}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{V_0}{R}$$

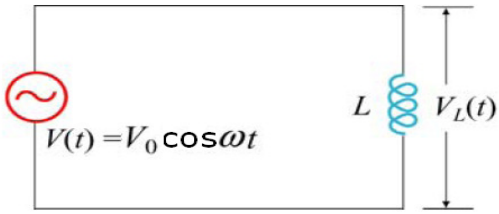
y entonces la corriente es

$$I(t)^* = \hat{I}e^{iwt} = \frac{V_0}{R}e^{iwt}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\cos wt$$

Carga puramente inductiva

Considere ahora una carga inductiva que consiste de una inductancia conectada a una fuente AC



Se tiene

$$V(t) - V_L(t) = V(t) - L\frac{dI}{dt} = 0$$

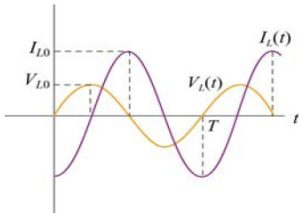
lo que implica

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_o}{L}\cos wt$$

Integrando

$$I_L = \int dI_L = \frac{V_o}{L}\int dt \cos wt = \frac{V_0}{wL}\sin wt = \frac{V_0}{wL}\cos(wt - \pi/2)$$

de aquí vemos que la amplitud del voltaje en la inductancia es $\frac{V_0}{wL} = \frac{V_0}{X_L}$, donde $X_L = wL$ se llama **reactancia inductiva**. Tiene unidades de Ohm (Ω), igual que las resistencias. Sin embargo, a diferencia de una resistencia común, la reactancia depende de la frecuencia. Esto se debe al hecho de que a frecuencias más altas la corriente varía de forma más rapida que a frecuencias bajas. Por otro lado, esta reactancia se anula cuando w tiende a cero. También notamos que $\phi = \frac{-\pi}{2}$, es decir, la corriente está **en atraso** con respecto al voltaje, como se aprecia en la figura



Veamos como se obtiene este resultado de forma inmediata utilizando fasores, todo lo que hay que saber es que la inductancia equivale a una impedancia igual a

$$Z_L = iX_L = iwL$$

De esta forma, el voltaje en la inductancia se relaciona con la corriente a través de ella según

$$\hat{V}_L = \hat{Z}_L \hat{I}$$

es decir, trabajando con fasores es una simple ley de Ohm (entre comillas). Como el voltaje en la inductancia aquí es igual al voltaje de la fuente

$$\hat{V} = \hat{V}_L = iwL\hat{I}$$

Despejando la corriente

$$\hat{I} = \frac{1}{jwL}\hat{V} = -\frac{i}{wL}\hat{V} = \frac{1}{wL}e^{-i\pi/2}\hat{V}$$

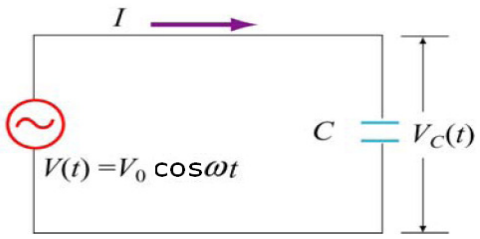
En este caso, $\hat{V} = V_o$, con lo que la corriente en función del tiempo queda

$$I(t)^* = \hat{I}e^{iwt} = \frac{V_o}{wL}e^{i(wt-\pi/2)}$$

tomando la parte real

$$I(t) = \frac{V_0}{wL}\cos(wt - \pi/2)$$

Carga puramente capacitiva



Aquí, nuevamente tenemos

$$V(t) - V_C(t) = V(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$Q(t) = CV(t) = CV_c(t) = CV_0 \cos wt$$

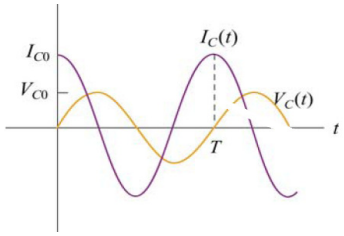
además, la corriente en el circuito está dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -CwV_0 \sin wt = CwV_0 \cos(wt + \pi/2) = CwV(t)$$

de aquí encontramos la relación entre la amplitud del voltaje y la amplitud de la corriente a través del condensador

$$V_0 = \frac{1}{Cw} I_0 = X_C I_0$$

donde X_c es la reactancia capacitiva del condensador. Vemos que en este caso la corriente está desfasada en $\phi = -\pi/2$ con respecto al voltaje (es decir, está en **adelanto** con respecto a este)



En términos de fasores, simplemente consideramos la impedancia de un condensador

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{jwC}$$

de forma que

$$\hat{V} = \hat{Z}_C \hat{I}$$

despejando la corriente

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_C} = iwC\hat{V} = iwCV_o = wCV_o e^{i\pi/2}$$

Así

$$I(t)^* = \hat{I} e^{iwt} = wCV_o e^{i(wt+\pi/2)}$$

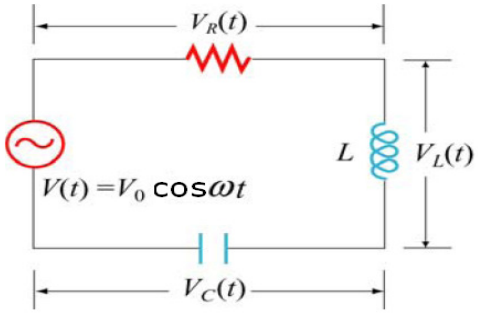
tomando la parte real

$$I(t) = wCV_o cos(wt + \pi/2)$$

Fácil fácil con fasores!

El circuito resonante RLC

Consideremos ahora el circuito RLC de la figura



Aquí tenemos

$$V(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C = V(t) - IR - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

lo que nos lleva a la siguiente ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_o \cos wt$$

Asumiendo que el condensador está inicialmente descargado, y considerando $I = \frac{dQ}{dt}$, podemos reescribirla como

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_o \cos wt$$

Una solución posible es (en régimen permanente)

$$Q(t) = Q_0 sin(wt + \phi)$$

donde la amplitud y la fase son, respectivamente

$$Q_0 = \frac{V_0/L}{\sqrt{(Rw/L)^2 + (w^2 - \frac{1}{LC})^2}} = \frac{V_0}{w\sqrt{R^2 + (wL - 1/wC)^2}}$$

$$Q_0 = \frac{V_0}{w\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

y

$$tan\phi = \frac{1}{R}(wL - \frac{1}{wC}) = \frac{X_L - X_R}{R}$$

la correspondiente corriente es

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = I_o \cos(wt + \phi)$$

con amplitud

$$I_0 = Q_0 w = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Notar que la corriente tiene la misma amplitud y fase en todos los puntos del circuito RLC. Por otro lado, el voltaje instantáneo a través de cada uno de los 3 elementos tiene diferente amplitud y fase con respecto a la corriente. Habrán notado que resolver los problemas mediante esta forma puede resultar complicado, de forma que indicaré una solución con fasores, y sacarán sus propias conclusiones.

En términos de fasores, podemos ver el circuito como una sola impedancia equivalente, como la resistencia, la inductancia y el condensador se encuentran en serie, tenemos

$$\hat{Z}_{eq} = R + iwL + \frac{1}{iwC} = R + i(wL - \frac{1}{wC})$$

la amplitud de este número complejo es, simplemente

$$\text{mod } Z \quad \text{mod } = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}$$

y la fase

$$\phi = arctan(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R})$$

de esta forma, si el voltaje de la fuente es

$$\hat{V} = V_0 \angle 0$$

entonces la corriente a través del circuito es

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \angle arctan(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R})$$

Por último, recordando que

$$I(t)^* = \hat{I} e^{iwt} = \mid I \mid e^{i(wt+\phi)}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos(wt + \phi)$$

donde $\phi = arctan(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R})$

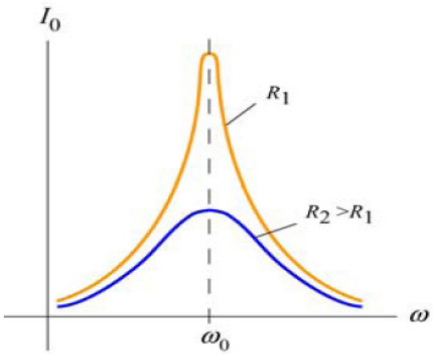
Notar que la amplitud de la corriente $I_0 = \frac{V_0}{Z}$ alcanza un máximo cuando Z es mínimo. Esto ocurre cuando $X_L = X_C$, o $wL = \frac{1}{wC}$, llevando a

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Este fenomeno en que I_0 alcanza su máximo se llama **Resonancia**, y la frecuencia a la cual ocurre, w_0, se llama frecuencia de resonancia. En resonancia, la impedancia se transforma en $Z = R$ (puramente resistiva), y la amplitud de la corriente es

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

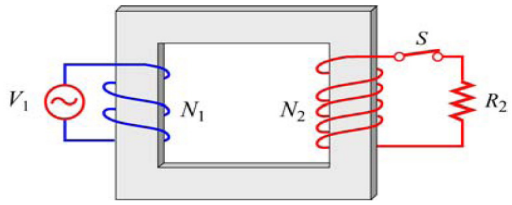
y la fase $\phi = 0$



El circuito resonante es últil en varias aplicaciones, como sintonizadores y tarjetas electrónicas, donde se desea que el circuito responda a señales de un rango de frecuencias limitado.

El transformador

Un transformador es un dispositivo utilizado para aumentar o disminuír el voltaje AC en un circuito. Una típica configuración consiste de 2 bobinas, (primaria y secundaria), enrolladas en un núcleo de hierro, como se muestra en la figura



La bobina primaria, con N_1 vueltas, es conectada a una fuente alterna $V_1(t)$. La secundaria tiene N_2 vueltas y se conecta a una resistencia de carga R_2. La forma en que funcionan los transformadres se basa en la ley de Faraday, la corriente alterna en el primario induce una fem alterna en la segunda bobina, debido a su inductancia mutua.
En el circuito primario, despreciando la resistencia de la bobina, la ley de Faraday implica

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde Φ_B es el flujo magnético a través de la bobina primaria. El nucleo de hierro sirve para incrementar el flujo magnético producido por la bobina 1 (el hierro tiene permeabilidad μ mucho mayor a la del vacío) y para asegurar que prácticamente todo el flujo magnético por el primario también atraviese la bobina secundaria. Así, el voltaje inducido en el secundario es

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

En un transformador ideal, la pérdida de potencia debida al efecto Joule se puede despreciar, de manera que la potencia administrada a la bobina primaria es transferida completamente a la secundaria

$$I_1 V_1 = I_2 V_2$$

También estamos suponiendo que no hay flujo magnético que escape afuera del núcleo de hierro. Combinando esto obtenemos

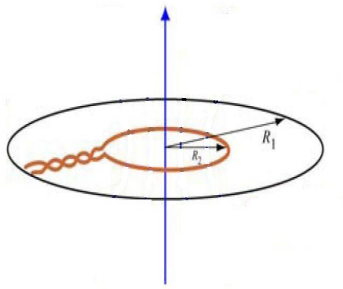
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

vemos que la razón para los voltajes está completamende determinada por la razón entre el número de vueltas entre el primario y el secundario. El transformador tiene una infinidad de aplicaciones, todos los equipos elécticos utilizan uno para transformar los 220 V efectivos en el voltaje deseado de operación. Notar que con corriente continua un transformador simplemente no funciona (Es una de las razones de las porqué no se genera en corriente continua).

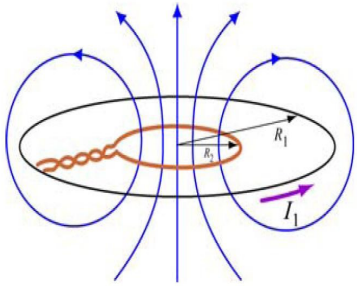
Problema 1

Considere dos espiras coplanares y concéntricas, de radios R_1 y R_2 con $R_1 \gg R_2$. Encuentre la inductancia mutua entre ambas espiras.



Solución

La inductancia mutua se puede obtener suponiendo que por el anillo más grande circula una corriente I_1, como muestra la figura:



Anteriormente vimos que el campo magnético en el centro de un anillo que lleva corriente I_1 está dado por

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\hat{k}$$

Debido a que $R_1 \gg R_2$, aproximamos el campo magnético sobre toda la espira interior por $\vec{B}_1$. Así, el flujo a través de la espira interior es

$$\Phi_{21} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}$$

Si definimos la normal a la superficie encerrada por el anillo interior según el eje $\hat{k}$

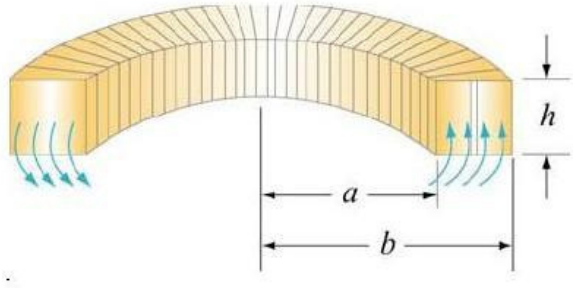
$$\Phi_{21} = B_1 S = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\pi R_2^2 = \frac{\mu_0 I_1 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Finalmente, la inductancia mutua está dada por

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Problema 2

Considere un toroide de N vueltas y de sección rectangular de lado h, radio interior a y radio exterior b.



a) Calcule la autoinductancia y discuta que ocurre cuando $a \gg b - a$
b) Calcule la energía magnética almacenada en el toroide

Solución

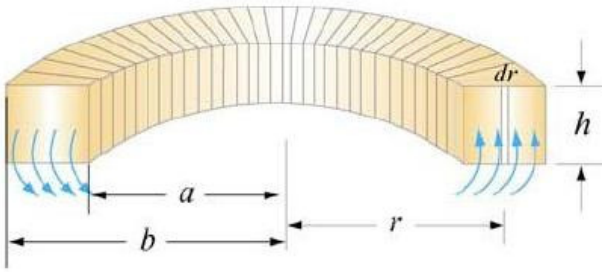
Utilizando la ley de Ampere, el campo magnético se obtiene como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

donde se ha integrado el campo sobre una circunferencia de radio r ubicada en el centro del toroide

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

El flujo magnético sobre una vuelta del toroide se puede obtener al integrar sobre todas las secciones rectangulares, con $dA = hdr$ como elemento diferencial de área



$$\Phi_B = \int\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} ln(b/a)$$

y el flujo total sobre el toroide será $N\Phi_B$. Con esto, la autoinductancia es

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} ln(b/a)$$

cuando $a \gg b - a$, se tiene

$$ln(b/a) = ln(1 + \frac{b-a}{a}) \approx \frac{b-a}{a}$$

y la autoinductancia es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \frac{b-a}{a}$$

recordando que el área de una sección del toroide es $A = h(b-a)$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi a}$$

y con $l = 2\pi a$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

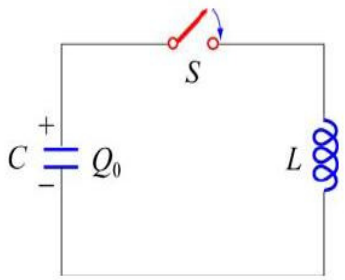
que es justamente la autoinductancia de un solenoide.

b) La energía almacenada en el toroide es simplemente

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} ln(b/a)$$

Problema 3

Considere el siguiente circuito LC. Suponga que el condensador tiene una carga inicial Q_0. En t=0, el interruptor se cierra.



a) Encuentre la ecuación diferencial para la carga en el condensador mediante consideraciones energéticas.
b) Utilizando las leyes de Kirchhoff encuentre $I(t)$ y $Q(t)$

Solución

a) En ausencia de una resistencia, la energía total se transforma constantemente en energía eléctrica y magnética, esto se llama osilación electromagnética.

Le energía total del circuito LC en un instante arbitrario es

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$$

Por el principio de conservación de la energía

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2) = 0$$

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0$$

Además, hay que notar que $I = -dQ/dt$

$$-\frac{Q}{C}I + LI\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow -\frac{Q}{C} - L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

Finalmente la ecuación diferencial para la carga en el condensador es

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

b)Utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff,

$$-V_C + V_L = -\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0$$

y relacionando la corriente con la carga en el condensador

$$\frac{Q}{C} + L\frac{dQ^2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dQ^2}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

la solución general es de la forma

$$Q(t) = Q_0 cos(w_0 t + \phi)$$

donde la frecuencia angular w_0 está dada por

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corriente por la inductancia es

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = w_0 Q_0 sin(w_0 t + \phi) = I_0 sin(w_0 t + \phi)$$

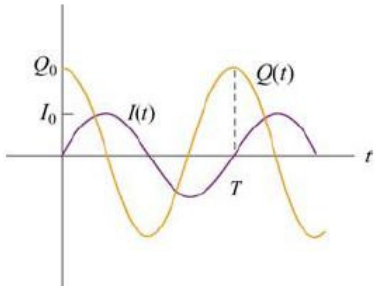
donde $I_0 = w_0 Q_0$. De las condiciones iniciales $Q(0) = Q_0$ e $I(0) = 0$, la fase ϕ es simplemente 0.

Con esto, las soluciones para la carga y la corriente en el circuito LC es

$$Q(t) = Q_0 cos(w_0 t)$$

$$I(t) = I_0 sin(w_0 t)$$

la dependencia de $Q(t)$ e $I(t)$ se muestra en la figura:



La energía eléctrica y magnética están dadas por

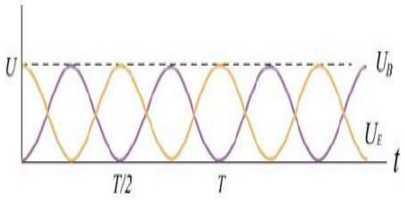
$$U_E = \frac{Q^2(t)}{C} = (\frac{Q_0^2}{2C}) cos^2(w_0 t)$$

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{L I_0^2}{2} sin^2(w_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C} sin^2(w_0 t)$$

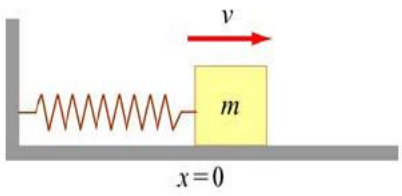
Se ve fácilmente que la energía permanece constante

$$U = (\frac{Q_0^2}{2C}) cos^2(w_0 t) + \frac{Q_0^2}{2C} sin^2(w_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C}$$

La oscilación de energía magnética y eléctrica en el tiempo se ve en la figura

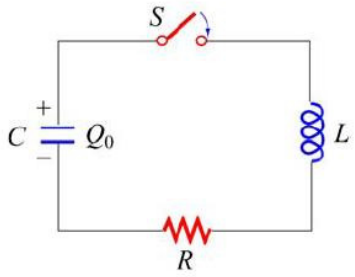


El análogo mecánico de este circuito LC es el sistema masa-resorte



Problema 4

Considere el circuito RLC en serie, que consta de una resistencia, una inductancia, y un condensador



Mediante consideraciones energéticas encuentre la ecuación diferencial para la carga en el condensador

Solución

La energía en un instante arbitrario t está dada por

$$U = U_E + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$$

A diferencia del circuito LC, parte de la energía del circuito será disipada por la resistencia. Esto es, la tasa a la cual la energía es disipada es

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R$$

donde el signo negativo implica que la energía total disminuye en el tiempo. Así

$$\frac{dU}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R$$

Aquí, nuevamente se tiene $I = -dQ/dt$

$$-\frac{Q}{C}I + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R$$

$$-\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = -IR$$

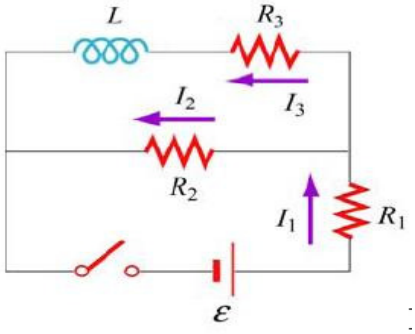
$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dQ^2}{dt^2} = \frac{dQ}{dt}R$$

Finalmente, la ecuación diferencial para Q es

$$L\frac{dQ^2}{dt^2} + \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0$$

Problema 5

Considere el circuito de la figura

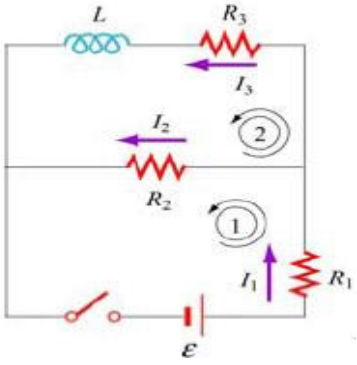


Determine la corriente por cada resistencia
a) inmediatamente después de cerrar el interruptor
b) después de que ha pasado mucho de tiempo de cerrado el interruptor
Suponga que el interruptor es reabierto después de que ha estado mucho tiempo cerrado, encuentre nuevamente las corrientes:
d) inmediatamente después de que es abierto
e) después de un largo tiempo

Solución

a) Inmediatamente después de que el interruptor es cerrado, la corriente a través de la inductancia es cero ya que la fem autoinducida evita que la corriente crezca abruptamente.
Así, $I_3 = 0$.

Debido a que $I_1 = I_2 + I_3$, se tiene que $I_1 = I_2$



Utilizando las leyes de Kirchhoff a la malla 1, se tiene

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + I_1 R_2 = 0$$

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

b) Después de un largo tiempo, no hay fem autoinducida en la inductancia y las corrientes pasan a ser constantes. Para la malla 1, se tiene ahora

$$-\varepsilon + I_1 R_1 + I_2 R_2 = 0$$

y para la malla 2

$$I_3R_3 - I_2R_2 = 0$$

por último, por la ley de nodos, $I_1 = I_2 + I_3$. Resolviendo, se obtiene

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_2 = \frac{R_3\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_3 = \frac{R_2\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

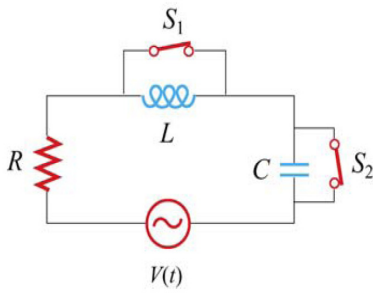
c) Inmediatamente después de que el interruptor es abierto nuevamente, la corriente a través de R_1 es 0, $I_1 = 0$. Esto implica que $I_2 + I_3 = 0$.
La malla 2 ahora forma un circuito RL que decae e I_3 comienza a decaer. Así

$$I_3 = -I_2 = \frac{R_3\varepsilon}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

d)Después de mucho tiempo , todas las corrientes son cero, esto es, $I_1 = I_2 = I_3 = 0$

Problema 6

Considere el circuito de la figura, donde $V(t) = V_o \cos wt$. Si S_1 y S_2 se cierran inicialmente, encuentre (Datos son R, L, V_o y w)



a) La corriente en función del tiempo
b) La potencia promedio entregada al circuito
c) La corriente en función del tiempo largo tiempo después de que S_1 se abre
d) La capacidad C si S_1 y S_2 se abren y después de un tiempo largo, la corriente y el voltaje están en fase
e) La impedancia cuando S_1 y S_2 se abren
f) La energía máxima almacenada en el condensador y la inductancia
g) La diferencia de fase entre voltaje y corriente si se dobla la frecuencia w
h) La frecuencia para la cual la reactancia inductiva es igual a un medio de la reactancia capacitiva

Solución

a) Al cerrar ambos interruptores, no circulará corriente ni por la inductancia ni por el condensador. La impedancia equivalente en este caso es $Z_{eq} = R$ de modo que la corriente es, simplemente

$$I(t) = \frac{V_o}{R} \cos wt$$

b) La potencia instantánea consumida por la resistencia es

$$P(t) = V(t)I(t) = \frac{V_o^2}{R} \cos^2 wt$$

Claramente una función periódica, el promedio temporal es entonces

$$< P(t) >= \frac{1}{T} \int_o^T dt P(t) = \frac{V_o^2}{2R}$$

c) Cuando se abre S_1, se conecta la inductancia al circuito. La impedancia equivalente en este caso es

$$Z_{eq} = R + iwL = \sqrt{R^2 + w^2 L^2} e^{iarctan(\frac{wL}{R})}$$

Luego, la corriente es

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z_{eq}} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}} e^{-iarctan(\frac{wL}{R})}$$

Así,

$$I(t) = Re(\hat{I}e^{iwt}) = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}} cos(wt - tan^{-1}(wL/R))$$

d) Ahora se conecta además el condensador, de modo que la impedancia equivalente en este caso es

$$Z_{eq} = R + iwL + \frac{1}{iwC} = R + i(wL - \frac{1}{wC}) =\mid Z \mid e^{i\phi}$$

donde está dado por

$$\phi = tan^{-1} \frac{(wL - \frac{1}{wC})}{R}$$

como no hay desfase entre voltaje y corriente, $\phi = 0$ (el circuito está en resonancia!), esto quiere decir que $w = w_o$

$$\phi = 0 \rightarrow tan^{-1} = 0$$

$$w_oL = \frac{1}{w_oC}$$

$$C = \frac{1}{w_o^2 L}$$

e) El circuito está en resonancia, luego

$$\mid Z \mid = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2} = R$$

f) La energía máxima en el condensador es (V_c representa la amplitud del voltaje en el condensador)

$$U_{E_{max}} = \frac{1}{2}CV_c^2 = \frac{1}{2}C(\frac{I_o}{wC})^2$$

$$U_{E_{max}} = \frac{1}{2}C\frac{V_o}{R}^2 \frac{1}{w_o^2C^2} = \frac{V_0^2L}{2R^2}$$

En el último paso se ha usado que la frecuencia es igual a la frecuencia de resonancia $w_0 = 1/(\sqrt{LC})$ Ahora, la energía máxima almacenada por la inductancia

$$U_{L_{max}} = \frac{1}{2}LI_o^2 = \frac{LV_o^2}{2R^2}$$

g) Si la frecuencia es ahora

$$w = 2w_o = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

el ángulo de desfase entre voltaje y corriente queda

$$\phi = tan^{-1}(\frac{wL - 1/(wC)}{R}) = tan^{-1}(\frac{2/(\sqrt{LC})L - (\sqrt{LC}/(2C))}{R})$$

$$\phi = tan^{-1}(\frac{3}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}})$$

h) Finalmente, la frecuencia para que $X_L = \frac{1}{2}X_C$ debe cumplir

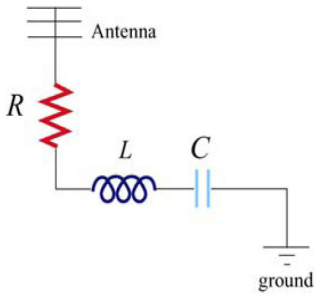
$$wL = \frac{1}{2}\frac{1}{wC}$$

luego

$$w = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{w_o}{\sqrt{2}}$$

Problema 7

Una antena FM tiene una inductancia $L = 10^{-6}$ H, una capacidad $C = 10^{-12}$ F, y una resistencia $R = 100\ \Omega$. Una señal de radio induce una fem sinusoidal en la antena con amplitud 10^{-5} V



a) A que frecuencia angular w_0 de la señal incidente el circuito estará sintonizado, esto es, para que w_0 la corriente en el circuito será máxima?
b) Asumiendo que la onda incidente está sintonizada, cual será la amplitud de la corriente en el circuito a esta frecuencia?
c) Cuál es la amplitud de la diferencia de potencial a través del condensador a esta frecuencia?

Solución

a) La antena estará sintonizada con la señal incidente a la frecuencia de resonancia, esto es, la señal debe tener una velocidad angular dada por

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-6}10^{-12}}} = 10^9$$

y la frecuencia asociada es

$$f = \frac{w_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}10^9 = 0,159 * 10^9$$

Equivalentemente $f = 0,159Ghz$.

b) A la frecuencia de resonancia, la corriente máxima es

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{10^{-5}}{100} = 0,1\mu A$$

c)La amplitud del voltaje en la inductancia

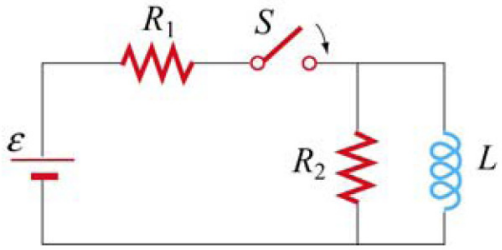
$$V_L = I_0 X_L = I_0 w_0 L = 0,1 * 10^{-6} 2\pi * 0,159 * 10^9 * 10^{-6} = 9,99 * 10^{-5} V$$

Problema 1

Dado el circuito de la figura, suponer que el interruptor S se ha cerrado durante un largo tiempo, de modo que existen corrientes estacionarias en el inductor de $L = 2H$ y que su resistencia es despreciable. Además $R_1 = 10\ \Omega$, $\varepsilon = 10$ V

(a) Determinar la intensidad de corriente suministrada por la batería, la corriente que circula por la resistencia $R_2 = 100\ \Omega$ y la intensidad que circula por el inductor

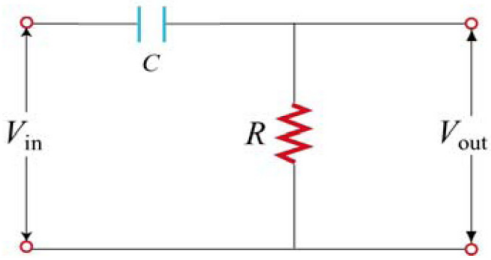
(b) Determinar el voltaje inicial entre los extremos del inductor cuando se abre el interruptor S



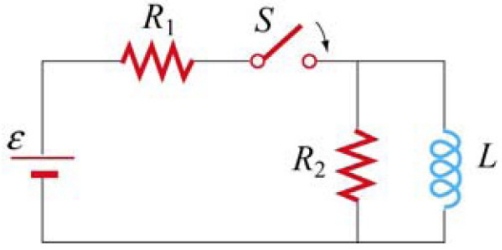
Problema 2

El circuito de la figura se denomina filtro RC pasa-altos porque transmite con mayor amplitud las señales de alta frecuencia que las de baja. Si la tensión de entrada es $V_{in} = V_0 \cos wt$, demostrar que la de salida es $V_{sal} = V_R \cos(wt - \phi)$, donde

$$V_R = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\frac{1}{wRC})^2}}$$



Solución problema 1



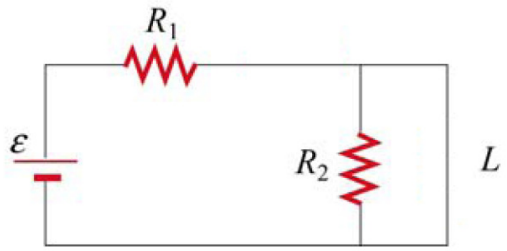
Cuando el interruptor S ha estado cerrado por largo tiempo, las corrientes llegan a un estado de regimen permanente. Si $I_L(t)$ denota la corriente a través de la inductancia, se tiene que el voltaje a través de ésta es

$$v_L(t) = L\frac{dI_L}{dt}$$

En régimen estacionario

$$\frac{dI_L}{dt} = 0$$

Así, no hay diferencia de potencial entre los extremos de la inductancia. Esto significa que en régimen permanente la inductancia se comporta como un cortocircuito



En esta situación, toda la corriente se irá por la inductancia, de esta forma

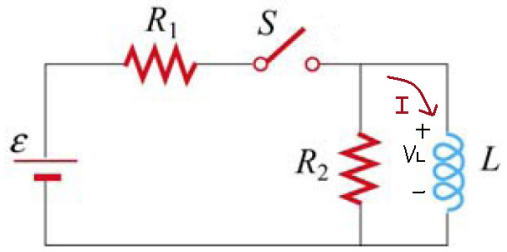
$$I_{R_{100\Omega}} = 0$$

Para obtener la intensidad que circula por el circuito, simplemente sumamos las caídas de potencial y se obtiene

$$-\varepsilon + IR_1 = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{10}{10} = 1A$$

b) En el instante en que se abre nuevamente el interruptor, circula corriente a través de la inductancia y la resistencia de 100Ω



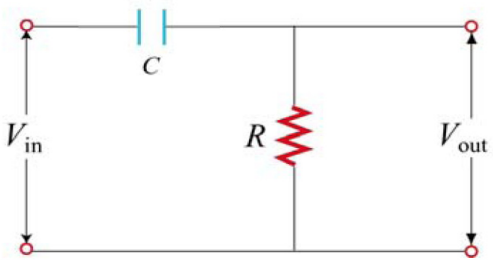
Sea $I(t)$ la corriente que fluye en este caso. Por continuidad, $I(0) = 1A$, con esto

$$IR_2 + V_L = 0$$

$$V_L = -IR_2 = -1 * 100 = -100V$$

Solución Problema 2

El circuito consiste en un condensador en serie con una resistencia



La impedancia equivalente está dada por

$$\hat{Z} = R + \frac{1}{iwC} = R - i\frac{1}{wC}$$

Conviene expresar esta impedancia en su forma polar

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}e^{i\phi}$$

donde ϕ está dado por

$$\phi = tan^{-1}(\frac{1}{wRC})$$

De esta forma, se tiene

$$\hat{V}_{in} = \hat{Z}\hat{I}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_{in}}{\hat{Z}} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}e^{i\phi}}$$

$$\hat{I} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}}e^{-i\phi}$$

Finalmente, V_{out} es el voltaje entre los extremos de la resistencia

$$\hat{V}_{out} = \hat{Z}_r\hat{I} = R\hat{I} = \frac{RV_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}}e^{-i\phi}$$

$$\hat{V}_{out} = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2w^2C^2}}}e^{-i\phi}$$

Con esto

$$V_{out}(t) = Re(\hat{V}_{out}e^{iwt}) = \frac{V_o}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2w^2C^2}}}\cos(wt - \phi)$$